Facoltà di Architettura
Architettura C.U.

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

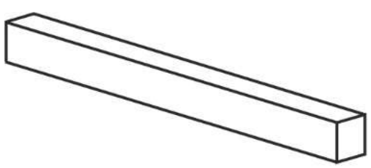
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

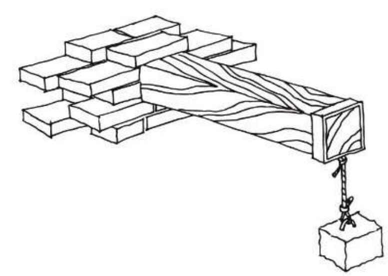
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



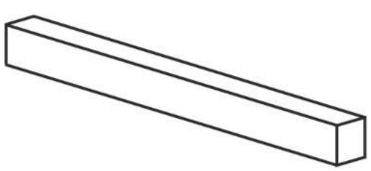
Paolo Casini, Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica. www.pcasini.it

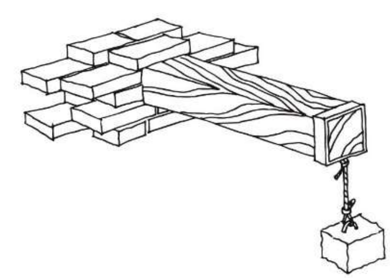
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- **<u>Cinematica della trave</u>**
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



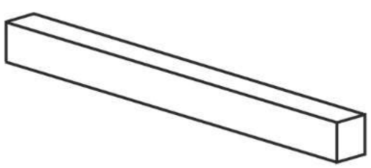



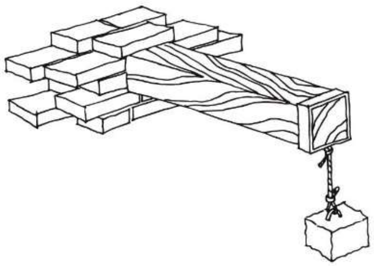
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



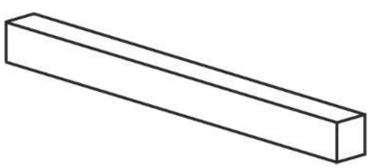



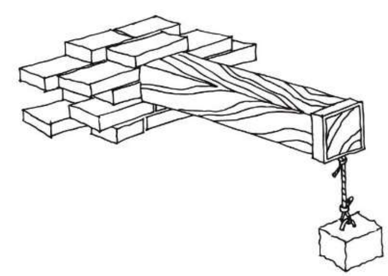
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **<u>Materiale: legame costitutivo</u>**
- Problema elastico



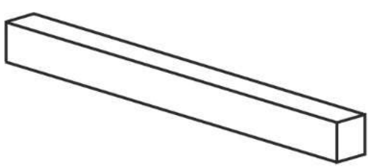



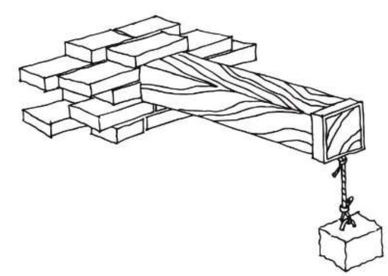
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**



Parte III - Il modello di trave elastica 1D

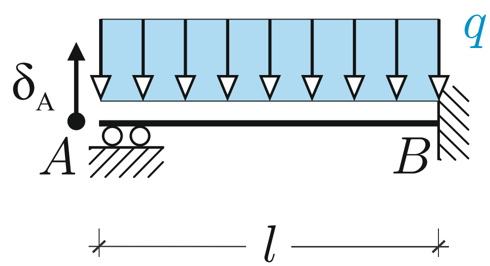
4. Il problema elastico

- **Obiettivi**
- **Posizione del problema**
  - Ipotesi del modello
  - Dati del problema
  - Incognite
- **Formulazione analitica**
- **Esistenza della soluzione**
- **Metodi di soluzione**

4. Problema elastico (elastostatico): obiettivi

Obiettivi: Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.

esempio



Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari, *etc.*

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo, *etc.*

INCOGNITE

- spostamenti, deformazioni
- forze interne, (caratteristiche della sollecitazione)

4. Problema elastico: posizione del problema

Ipotesi del modello.

Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti'. **1a:** $\forall\, z \in [0, l], \quad |\mathbf{u}(z)| \ll l$

1b: $\forall\, z \in [0, l], \quad |\boldsymbol{\theta}(z)| \ll 1\, rad$

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) della trave.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*. Nel seguito, per semplicità, il materiale sarà considerato anche *omogeneo* (moduli elastici costanti in ogni punto della trave)

4. Problema elastico: posizione del problema

Dati del problema (problema piano)

Azioni esterne

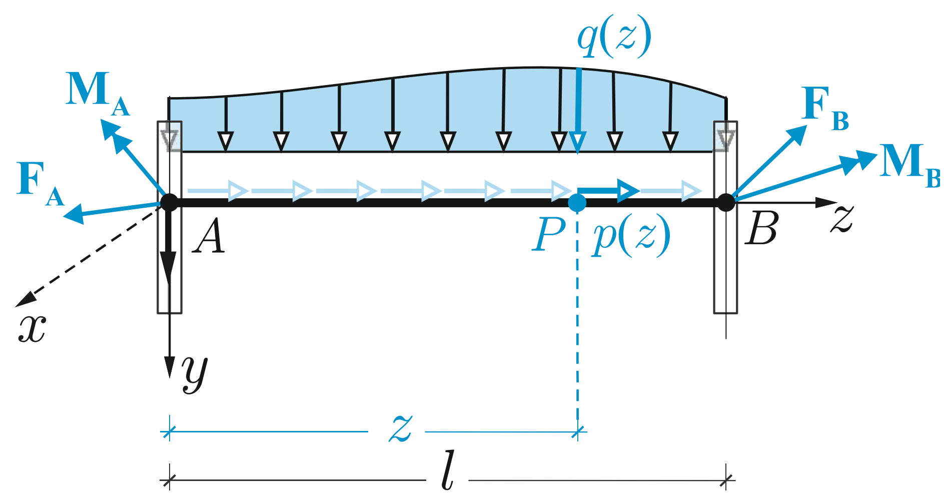
- Forze esterne attive distribuite $\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j}$
- Forze e coppie esterne concentrate alle estremità
- Spostamenti imposti, cedimenti vincolari
- Variazioni di temperatura
- Ecc.

Schema statico

- Geometria della linea d'asse e della sezione (baricentro, area, momenti d'inerzia)
- Disposizione/tipologia dei vincoli

Materiale

- Moduli elastici E, G

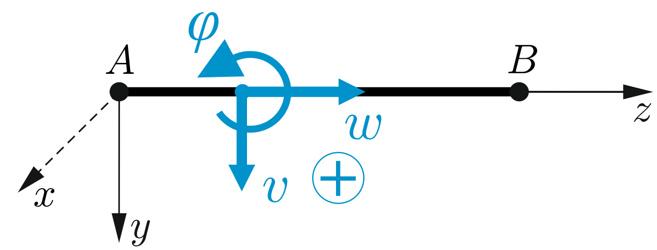


4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

Cinematica

$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni



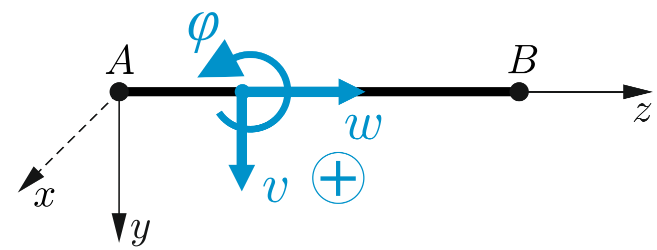
4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

Cinematica

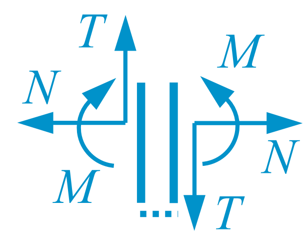
$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z) \quad \gamma(z) \quad \chi(z)$ → Misure di deformazione



