Facoltà di Architettura
Architettura C.U.

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

Azioni Esterne

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,

etc.

Struttura

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,

etc.

Risposta Strutturale

INCOGNITE

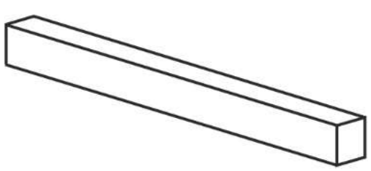
- spostamenti, deformazioni
- forze interne, tensioni

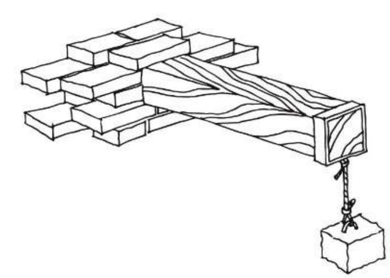
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



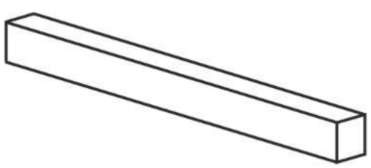
Lezione

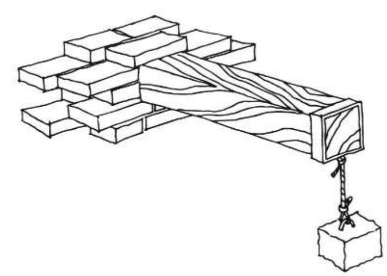
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**

- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



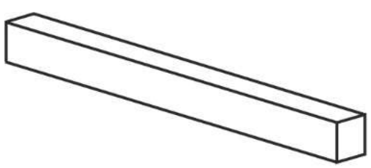
Lezione

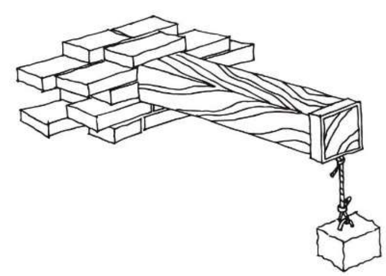
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- <u>**Cinematica della trave**</u>
- Statica della trave
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali

- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



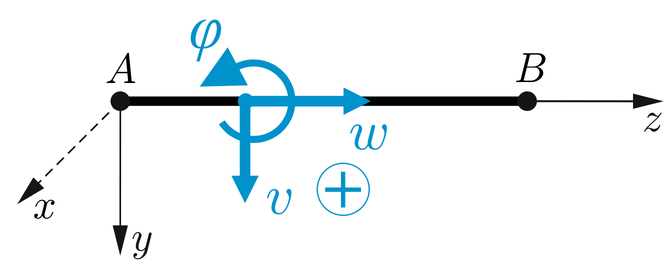
• RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

Misure di deformazione (piano *zy*): grandezze atte a misurare i cambiamenti di forma e/o di dimensione della trave a livello locale (generico concio di trave o sezione)

- Deformazione assiale $\varepsilon(z)$ $[0]$
- Scorrimento angolare $\gamma(z)$ $[0]$
- Curvatura flessionale $\chi(z)$ $[L^{-1}]$

Equazioni implicite di congruenza (piano *zy*): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

Forma scalare $\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$



$\boxed{\text{Sistema cinematicamente congruente}}$

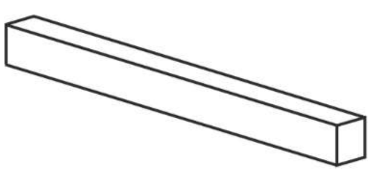
Lezione

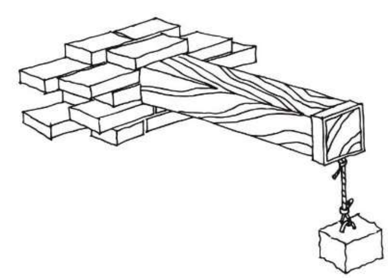
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- **<u>Statica della trave</u>**
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali

- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



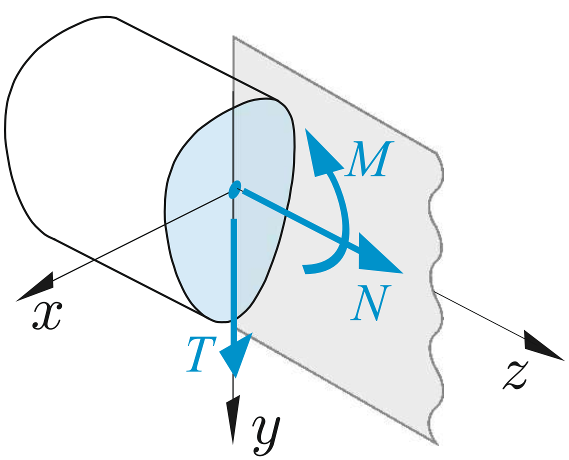



• RIEPILOGO STATICA TRAVE

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$ $\rightarrow$ *Risultante delle forze interne* $[F]$
$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

$N(z),\ \ T(z),\ \ M(z)$ $\rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione* (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

(obiettivo 2)

Sistema staticamente equilibrato

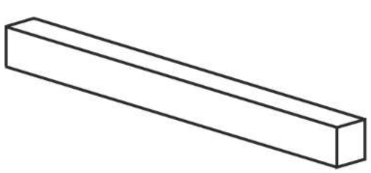
Lezione

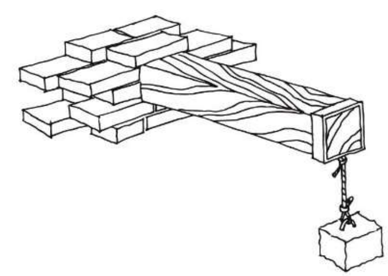
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**

- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Parte III - Il modello di trave elastica 1D

Identità dei Lavori Virtuali

- **Obiettivi**
- **La grandezza fisica *lavoro*: definizioni**
- **Il *lavoro virtuale*:**
  - Lavoro Virtuale Esterno: definizione e interpretazione
  - Lavoro Virtuale Interno: definizione e interpretazione
- **Identità dei Lavori Virtuali: teorema dei LV**
  - Modello di trave rigida
  - Modello di trave deformabile
- **Applicazioni**
  - calcolo di spostamenti in strutture determinate
- **Esercizi** (sito: E15; testo §10.5-10.6)

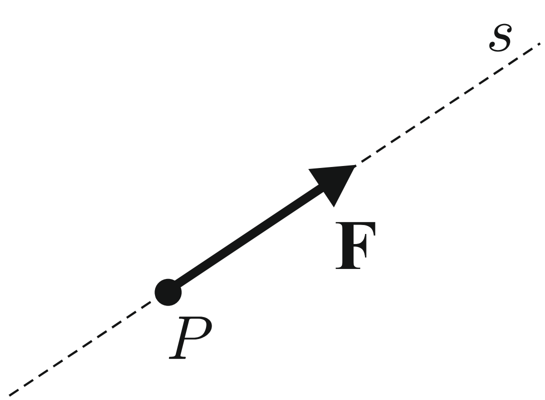
Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Grandezza fisica 'Forza'

Unità di misura. L'unità di misura della forza nel S.I. è il Newton (*N*), definito come:

$$1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Tenendo conto del secondo principio della dinamica, possiamo quindi affermare che una forza di 1 *N* imprime ad un corpo con la massa di 1 *kg* l'accelerazione di 1 m/s^2.



