Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- **Definizioni, ipotesi**
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- **Cinematica del continuo 3D**
- Statica del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- **Statica del continuo 3D**
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del continuo 3D
- **Materiale costitutivo**
- Problema elastico

Lezione

3. Continuo 3D: legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi**
- **Fenomenologia e caratterizzazione sperimentale**
  - prova uniassiale
  - prova a torsione
- **Materiali elastici, lineari, isotropi: Legge di Hooke generalizzata**

3. Legame 3D: obiettivi

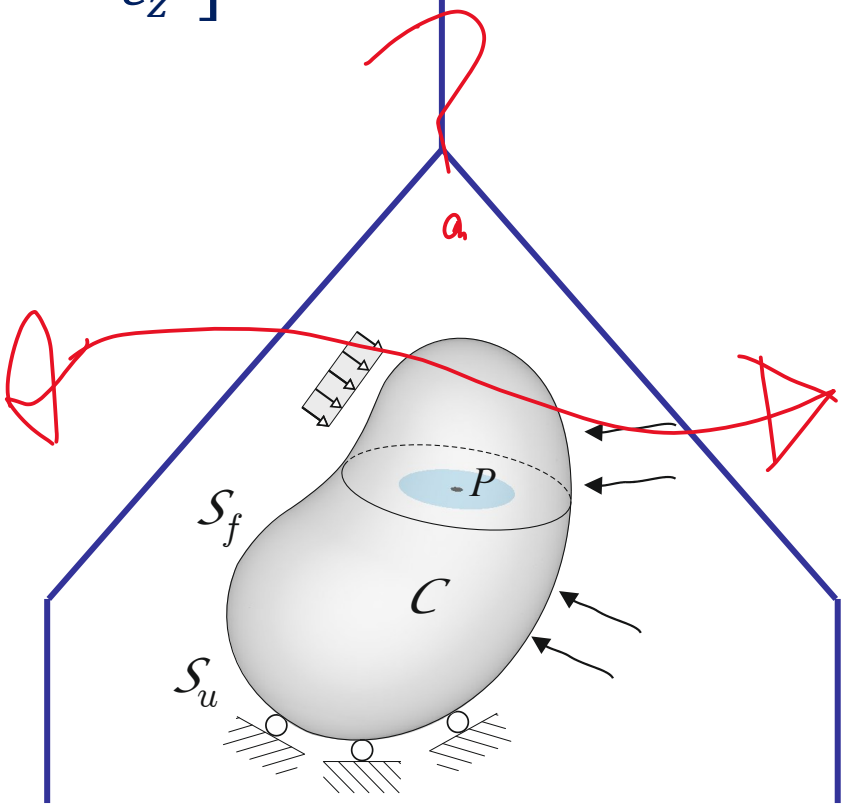
Stato deformativo in P

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ symm & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Stato tensionale in P

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ symm & \sigma_y & \tau_{zy} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

3. Legame 3D: elastico lineare

Stato deformativo in P

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Stato tensionale in P

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Comportamento elastico: *il materiale ritorna allo stato originale una volta rimossa la causa che provoca la deformazione: non rimane memoria del processo deformativo.*

Comportamento elastico lineare: *proporzionalità fra componenti di* $\boldsymbol{\varepsilon}(P)$ e $\boldsymbol{\sigma}(P)$

3. Legame 3D: elastico lineare

Stato deformativo in P

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Stato tensionale in P

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \mathbf{C}(P)\boldsymbol{\varepsilon}(P)$$

C: *Matrice di rigidezza (simmetrica) (6X6)*

$\boldsymbol{C_{ij} = C_{ji}}$***:*** *moduli elastici (21)* $[FL^{-2}]$ *da ricavare sperimentalmente*

3. Legame 3D: elastico lineare

Stato deformativo in P

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Stato tensionale in P

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{C}^{-1}(P)\boldsymbol{\sigma}(P)$$

$$\mathbf{A}(P) = \mathbf{C}^{-1}(P)$$

A: *Matrice di flessibilità (simmetrica) (6X6)*

$A_{ij} = A_{ji}$*: coeff. Flessibilità (21)* [0] *da ricavare sperimentalmente*

3. Legame 3D: Materiali isotropi e omogenei



Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: dei 21 moduli elastici* ***solo due*** *sono indipendenti.*

Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(P) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(P)$$

3. Legame 3D: materiali anisotropi

Legno (fibre naturali)



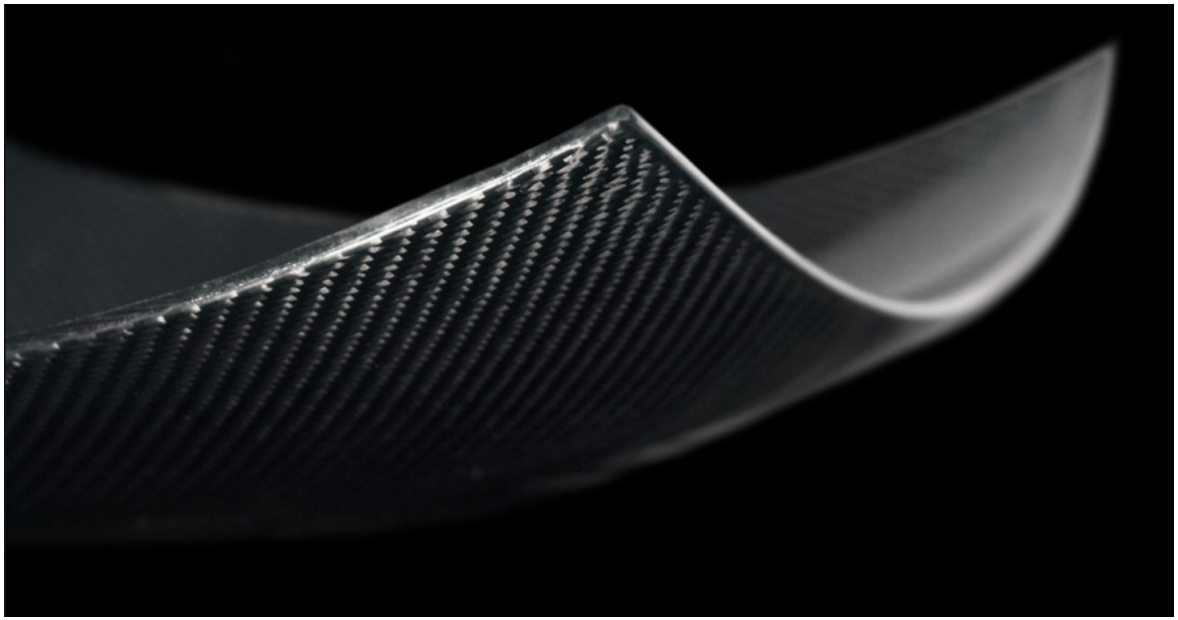


3. Legame 3D: materiali anisotropi

Compositi fibrorinforzati. Compositi in fibra di carbonio,

I compositi sono così chiamati in quanto sono costituiti da due o più materiali: ad esempio le fibre di carbonio e una matrice, in genere di resina, la cui funzione è quella di tenere in posa le fibre.

Il materiale composito in fibre di carbonio risulta non omogeneo e presenta spesso una spiccata *anisotropia*: le sue caratteristiche meccaniche presentano direzioni privilegiate.



3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Comportamento elastico: *il materiale ritorna allo stato originale una volta rimossa la causa che provoca la deformazione: non rimane memoria del processo deformativo.*

Comportamento elastico lineare: *proporzionalità fra componenti di* $\boldsymbol{\varepsilon}(P)$ e $\boldsymbol{\sigma}(P)$

Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: dei 21 moduli elastici* ***solo due*** *sono indipendenti.*

