Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- **4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)**
- 5. Torsione uniforme

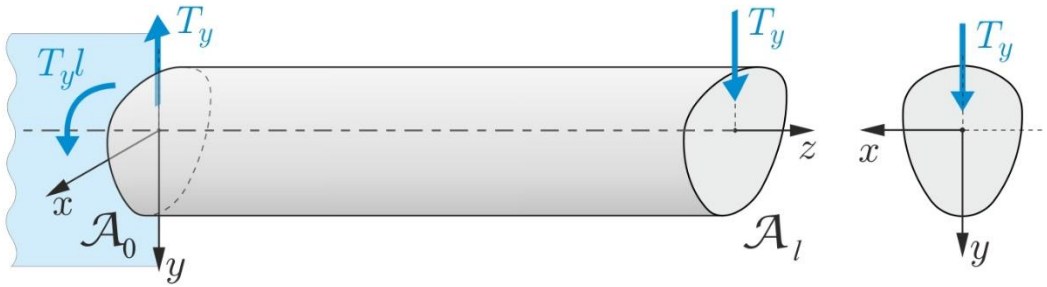
Lezione

4. Flessione e Taglio

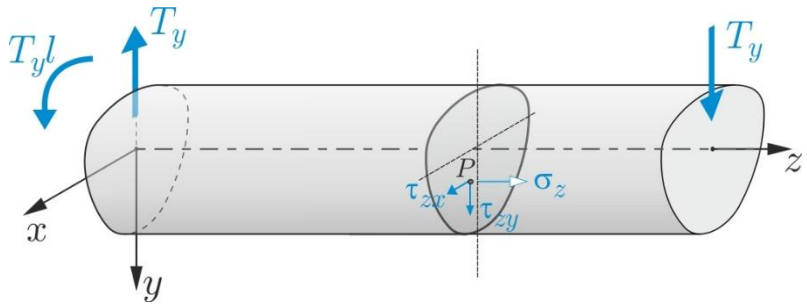
- **Posizione del problema**
- **Ipotesi sulla soluzione (tensioni)**
- **Tensioni normali**
- **Tensioni tangenziali**
- **Teoria approssimata di Jourawsky**
- **Esercizi** (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)

4. Flessione e Taglio

Posizione del problema



Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



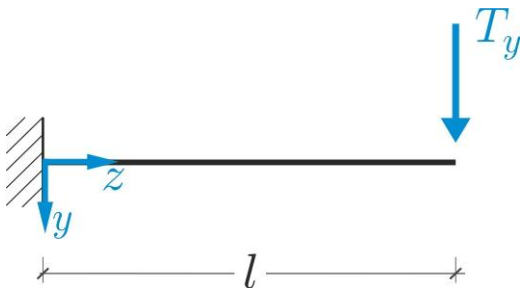
$$\sigma_z \neq 0$$

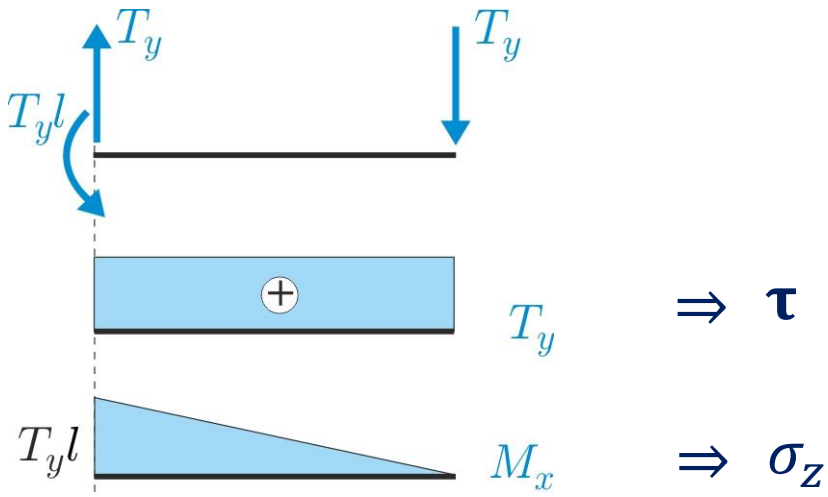
$$\boldsymbol{\tau \neq 0}$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

4. Flessione e Taglio

Modello 1D





$\Rightarrow$ **τ**

$\Rightarrow$ σ_z

$$M_x(z) = -T_y l + T_y z$$

Tensioni normali σ_z

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad M_x(z) = -T_y l + T_y z \qquad \sigma_z(y,z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{T_y}{I_x} y(l - z)$$

