

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

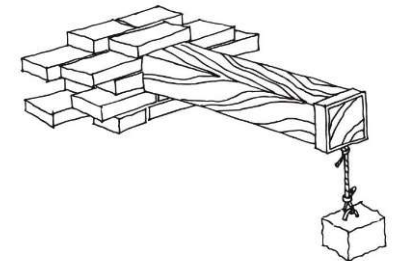
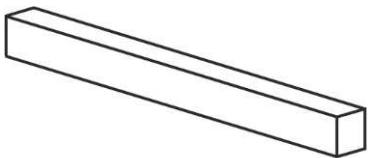




Lezione

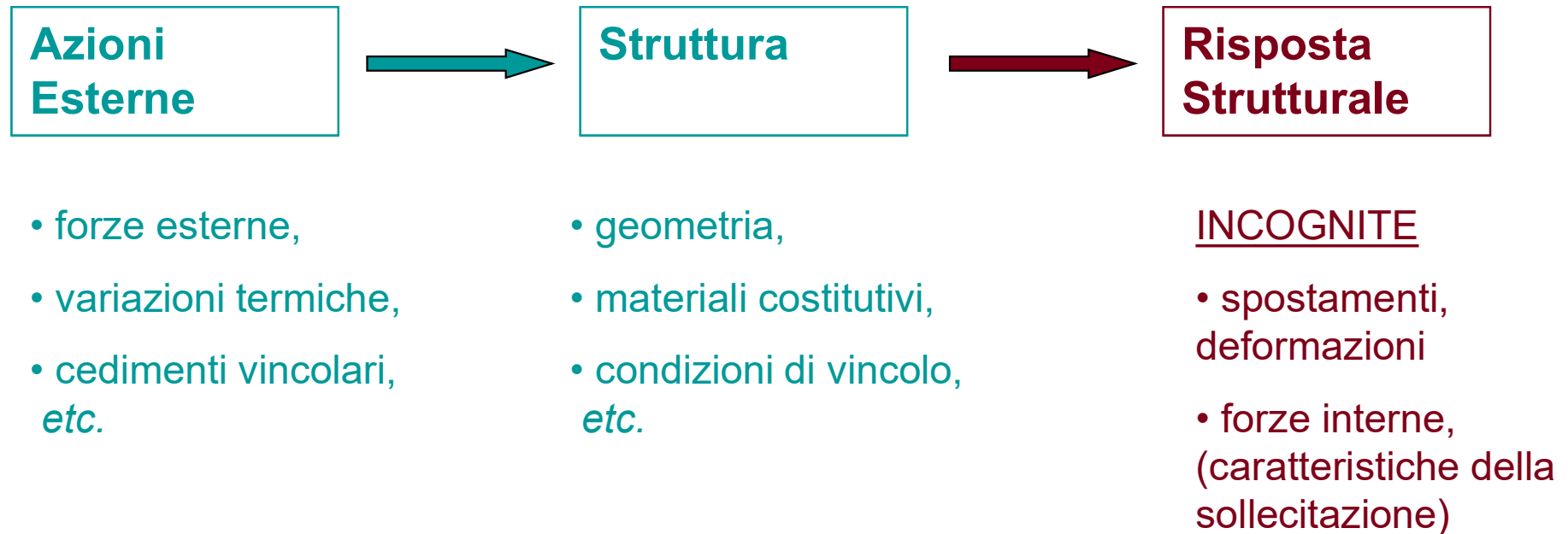
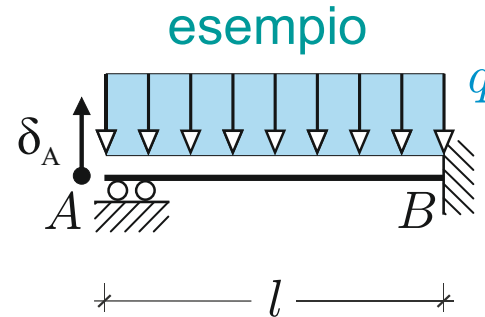
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**



4. Problema elastico (elastostatico)

Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.

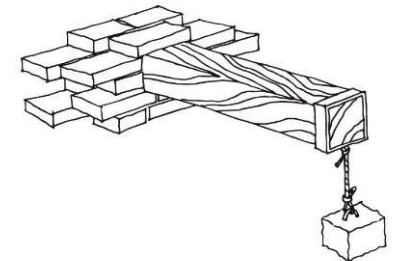
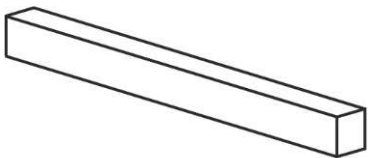




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
 - Metodo degli spostamenti
 - Metodo delle Forze

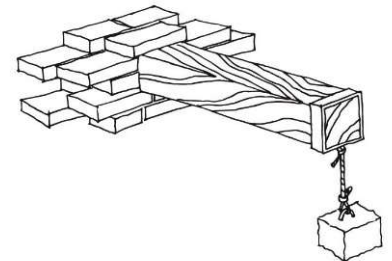
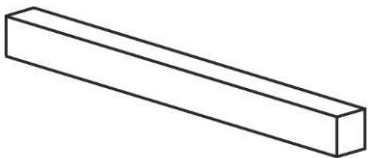




Lezione

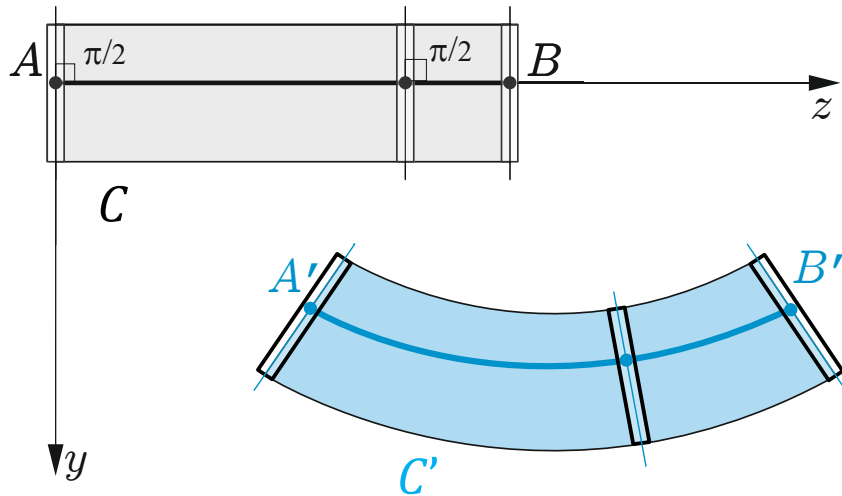
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- **Cinematica della trave: riepilogo**
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di una trave 1D o di un sistema di travi

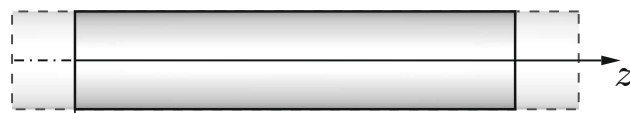


C : configurazione iniziale Trasporto f
 C' : configurazione finale $f: C \rightarrow C'$

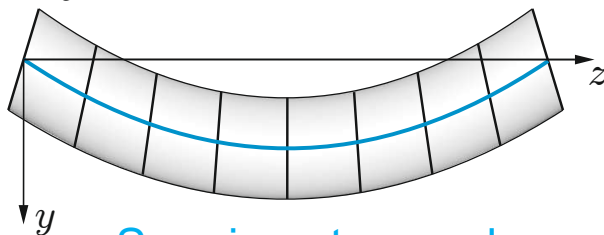
Ipotesi 0.