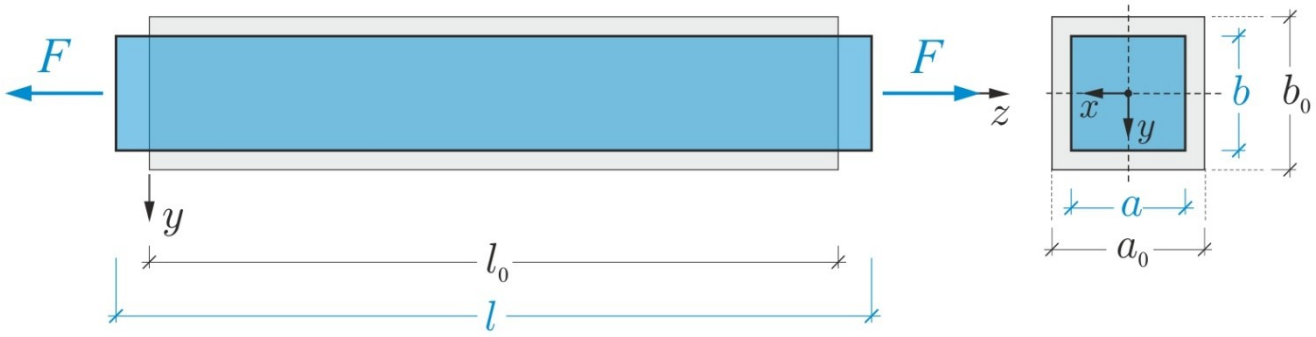
Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

$$\boldsymbol{\sigma}(P) = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}(P) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}(P)$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

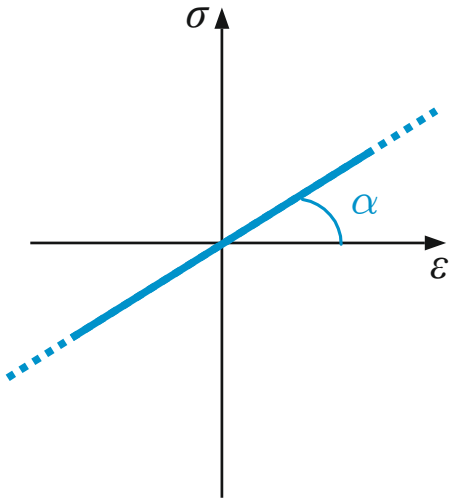
Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \qquad \sigma_z = \frac{F}{A}$$



$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \qquad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

$E = \tan\alpha \quad \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$\nu \quad \rightarrow$ Modulo di Poisson $[0]$ $\qquad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici (αὔξησις : aumento)



ν → Modulo di Poisson [0] $\quad \nu < 0$

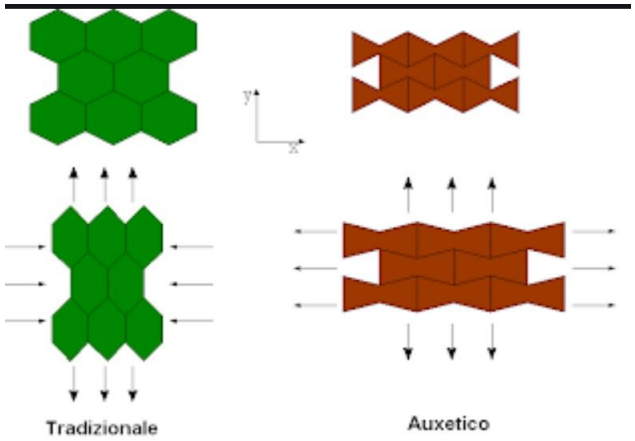
$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \qquad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

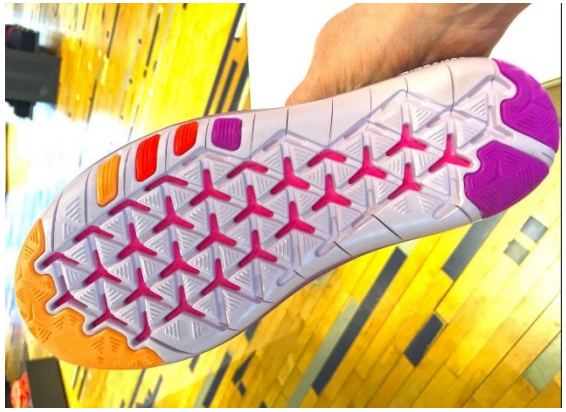
Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici (αὔξησις : aumento)