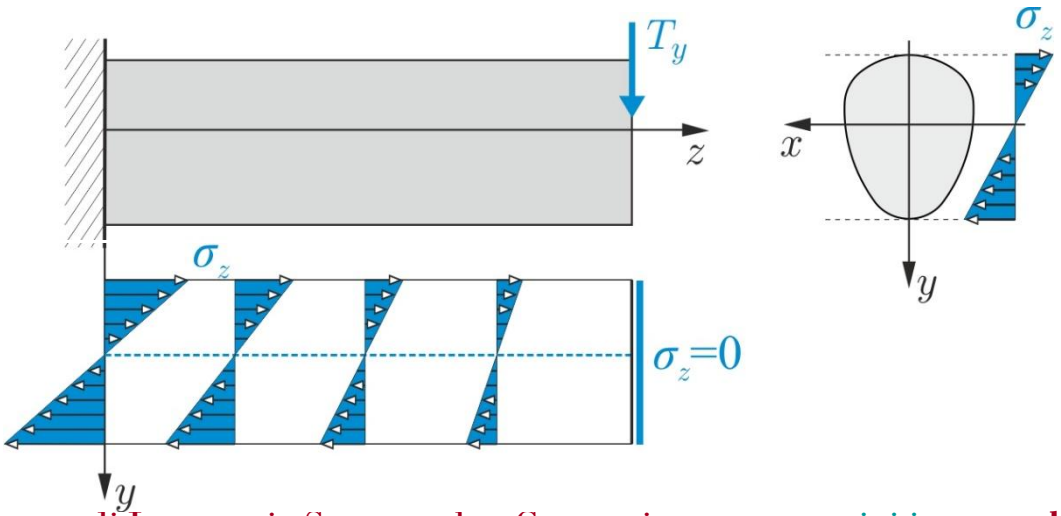
4. Flessione e Taglio

Tensioni normali σ_z

$$\sigma_z(y,z) = -\frac{T_y}{I_x}(l-z)y \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{I_x}y$$

$$\sigma_z(y,0) = -\frac{T_y}{I_x} l\, y \qquad \sigma_z(y,l) = 0$$

Tensioni normali σ_z: rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio

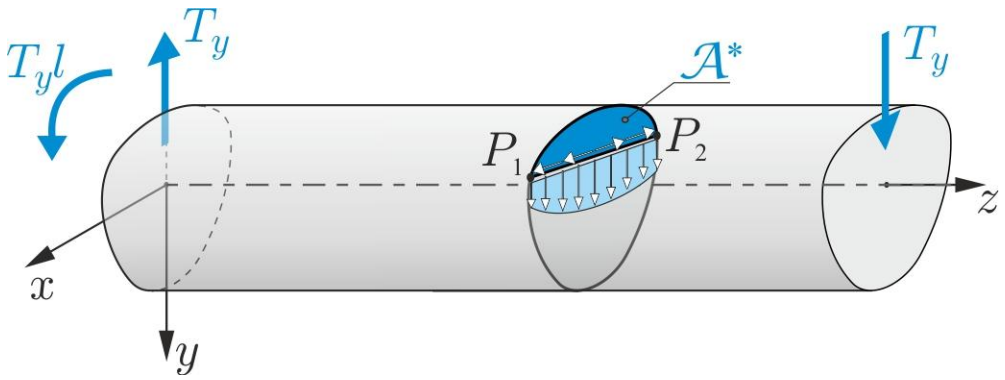
Tensioni tangenziali τ

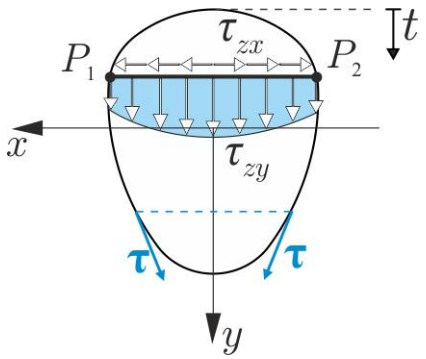
Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x,y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x,y)\mathbf{j} = \boldsymbol{cost_z}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x}y}$$

$$c.c.\ su\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = 0, P \in \Gamma}$$





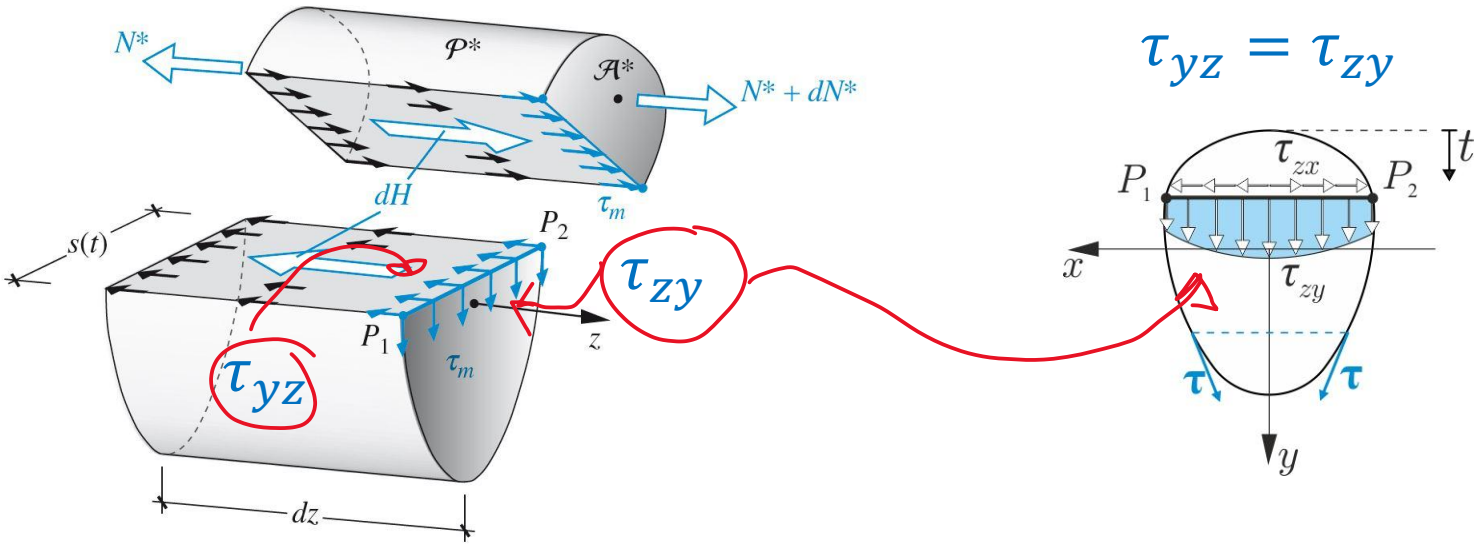
$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$