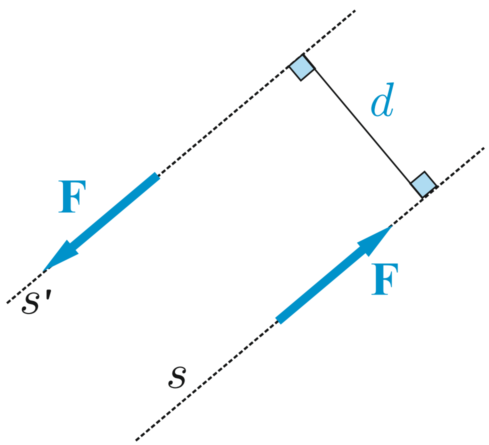
s: retta d'azione
P: punto di applicazione
$|\mathbf{F}|, F$: modulo o intensità $[F]$

Dimensioni fisiche $[F]$, unità di misura N

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Coppia di forze

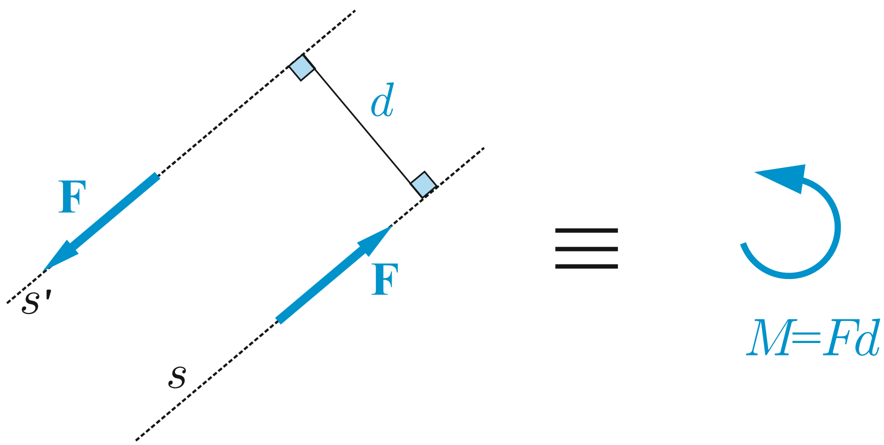
Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2$*) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi:* $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$*.*
il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



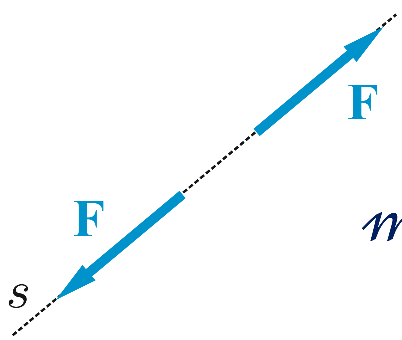
Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) *che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi:* $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$.
il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



$$m = M_O = Fd$$



$$m = 0$$

$$m = +Fd$$

$$m = -Fd$$

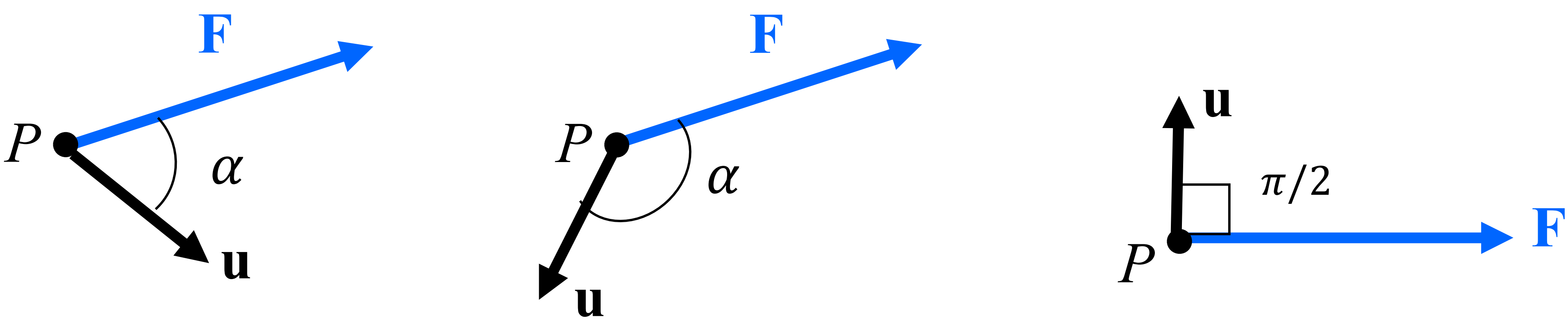
Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Grandezza fisica ‘Lavoro’: lavoro di una forza sullo spostamento