$$\nu < 0$$

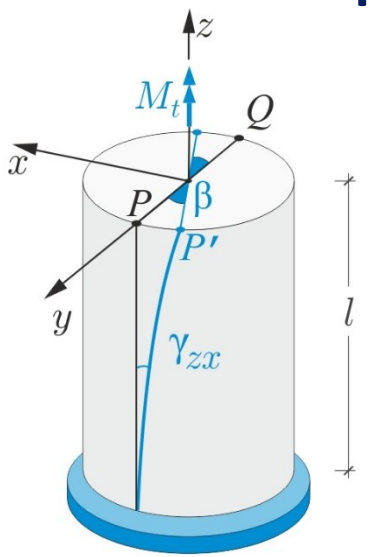


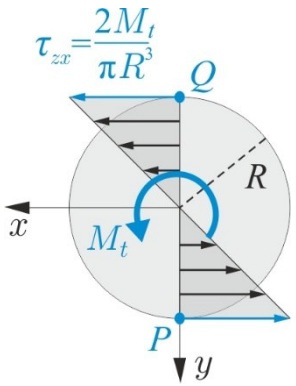


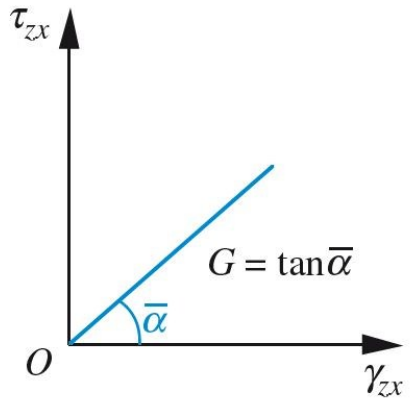


3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Schema della prova sperimentale a torsione







$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \qquad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy} \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$G = \tan\bar{\alpha}$ → Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: parametri sperimentali

Parametri sperimentali caratteristici (2 soli indipendenti)

$E = \tan\alpha \quad \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$G = \tan\bar{\alpha} \quad \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

$\nu \quad \rightarrow$ Modulo di Poisson $[0]$

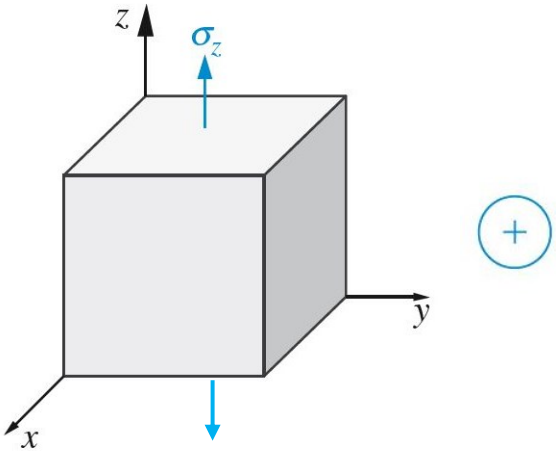
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: parametri sperimentali

Materiale	ϱ [kg/m^3]	E [GPa]	ν	α [°C^{-1}]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: legge general. di Hooke

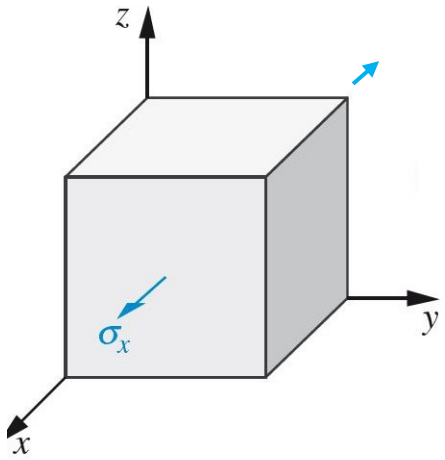
Legge generalizzata di Hooke: dilatazioni assiali



$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

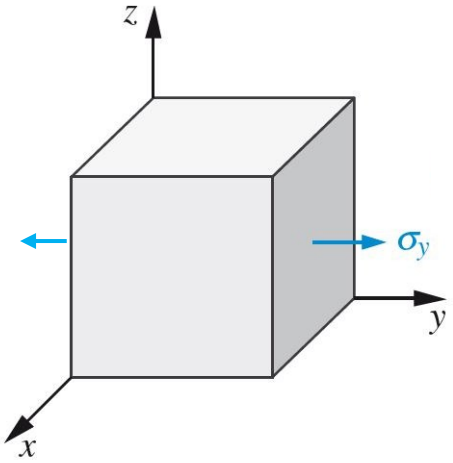
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$