4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ: reciprocità delle tensioni tangenziali

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

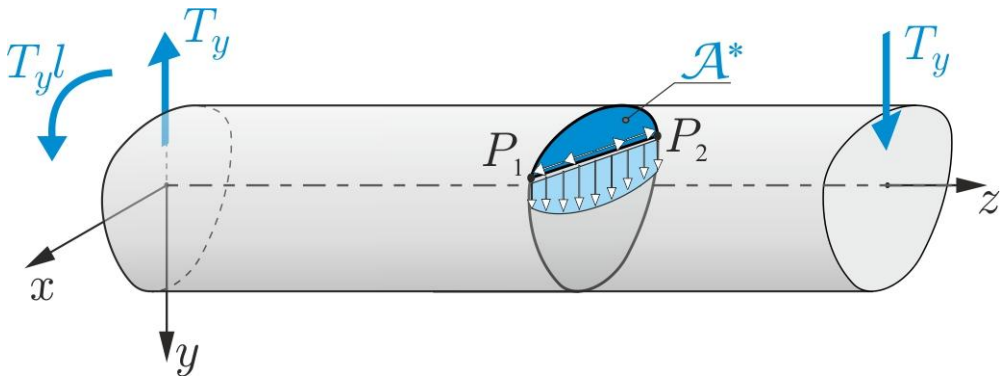
$$\mathbf{m} \perp \mathbf{n} \;\Rightarrow\; \tau_{mn} = \tau_{nm}$$

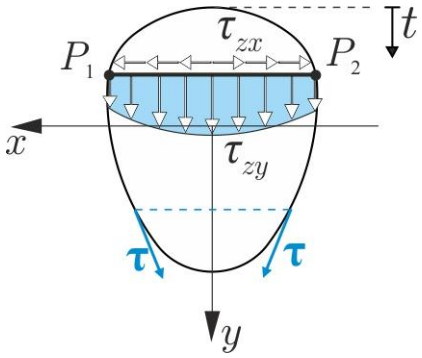


4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ: soluzione esatta

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x}y \qquad \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$



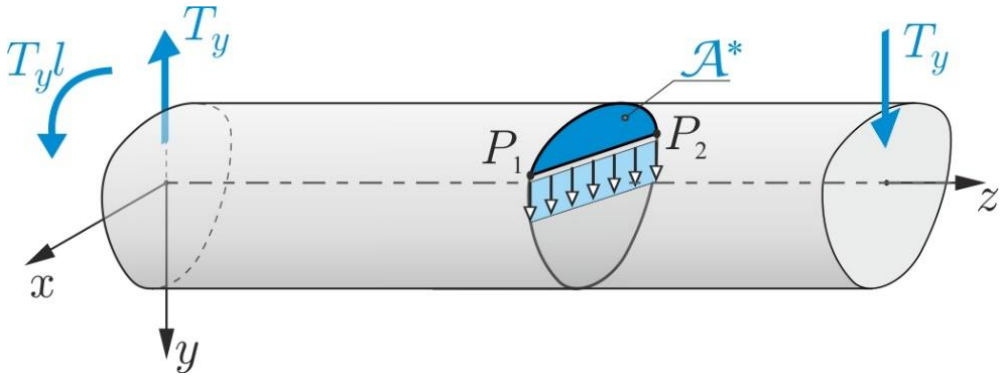


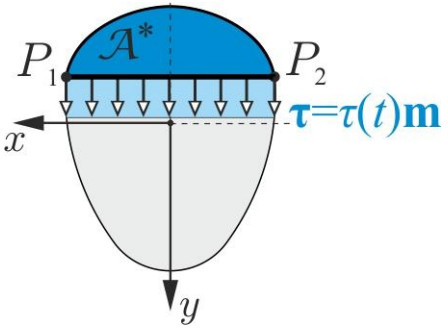
$\overline{P_1P_2} = s$

$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$

Tensioni tangenziali τ: valor medio sulla corda

$$\tau_m = \frac{1}{s}\int_{-s/2}^{s/2} \tau_{zy}\, dx$$



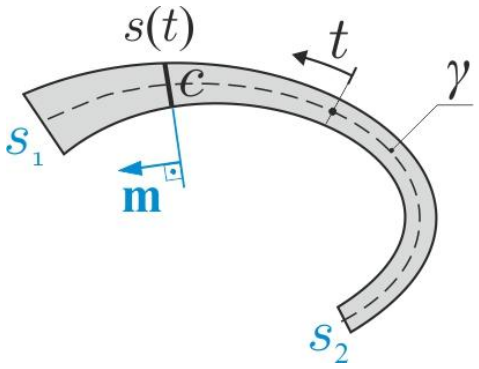


4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



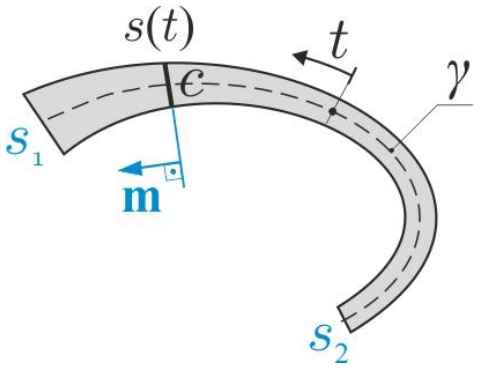


4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*





γ: linea media

c: corda (segmento perpendicolare alla linea media)

t: ascissa locale

m: versore perpendicolare alla corda e orientato concordemente all'ascissa locale