Statica

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$ → CdS



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

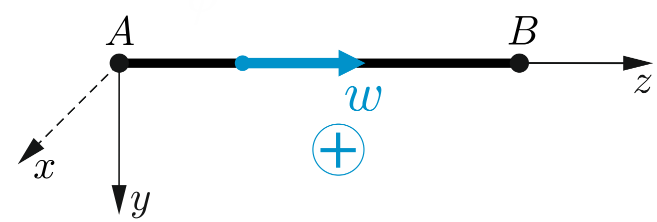
4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

Cinematica

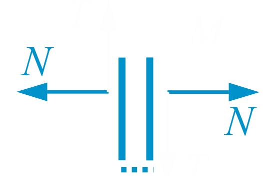
$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione



Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



Problema assiale

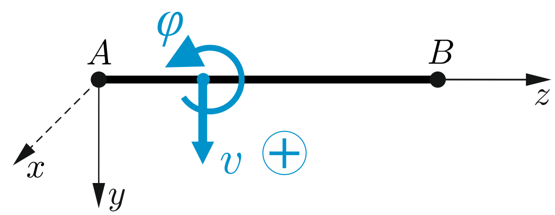
4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

Cinematica

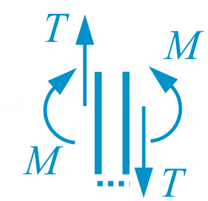
$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione



Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



Problema flessionale

4. Problema elastico: formulazione analitica

Equazioni risolventi

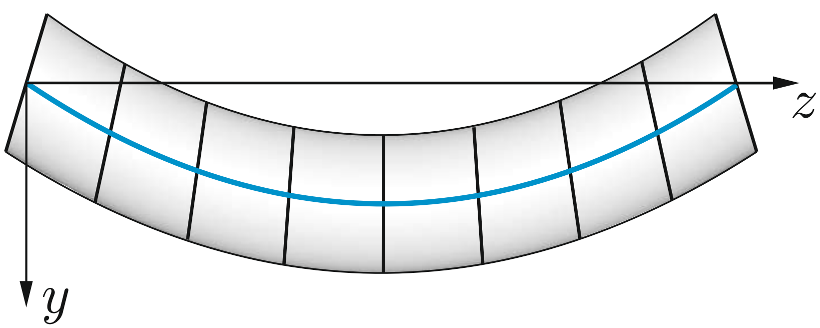
Incognite cinematiche

$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \gamma(z) \quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$



$\gamma(z) \neq 0$

Modello di Timoshenko

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t\,\gamma(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} \quad (Hooke)$$

4. Problema elastico: formulazione analitica

Problema assiale

Incognite cinematiche

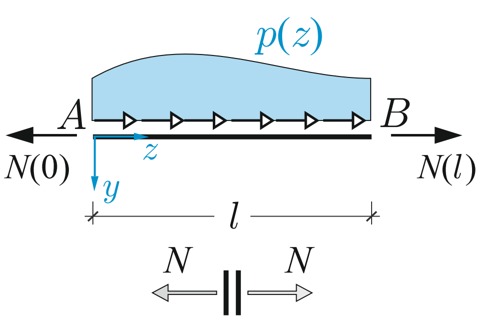
$w(z)$ $\quad v(z)$ $\quad \varphi(z)$

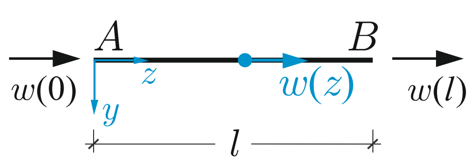
$\varepsilon(z)$ $\quad \gamma(z)$ $\quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z)$ $\quad T(z)$ $\quad M(z)$

Problema assiale





Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t\,\gamma(z) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} \quad (Hooke)$$