$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

Forma compatta

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}(P)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

Forma compatta

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}(P)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- **Problema elastico**

3. Continuo 3D: Problema elastico

- **Obiettivi**
- **Posizione del problema**
  - Ipotesi del modello
  - Dati del problema
  - Incognite
- **Formulazione analitica**
- **Esistenza della soluzione**
- **Metodi di soluzione**

4. Problema elastico: obiettivi

Obiettivi: Assegnato un corpo continuo 3D soggetto ad azioni esterne note, determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e tensioni.



- forze esterne,
- cedimenti vincolari,

etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,

etc.

INCOGNITE

- spostamenti: $\mathbf{u}(P)$

deformazioni: $\mathbf{E}(P)$

- tensioni: $\mathbf{T}(P)$

4. Problema elastico: posizione del problema

Ipotesi del modello.

Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti': $\forall\, P \in \mathcal{C}, \quad |\mathbf{u}(P)| \ll l$

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) del corpo continuo.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*. Nel seguito, per semplicità, il materiale sarà considerato anche *isotropo* e *omogeneo* (2 soli moduli elastici indipendenti e costanti in ogni punto del solido)

4. Problema elastico: posizione del problema

Dati del problema.

Azioni esterne.

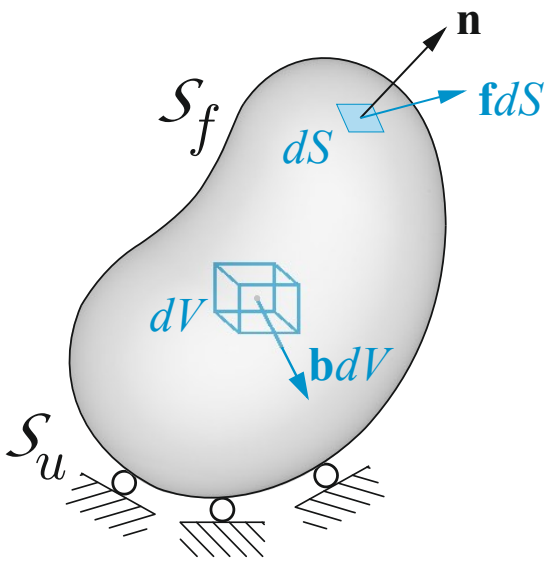
- Forze esterne distribuite di volume e di superficie: $\mathbf{b}(P)$, $\mathbf{f}(P)$

Schema statico

- Geometria del corpo continuo
- Disposizione/tipologia dei vincoli

Materiale

- Moduli elastici E, G



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema.

Incognite cinematiche

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ symm & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(P) = \begin{bmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{bmatrix}$$

9 funzioni scalari di tre variabili

Incognite statiche

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ symm & \sigma_y & \tau_{zy} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

6 funzioni scalari di tre variabili

15 funzioni scalari incognite

4. Problema elastico: formulazione analitica

Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$

Incognite statiche

$\mathbf{T}(P)$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2} \qquad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\text{Div}\,\mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \qquad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \qquad P \in S_f$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{\sigma}(P)$$

4. Problema elastico: formulazione analitica (Scalare)

Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$u(P),\ v(P), w(P)$

$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$

$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$

Incognite statiche

$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$

$\tau_{xy}(P), \tau_{yz}(P), \tau_{xz}(P)$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad +c.c$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \qquad +c.c.$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

4. Problema elastico: soluzione

Esistenza e unicità per sistemi determinati e iperstatici (Kirchhoff)

Principio di sovrapposizione degli effetti

La soluzione del problema elastico relativa ad una qualsiasi combinazione di azioni esterne agenti simultaneamente si ottiene sovrapponendo le soluzioni relative alle singole azioni esterne pensate agire separatamente

Strategie di soluzione

- ***Metodo degli spostamenti***
- ***Metodo delle forze***
- ***Metodi approssimati, soluzioni numeriche***