$s(t)$: lunghezza della corda detta spessore (costante o variabile con t)

$$mis(\gamma) := a$$

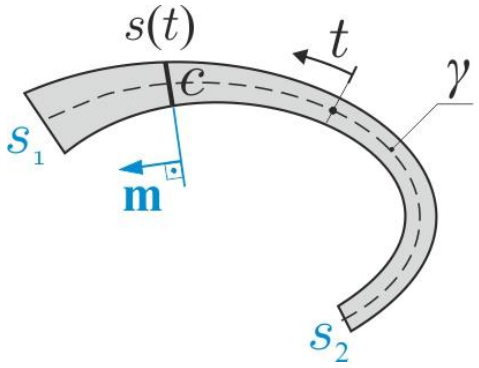
$$mis(c) := s(t)$$

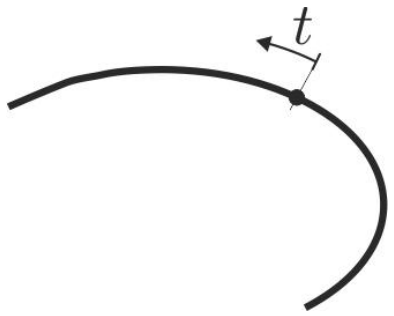
$$s \ll a \qquad 0 \leq t \leq a$$

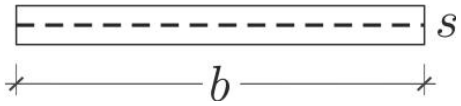
4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

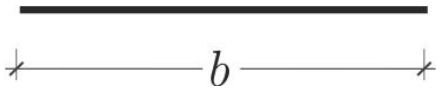
Sezioni di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$): rappresentazione

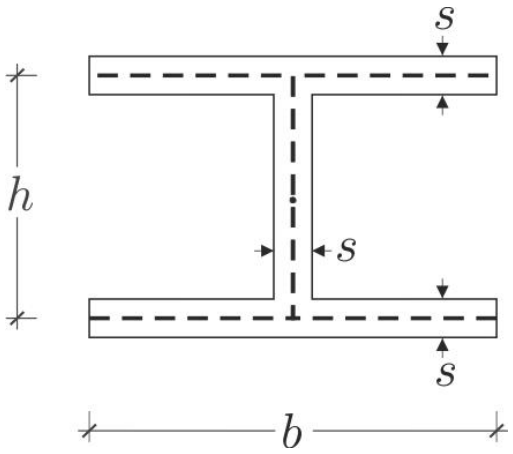




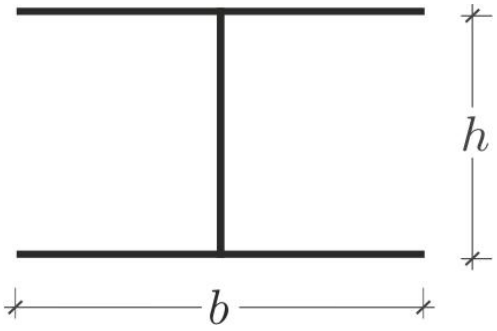


$a = b$





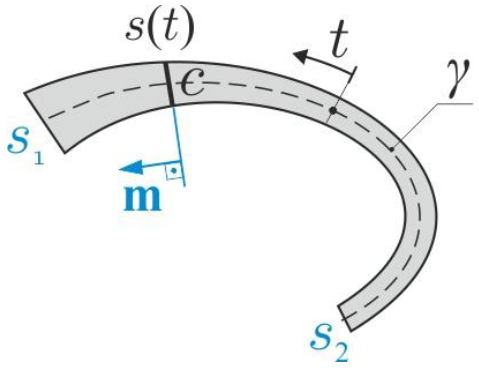
$a = 2b + h$

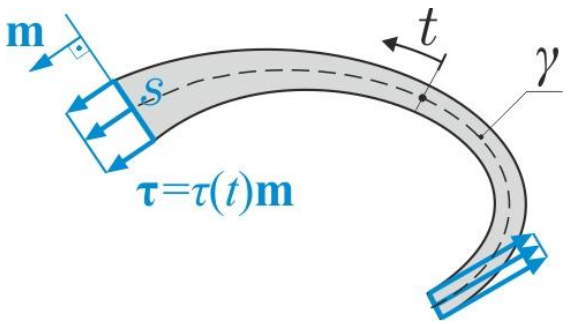


4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

Ipotesi





Ipotesi 1: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è parallelo alla linea media e quindi perpendicolare alla corda

$$\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{m}$$

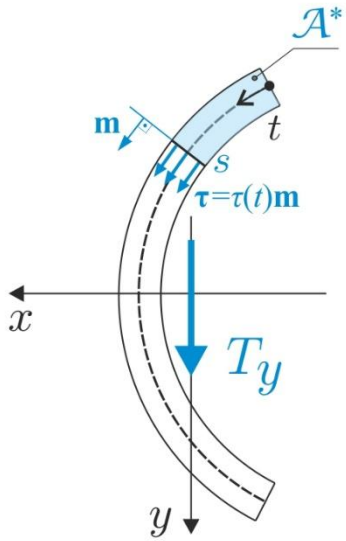
Ipotesi 2: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è costante lungo la corda, il suo modulo dipende quindi dalla sola ascissa locale t:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