4. Problema elastico: formulazione analitica

Problema flessionale

Incognite cinematiche

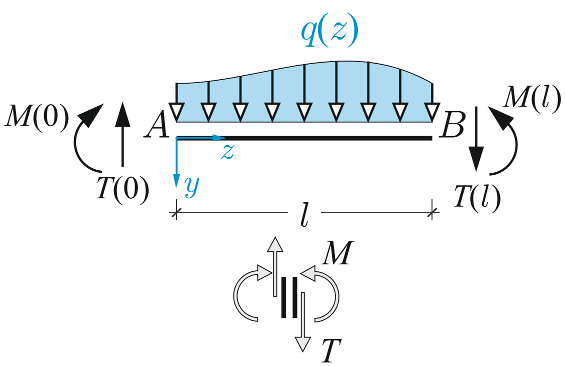
$w(z)$ $\quad v(z)$ $\quad \varphi(z)$

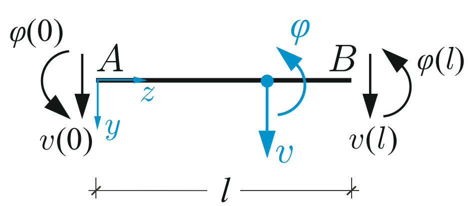
$\varepsilon(z)$ $\quad \gamma(z)$ $\quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z)$ $\quad T(z)$ $\quad M(z)$

Problema flessionale (Timoshenko)





Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t\,\gamma(z) \qquad (Hooke) \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases}$$

4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

$$\boxed{\gamma(z) = 0, GA_t \to \infty}$$

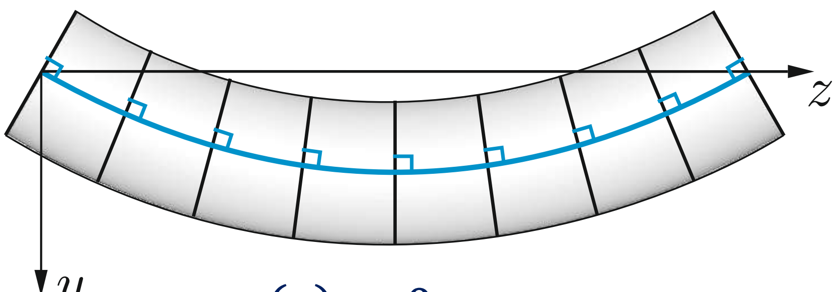
Incognite cinematiche

$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \cancel{\gamma(z)} \quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$



$\gamma(z) = 0$

Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \cancel{\gamma(z)} = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\,\varepsilon(z) \\ T\cancel{(z) = GA_t\,\gamma(z)} \\ M(z) = EI\,\chi(z) \end{cases} \quad (Hooke)$$

4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

$$\boxed{\gamma(z) = 0, GA_t \to \infty}$$

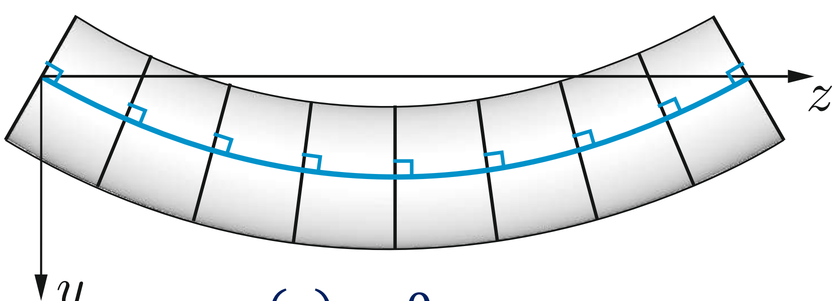
Incognite cinematiche

$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$

$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$

Incognite statiche

$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$



$\gamma(z) = 0$

Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} \quad + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA\ \varepsilon(z) \\ M(z) = EI\ \chi(z) \end{cases} (Hooke)$$

4. Problema elastico: soluzione

Esistenza e unicità per sistemi determinati e iperstatici (Kirchhoff)

Principio di sovrapposizione degli effetti

La soluzione del problema elastico relativa ad una qualsiasi combinazione di azioni esterne agenti simultaneamente si ottiene sovrapponendo le soluzioni relative alle singole azioni esterne pensate agire separatamente

Metodi di soluzione

- ***Metodo degli spostamenti***
- *Metodo delle forze*

Dualità statico-cinematica

- ***Identità dei Lavori Virtuali: Teorema dei Lavori Virtuali***