Le sezioni si modellano come corpi rigidi piani

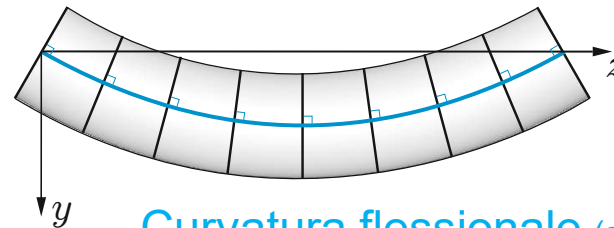
Obiettivo 2. Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione manifestati dalla trave nel passaggio da C a C'



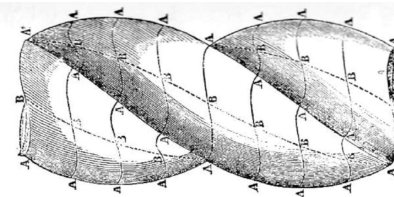
Dilatazione assiale



Scorrimento angolare



Curvatura flessionale (senza scorrimento angolare)



Torsione

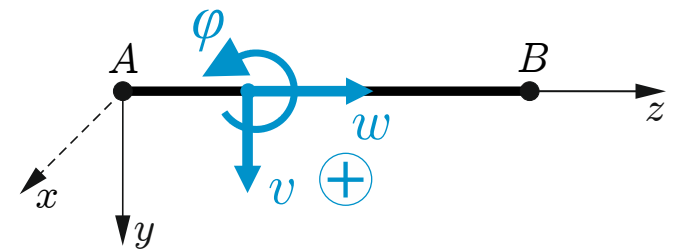
• RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

Misure di deformazione (piano zy): grandezze atte a misurare i cambiamenti di forma e/o di dimensione della trave a livello locale (generico concio di trave o sezione)

- Deformazione assiale $\varepsilon(z)$ [0]
- Scorrimento angolare $\gamma(z)$ [0]
- Curvatura flessionale $\chi(z)$ [L^{-1}]

Equazioni implicite di congruenza (piano zy): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

$$\text{Forma scalare} \begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

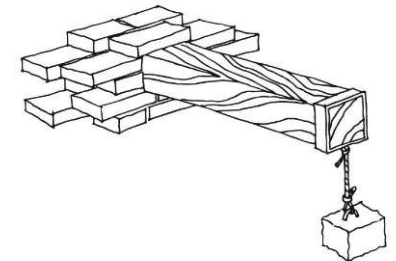
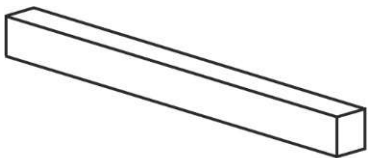




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

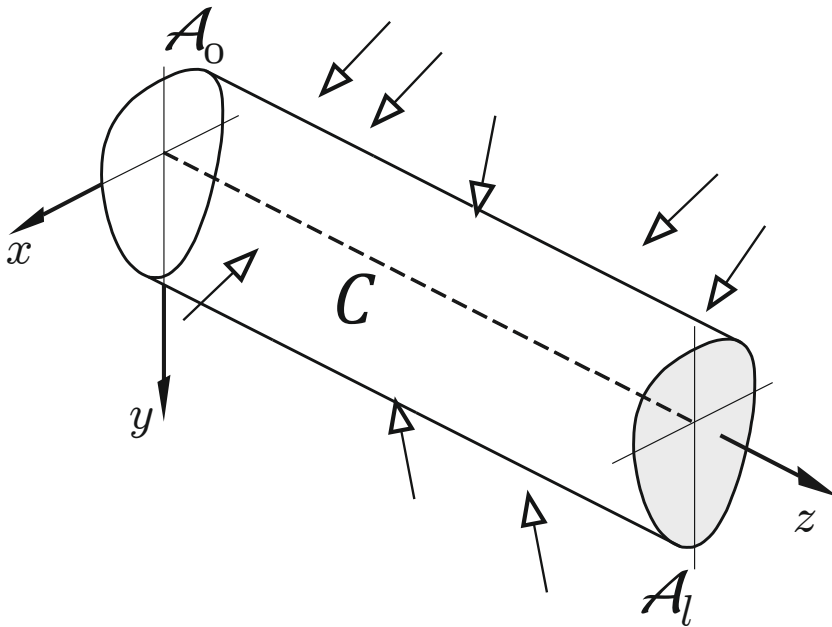
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave: riepilogo**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



- RIEPILOGO STATICA TRAVE

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle forze esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*



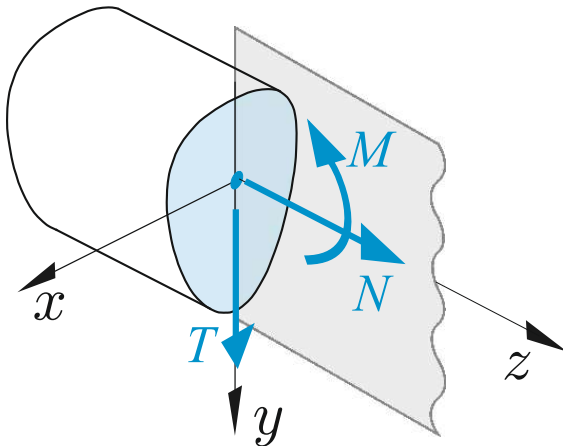
- RIEPILOGO STATICA TRAVE

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

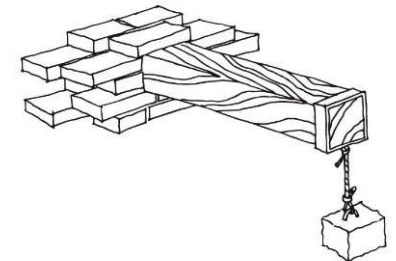
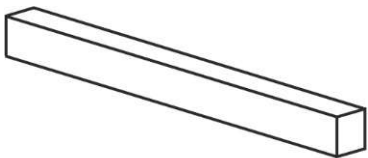
(obiettivo 2)



Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo - riepilogo**
- Problema elastico





- **RIEPILOGO LEGAME COSTITUTIVO TRAVE**
Ipotesi: materiale elastico lineare isotropo e omogeneo

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

G → Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

Caratteristiche della sezione retta

A → Area [L^2]

A_t → Area di taglio [L^2]

$I = I_x$ → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x [L^4]

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Rigidezze della trave

EA → Rigidezza assiale [F]

GA_t → Rigidezza di taglio [F]