Formula di Jourawsky: *verso* e *modulo* del vettore delle tensioni tangenziali è fornito dalla formula approssimata di Jourawsky

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$

$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y: forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y. $[F]$

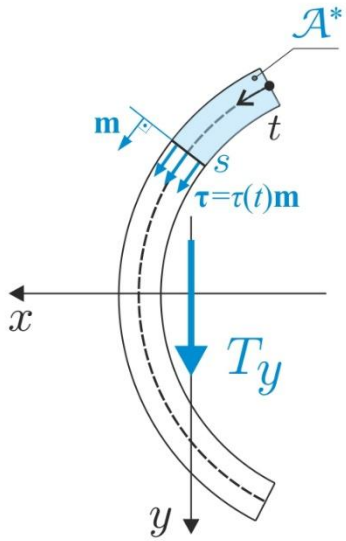
I_x: momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x $(I_x > 0)$ $[L^4]$

s: lunghezza della corda c, spessore $(s > 0)$ $[L]$

S_x^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a x; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$

S_x^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a x; positivo se G^* è dalla parte delle y positive: $[L^3]$

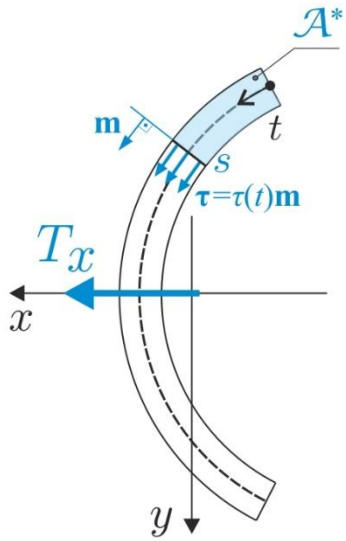
$$S_x^*(t) = \int_{\mathcal{A}*} y dA$$

N.B. $S_x^*(t)$ si può calcolare direttamente moltiplicando l'area della porzione $\mathcal{A}^*$per la distanza d^* del baricentro G^* di $\mathcal{A}^*$ dall'asse x. $S_x^*(t)$ è positivo se G^* è dalla parte delle y positive, negativo in caso contrario:

$S_x^*(t) = +A^* d^*$ (se G^* si trova nel semipiano delle y positive)
$S_x^*(t) = -A^* d^*$ (se G^* si trova nel semipiano delle y negative)

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_x



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x\, S_y^*(t)}{I_y\, s(t)}$$

$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_x: forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale x. $[F]$

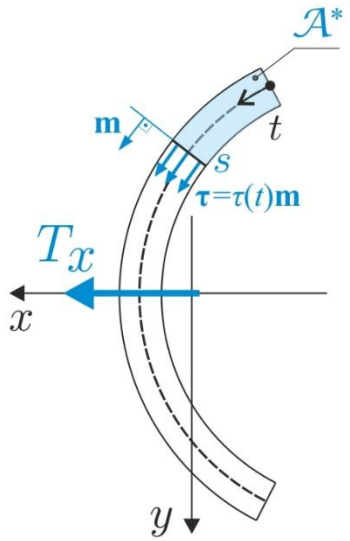
I_y: momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale y $(I_y > 0)$ $[L^4]$

s: lunghezza della corda c, spessore $(s > 0)$ $[L]$

S_y^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a y; positivo se G^* è dalla parte delle x positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_x



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x\, S_y^*(t)}{I_y\, s(t)}$$

S_y^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a y; positivo se G^* è dalla parte delle x positive: $[L^3]$

$$S_y^*(t) = \int_{\mathcal{A}*} x dA$$

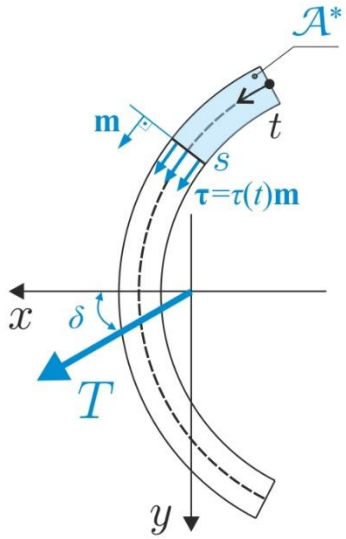
N.B. $S_y^*(t)$ si può calcolare direttamente moltiplicando l'area della porzione $\mathcal{A}^*$per la distanza d^* del baricentro G^* di $\mathcal{A}^*$ dall'asse x. $S_y^*(t)$ è positivo se G^* è dalla parte delle x positive, negativo in caso contrario:

$S_y^*(t) = +A^* d^*$ (se G^* si trova nel semipiano delle x positive)

$S_y^*(t) = -A^* d^*$ (se G^* si trova nel semipiano delle x negative)

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio deviato T



$$T_x = T\cos\delta, \qquad T_y = T\sin\delta$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

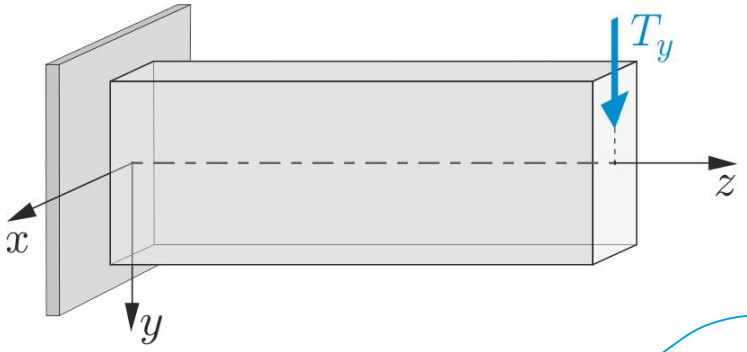
$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m} = -\frac{T_x\, S_y^*(t)}{I_y\, s(t)} - \frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$

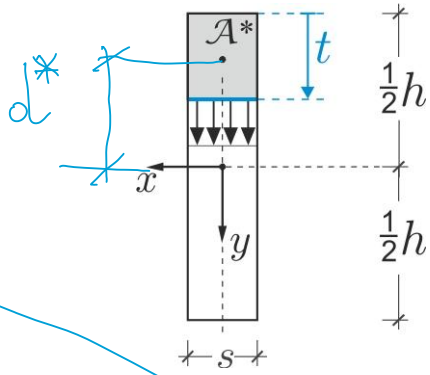
$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile





$$I_x = \frac{1}{12}\, s h^3$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s}$$

$$S_x^*(t) = A^* d^* = -(s\, t)\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) \qquad \Rightarrow S_x^*(t) = -st\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}$$

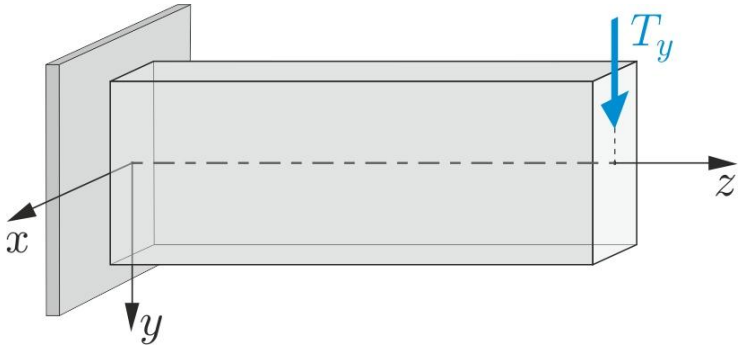
$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \tau\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \frac{T_y h^2}{8 I_x}$$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

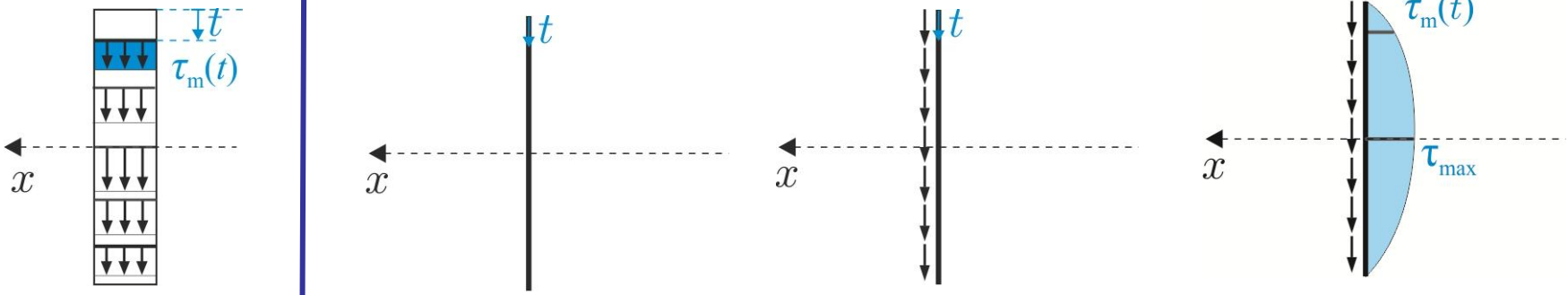
$$\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T_y h^2}{8 I_x}$$

Tensioni tangenziali: rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Osservazioni generali (testo § 21.4.4)

Si riassumono nel seguito gli aspetti salienti della teoria approssimata di Jourawsky, valida per sezioni di piccolo spessore:

1. le tensioni tangenziali dovute al taglio, distribuite allo stesso modo in ogni sezione del cilindro, sono dirette parallelamente alla linea media e sono costanti lungo lo spessore. Verso e intensità lungo la linea media si ricavano utilizzando la formula di Jourawsky.
2. il *flusso delle tensioni tangenziali* dovute al taglio, definito come $q(t) = s(t)\tau_m(t)$, non è costante lungo la linea media (come nel caso della torsione uniforme), ma varia *in modo continuo* con t.
3. il campo delle tensioni tangenziali *non è solenoidale* poiché la sua divergenza è diversa da zero e varia da punto a punto nella sezione; le linee di flusso sono quindi generalmente aperte.
4. in corrispondenza agli estremi liberi della sezione le tensioni tangenziali e i relativi flussi sono nulli.
5. le tensioni tangenziali raggiungono il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro (nei casi visti finora è l'asse x).
6. nei tratti paralleli all'asse x le tensioni variano linearmente, nei tratti paralleli all'asse y le tensioni variano secondo una legge quadratica.
7. la trattazione sin qui svolta non si modifica se l'asse principale y non è di simmetria per la sezione, e si estende immediatamente al caso in cui la forza tagliante è parallela all'asse principale x.