EI → Rigidezza flessionale [FL^2]

$EA \rightarrow \infty$ Trave inestensibile elasticamente

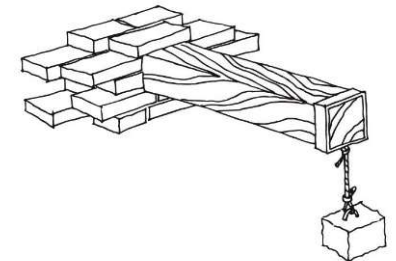
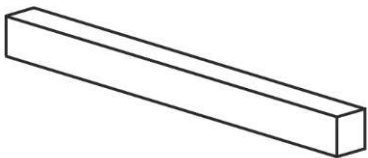
$GA_t \rightarrow \infty$ Trave indeformabile a taglio
(Eulero-Bernouilli)



Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
 - Metodo degli spostamenti
 - Metodo delle Forze

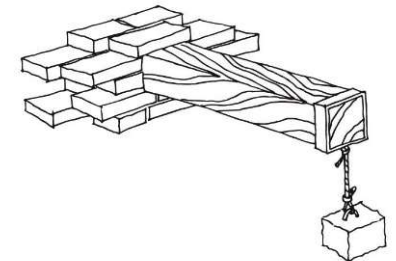
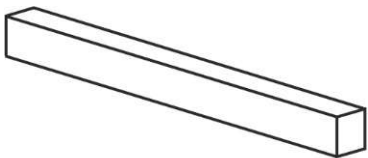




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
 - Metodo degli spostamenti
 - Metodo delle Forze





Parte III - Il modello di trave elastica 1D

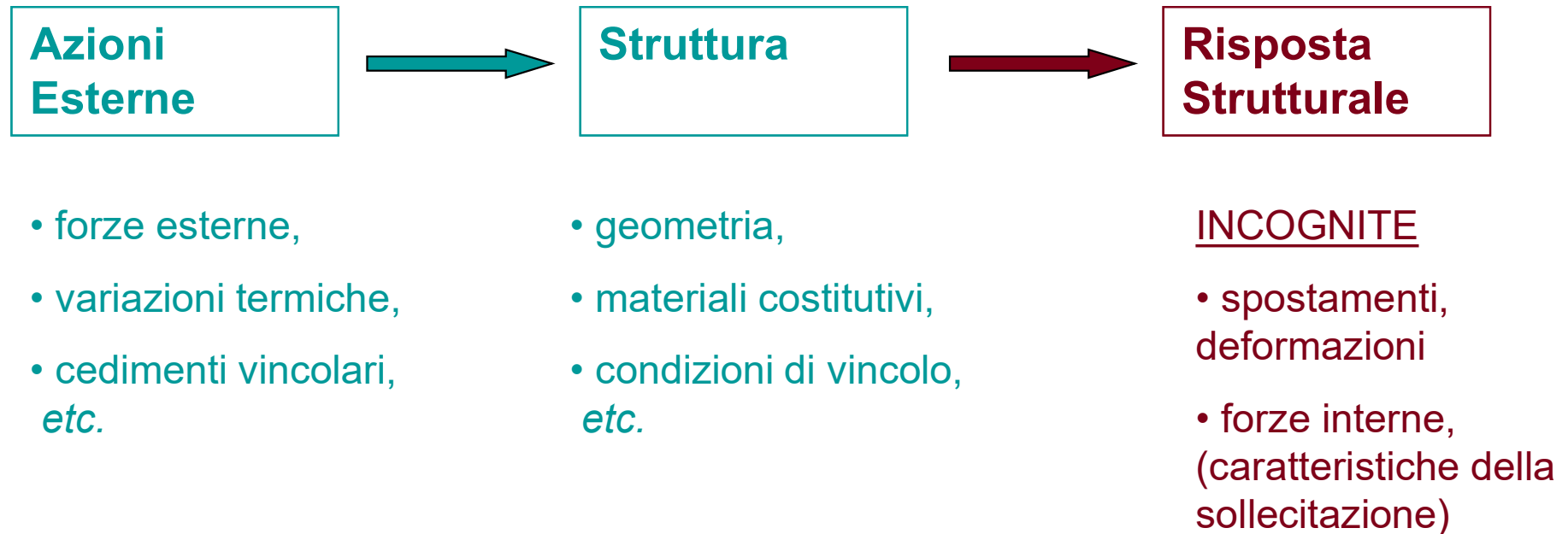
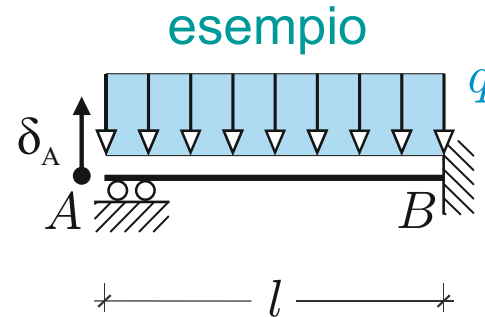
Lezione

5. Metodo degli spostamenti (linea elastica)

- **Obiettivi**
- **Equazioni della linea elastica**
 - Problema assiale
 - Problema flessionale
 - Condizioni al contorno
- **Esercizi** (sito: E14; testo §9.4-9.6)

4. Problema elastico (elastostatico)

Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.





5. Metodo degli spostamenti (Eulero-Bernoulli)

$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

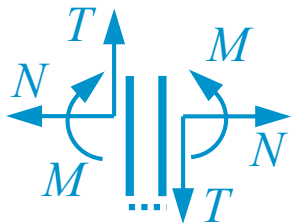
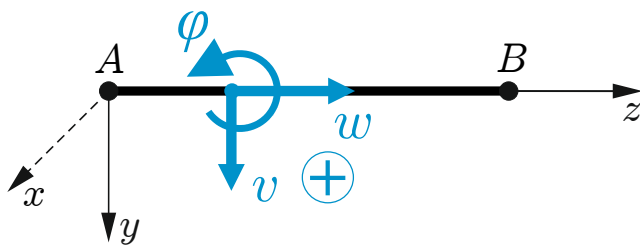
Incognite cinematiche

$$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: obiettivi

Obiettivi: risolvere il problema elastico assumendo come *incognite primarie* gli **spostamenti** dei punti della linea d'asse della trave. Noti gli spostamenti, si determinano successivamente le altre incognite del problema.