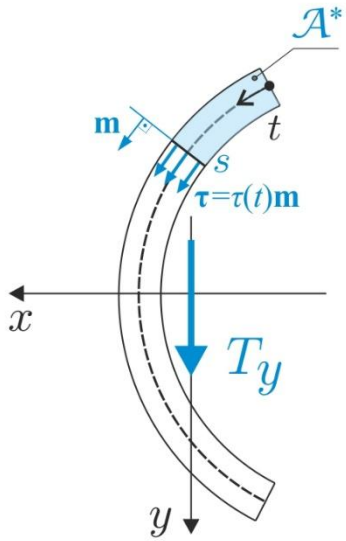
Lezione

4. Flessione e Taglio

- Posizione del problema
- Ipotesi sulla soluzione (tensioni)
- Tensioni normali
- Tensioni tangenziali
- Teoria approssimata di Jourawsky
  - **Dimostrazione della formula di Jourawsky**
- Esercizi (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$

$$S_x^*(t) = \int_{\mathcal{A}*} y dA$$

$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y: forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y. $[F]$

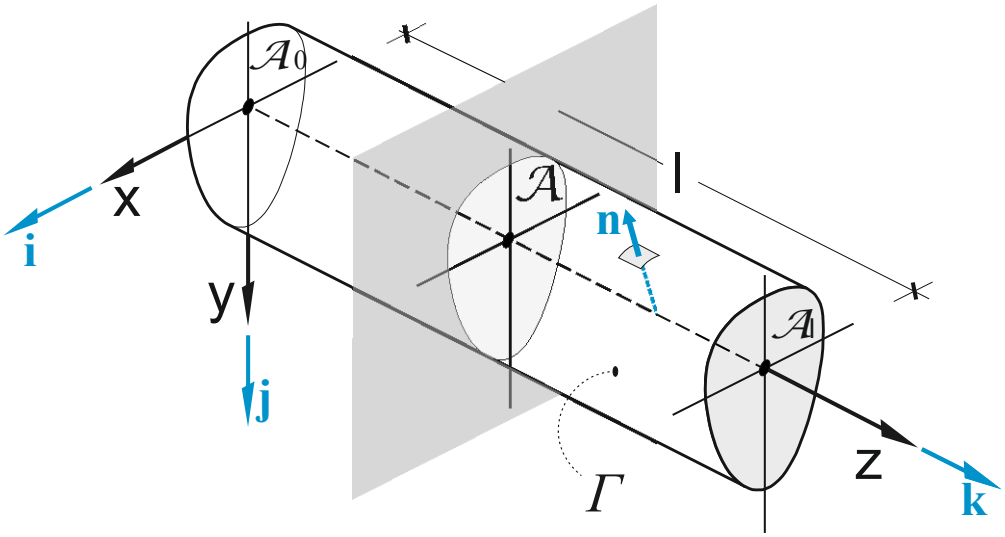
I_x: momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x $(I_x > 0)$ $[L^4]$

s: lunghezza della corda c, spessore $(s > 0)$ $[L]$

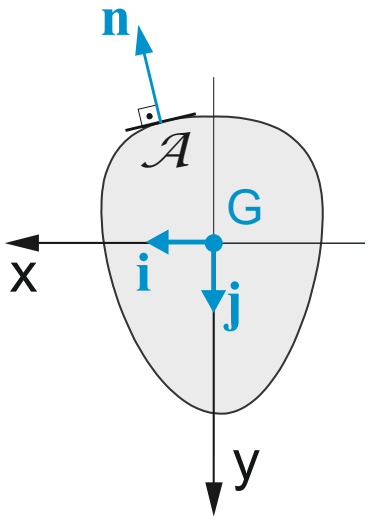
S_x^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a x; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

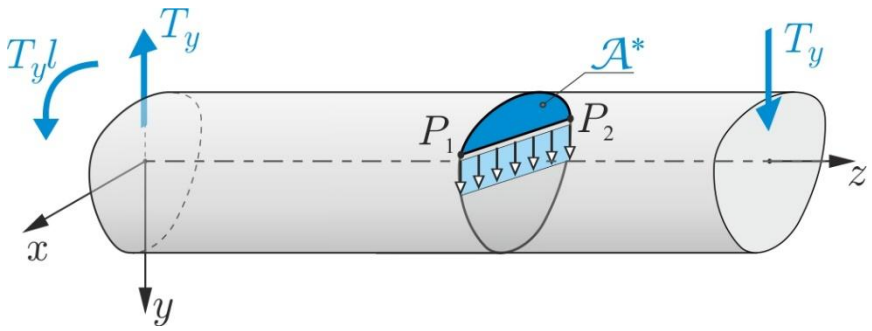


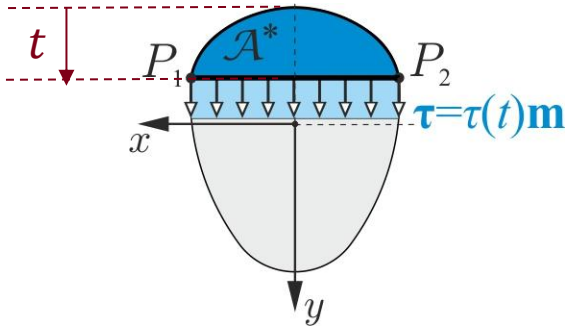
Mantello Γ: versore normale uscente **n**