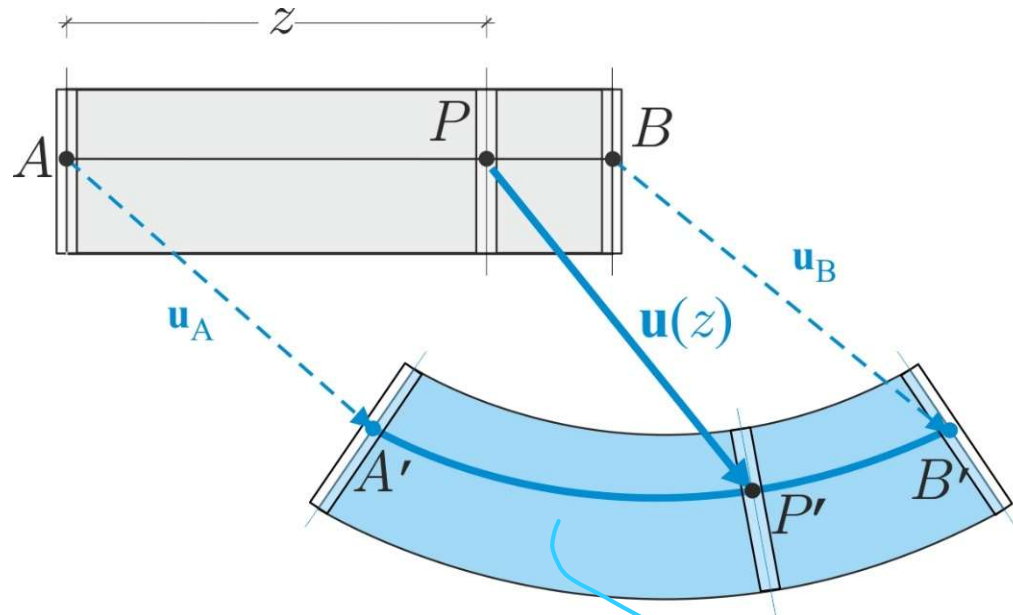
Incognite primarie:
spostamenti w e u

$$w(z) \quad v(z)$$

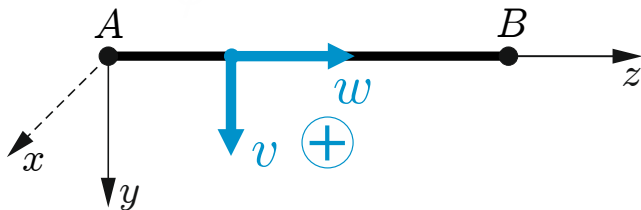
$$\varphi(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Linea elastica
(assetto della linea d'asse
nella configurazione C')





5. Metodo degli spostamenti (Eulero-Bernoulli)

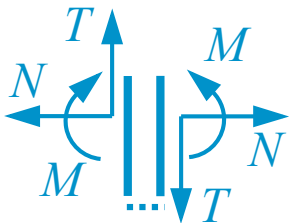
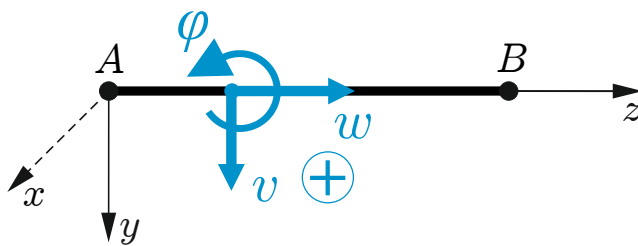
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

5. Metodo degli spostamenti

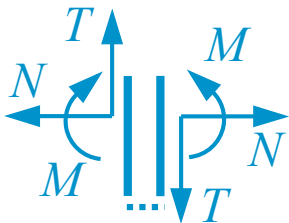
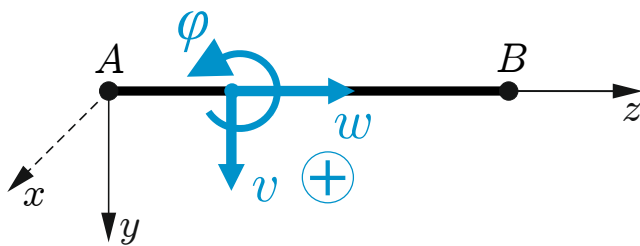
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche

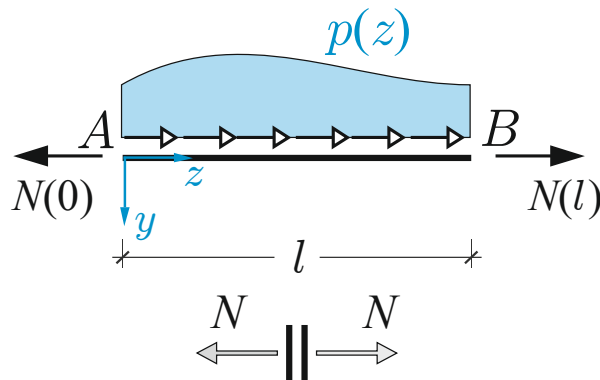
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

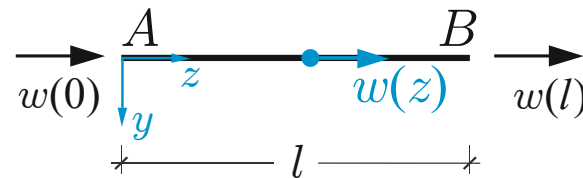
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

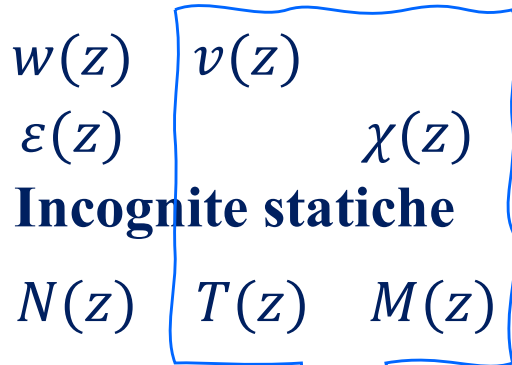
Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

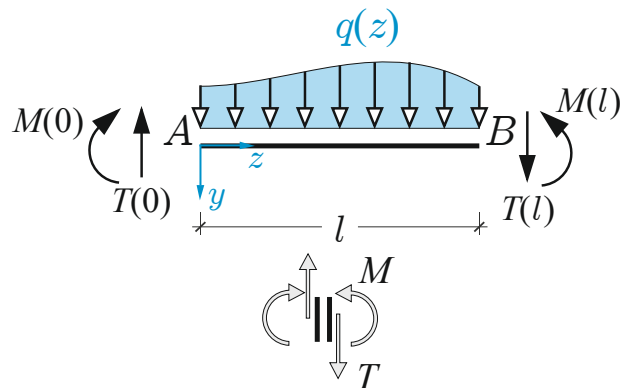


5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche



Problema flessionale (Eulero-Bernouilli)



Cinematica: equazioni di congruenza

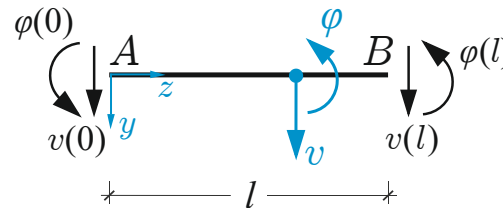
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$





5. Metodo degli spostamenti

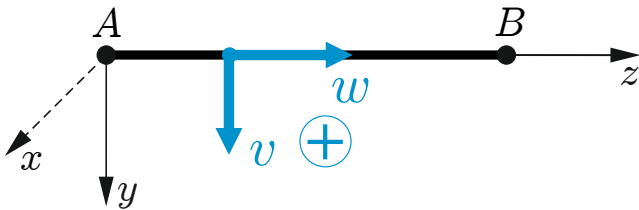
Incognite primarie:
spostamenti w e v

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



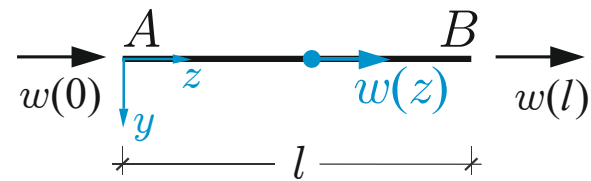
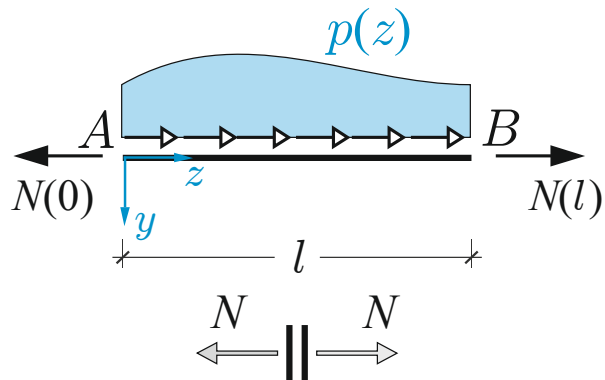
5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

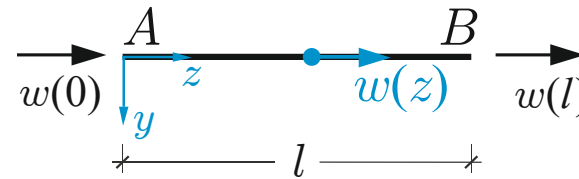
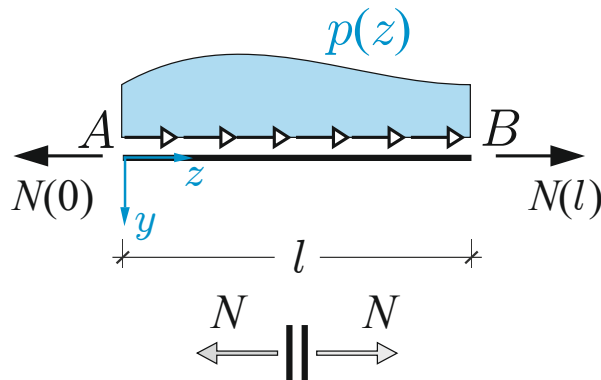
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA \varepsilon(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

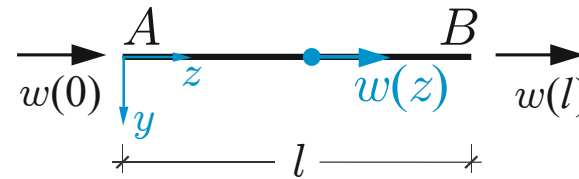
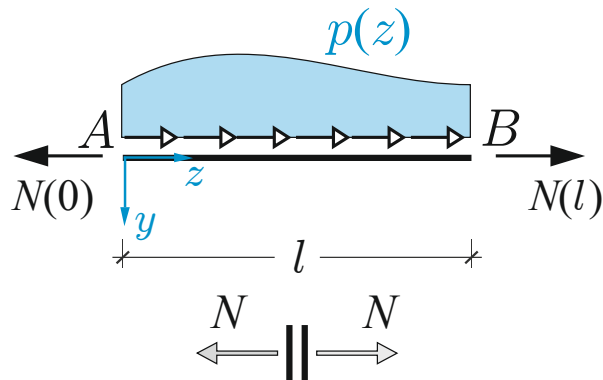
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA \varepsilon(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

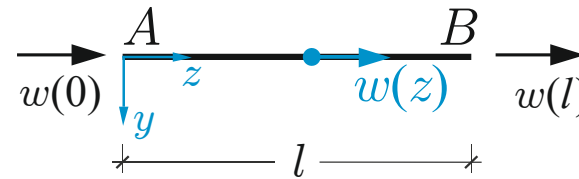
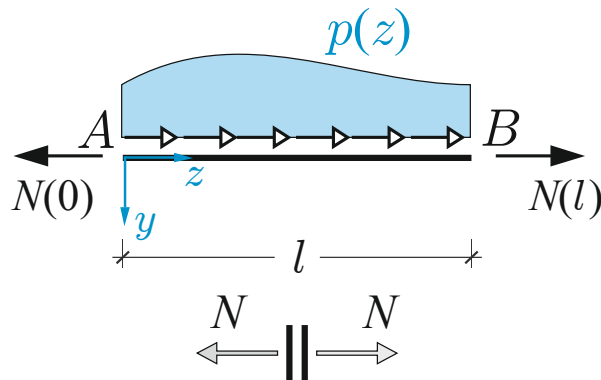
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA w'(z)$$



$$N(z) = EA w'(z)$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

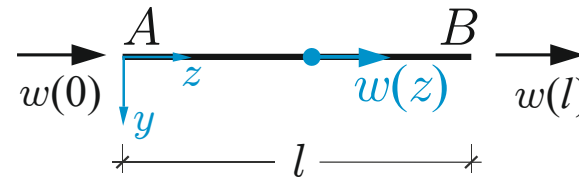
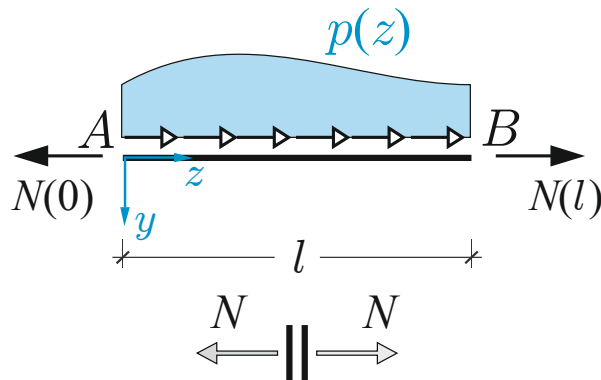
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA w'(z)$$



$$N(z) = EA w'(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

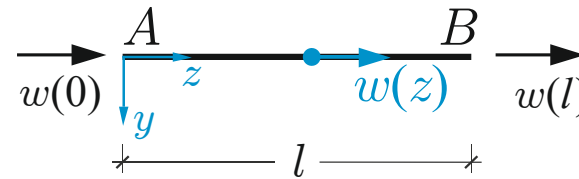
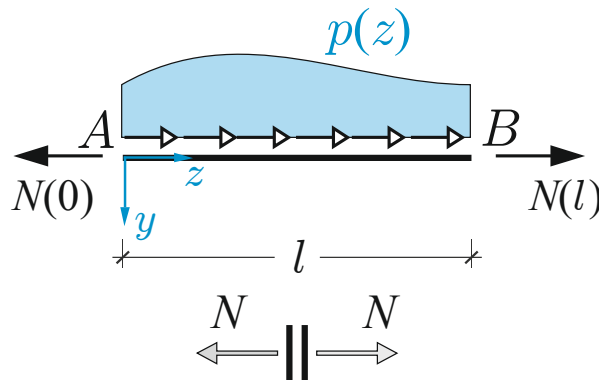
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$(EAw'(z))' + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA w'(z)$$



$$N(z) = EA w'(z)$$

→

$$(EAw'(z))' + p(z) = 0 + c.c$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