Sezione generica $\mathcal{A}$

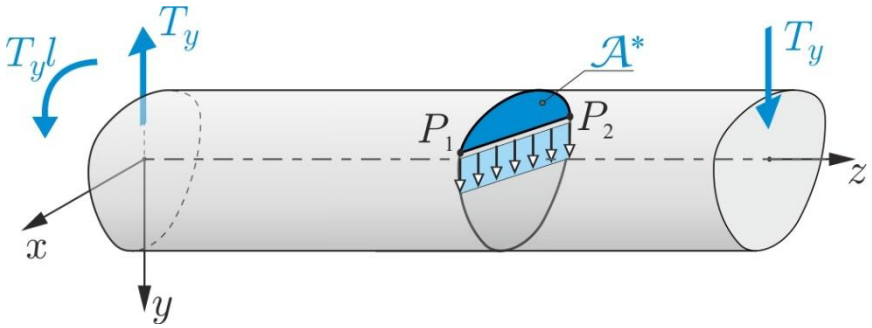
x, y assi centrali principali d'inerzia

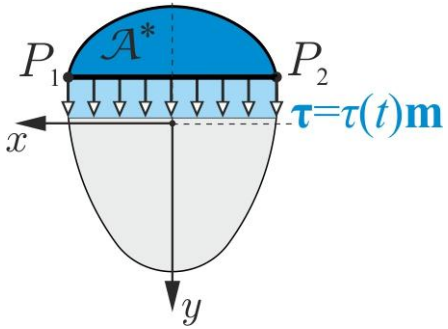


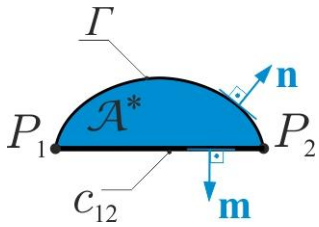


4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky







Frontiera: $\partial\mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$

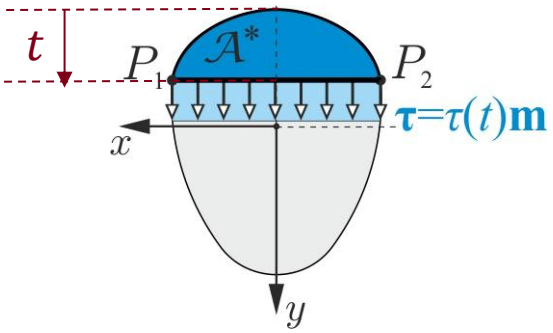
Normali uscenti : $\mathbf{n}^*$ $\mathbf{n}$ $\mathbf{m}$

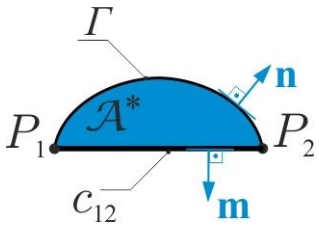
4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y} \qquad \boxed{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = 0, P \in \Gamma}$$





$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{\mathcal{A}*} \left(-\frac{T_y}{I_x} y\right) dA \qquad \int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x}\int_{\mathcal{A}*} y dA$$

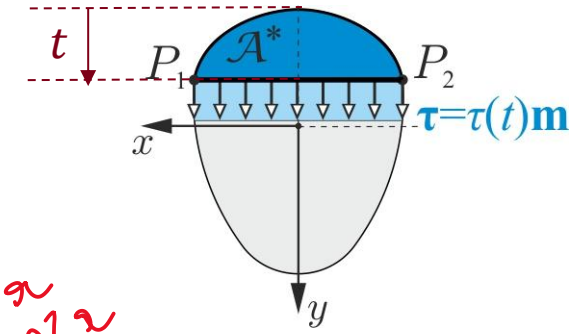
$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

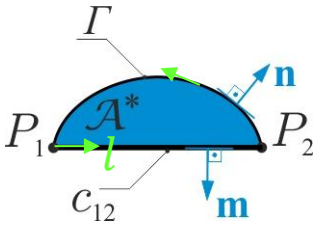
4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

$$\partial\mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$$

$\mathbf{n}^*$ $\mathbf{n}$ $\mathbf{m}$





$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

Teorema Divergenza

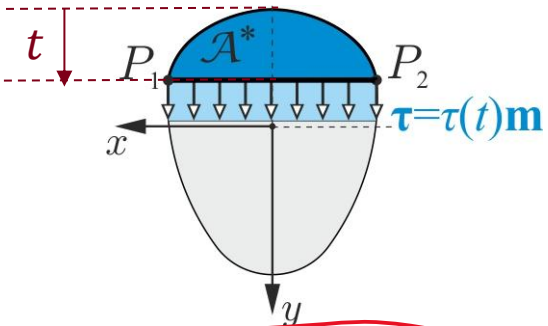
$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

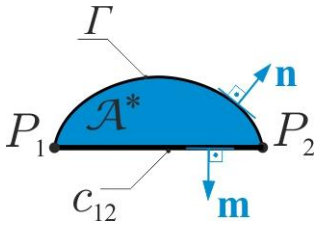
$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = \oint_{\partial\mathcal{A}*} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}^* dl \qquad \int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{c_{12}} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m}\, dl + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n}\, dl$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{c_{12}} \tau(t) dl = \tau(t)\int_{c_{12}} dl = \tau(t) mis(c_{12}) = \tau(t)\, s(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky





$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = \tau(t)\, s(t)$$

$$\tau(t)\, s(t) = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$