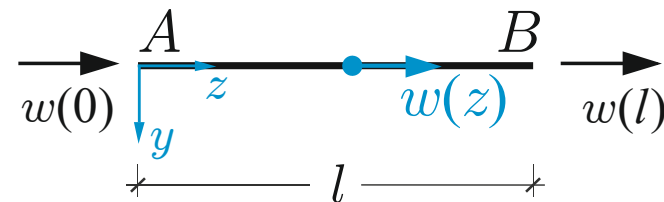
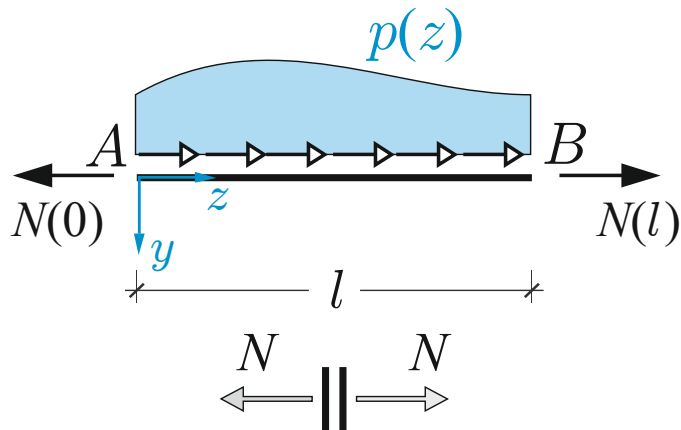
$$N(z)$$

Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

$$N(z) = EA w'(z)$$





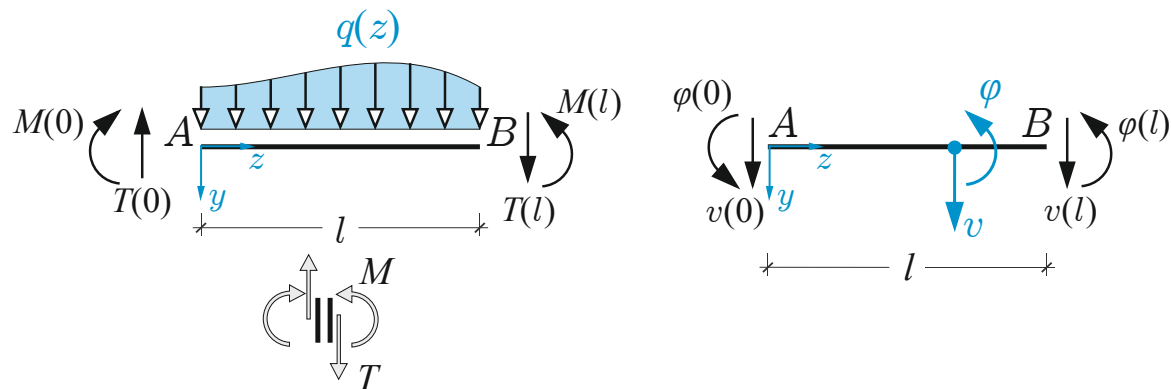
5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

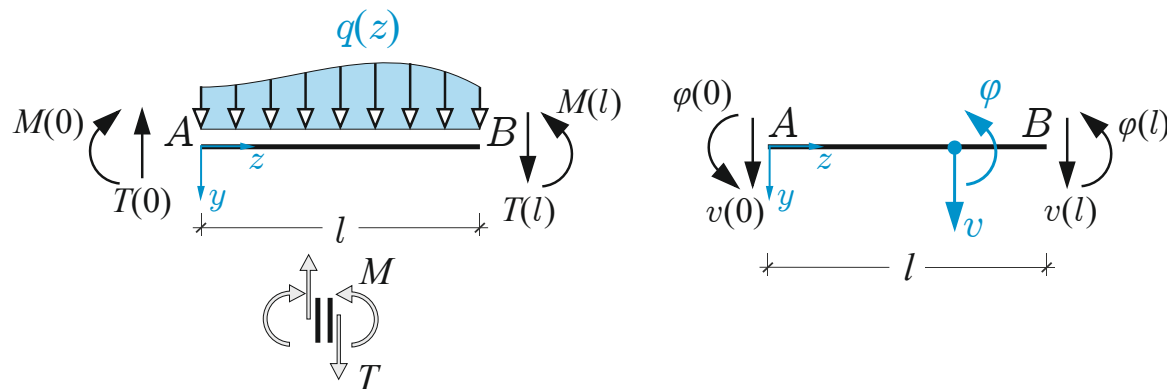
$$\chi(z) = -v''(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI \chi(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

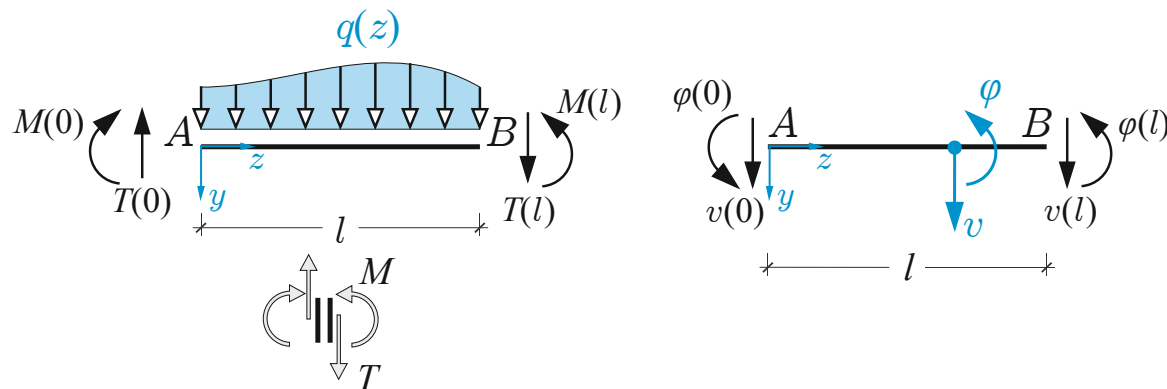
$$\chi(z) = -v''(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI \chi(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

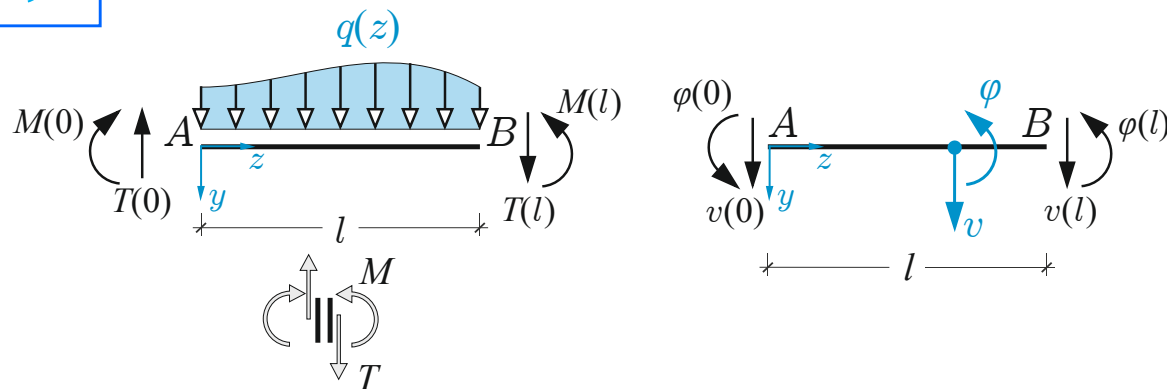
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

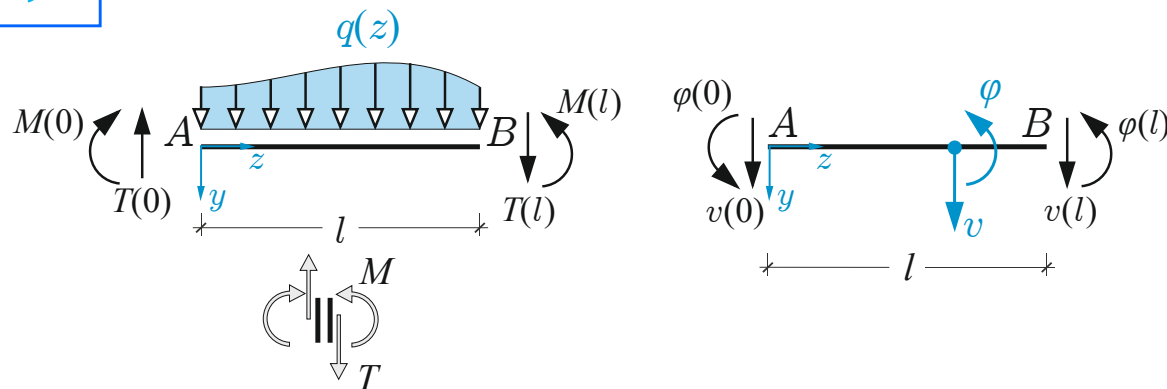
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} \quad \text{(deriviamo primo e secondo membro rispetto a } z \text{)}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

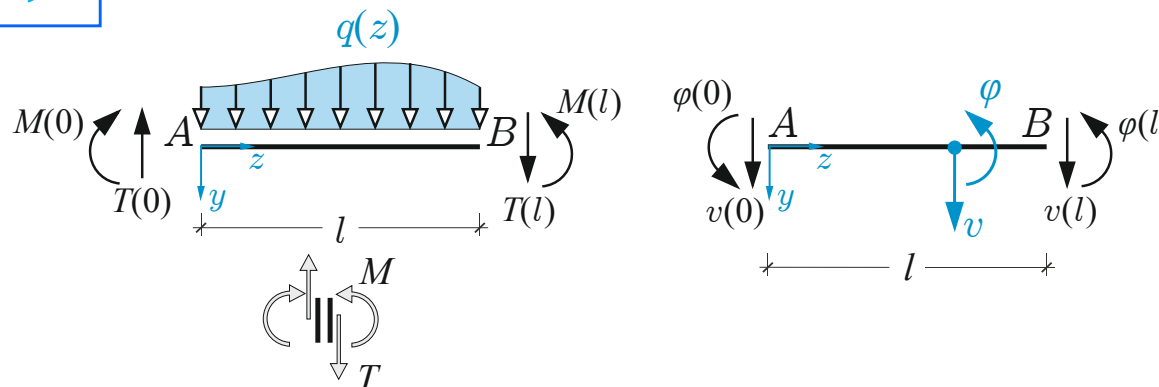
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) = -q(z) \\ M''(z) - T'(z) = 0 \end{cases} \quad (\text{sostuiamo } T' = -q)$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

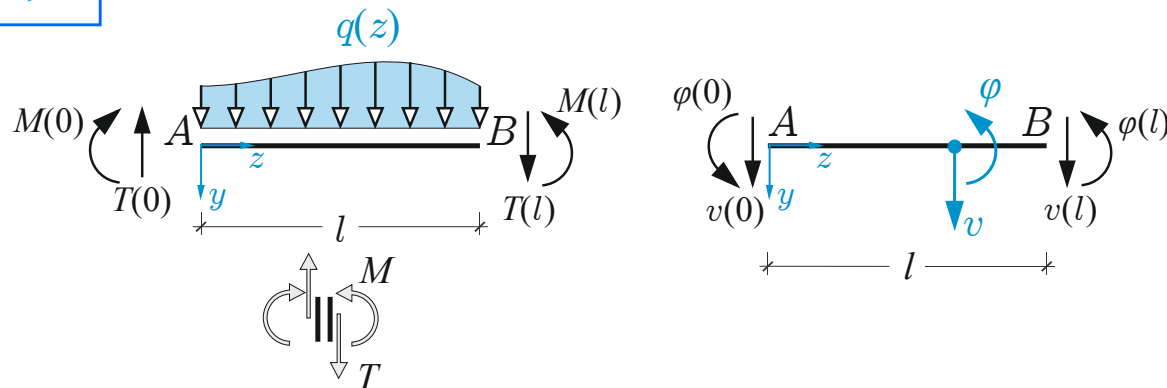
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) = -q(z) \\ M''(z) - (-q(z)) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

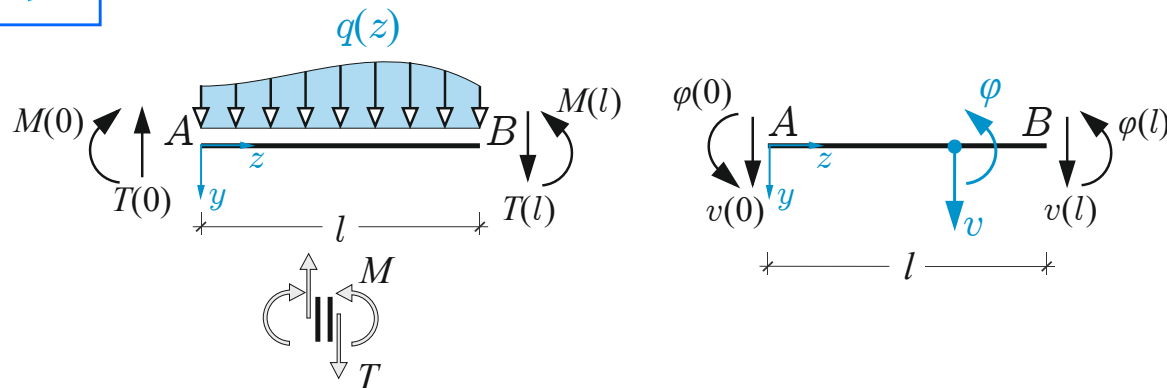
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) = -q(z) \\ M''(z) + q(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

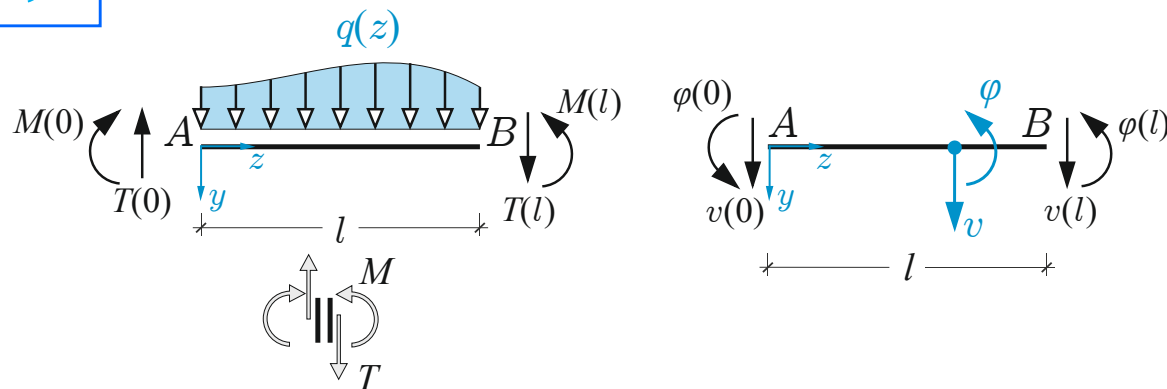
Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) = -q(z) \\ M''(z) + q(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

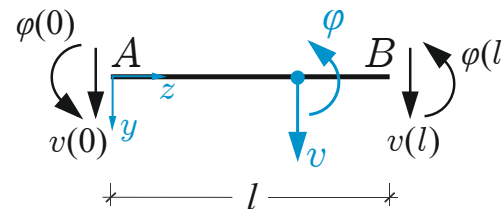
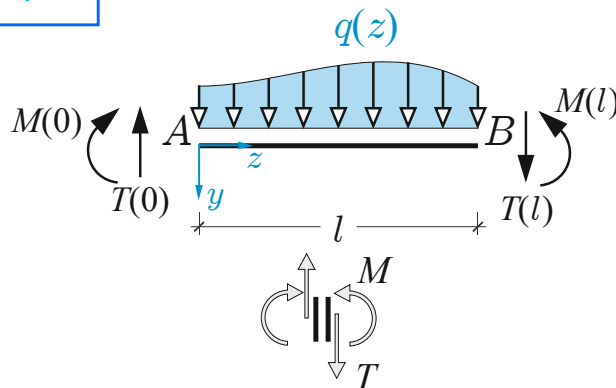
$$\begin{cases} T'(z) = -q(z) \\ -(EIv''(z))'' + q(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$M(z) = -EIv''(z)$$

$$-(EIv''(z))'' + q(z) = 0$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Equazione della linea elastica

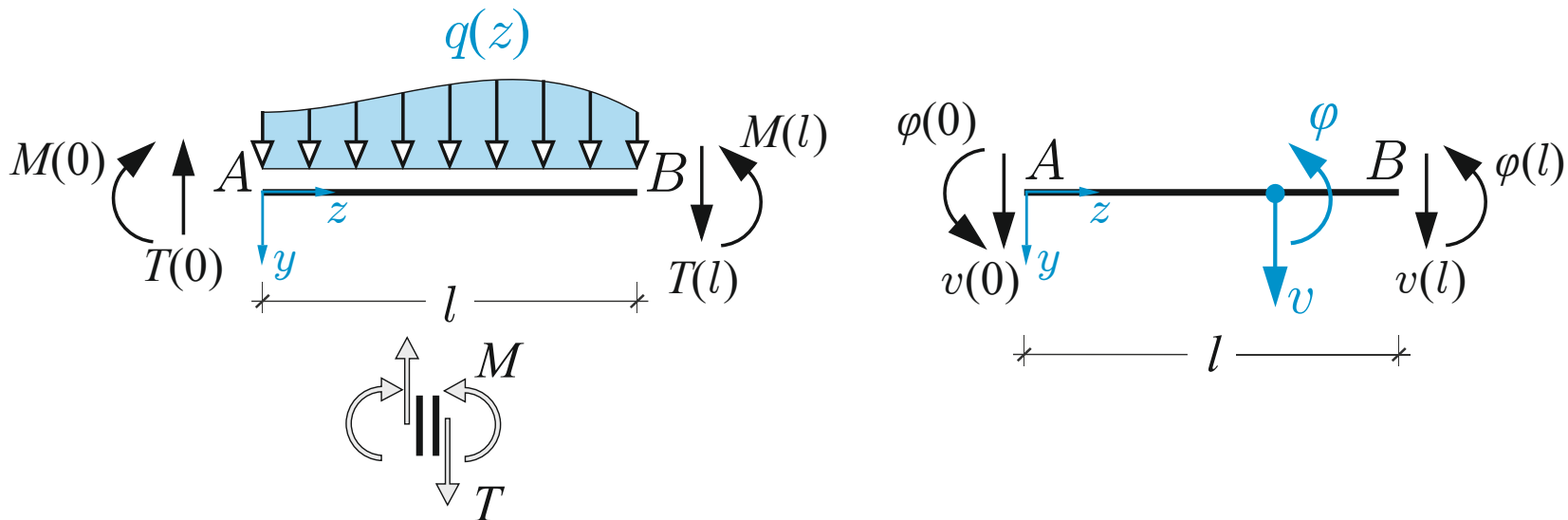
$$EI v''''(z) = q(z) + c.c$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\chi(z) = -v''(z)$$

$$T(z) = M'(z) = -EI v''''(z)$$

$$M(z) = -EI v'''(z)$$





5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ M(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 + c.c \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''(z) = q(z) + c.c \quad (2)$$

NB1 Le equazioni precedenti sono valide per *un'unica trave* con vincoli alle estremità, eventuali forze distribuite variabili con continuità, eventuali forze o coppie concentrate applicate solo alle estremità.

Lo studio si estende immediatamente *ai sistemi di travi* anche in presenza di discontinuità lungo la linea d'asse.

NB2 I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati nelle equazioni, ma potrebbero essere accoppiati nelle condizioni al contorno (ad es. in presenza di un carrello o un glifo il cui asse forma un angolo diverso da 0 o da $\frac{\pi}{2}$ con l'asse della trave)



5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ M(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 + c.c \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''''(z) = q(z) + c.c \quad (2)$$

NB3 Si è fatta l'ipotesi di materiale omogeneo e sezione costante: EA , EI uniformi

NB4 Poiché l'Eq. (1) è un'equaz. diff. lineare del secondo ordine in $w(z)$ si devono utilizzare c.c. di ordine non superiore al primo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti w o le forze normali alle estremità $EA w'$

NB5 Poiché l'Eq. (2) è un'equaz. diff. lineare del quarto ordine in $v(z)$ si devono utilizzare c.c. di ordine non superiore al terzo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti v le rotazioni $-v'$, o le forze di taglio $-EI v'''$ e i momenti flettenti $-EI v''$ alle estremità.