Definizione. Si consideri una forza **F** applicata in un punto P; se il punto P compie uno spostamento **u**, si definisce ***lavoro*** della forza **F** sullo spostamento **u** il prodotto scalare dei due vettori **F** e **u**

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}} \qquad \mathcal{L} = |\mathbf{F}||\mathbf{u}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- il lavoro è positivo se l’angolo convesso α è acuto, negativo se è ottuso;
- il lavoro è nullo se **F** e **u** sono perpendicolari o se uno dei due vettori è nullo;
- se **F** e **u** sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi o discordi.



$\mathcal{L} > 0$ $\qquad$ $\mathcal{L} < 0$ $\qquad$ $\mathcal{L} = 0$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Grandezza fisica 'Lavoro': lavoro di una coppia sulla rotazione

Definizione. Si consideri una coppia $\mathbf{m}$ applicata su un corpo rigido; se il corpo compie una rotazione rigida di rappresentata dal vettore $\boldsymbol{\theta}$, si definisce ***lavoro*** della coppia $\mathbf{m}$ sulla rotazione $\boldsymbol{\theta}$ il prodotto scalare dei due vettori $\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\theta}$

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}} \qquad \mathcal{L} = |\mathbf{m}||\boldsymbol{\theta}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche: $[\mathcal{L}] = [FL]$;
- se $\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\theta}$ sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione entrambe orarie o entrambe antiorarie) o discordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione una orario e l'altra antioraria).

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

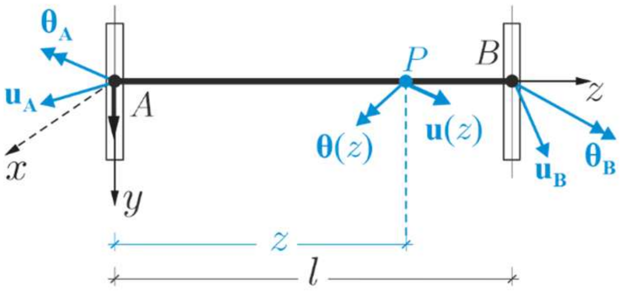
Grandezza fisica 'Lavoro': lavoro di un sistema di forze

Definizione. Si consideri una trave o un sistema di travi in cui siano assegnate *n* forze applicate in altrettanti punti della linea d'asse e *r* coppie applicate in altrettante sezioni rigide; se il sistema si sposta o si deforma si definisce lavoro del sistema di forze e coppie sul campo di spostamenti la seguente grandezza:

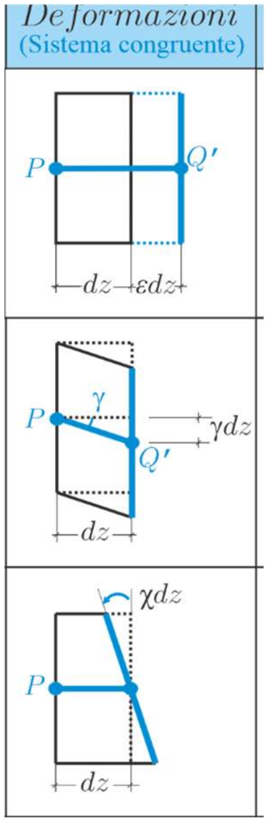
$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{r} \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\theta}_j$$

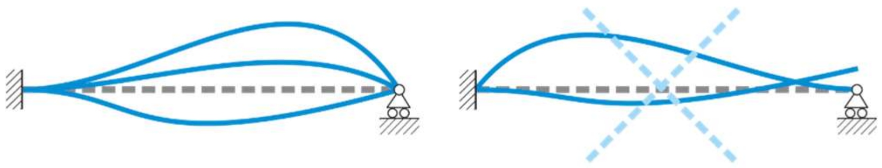
Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Spostamenti e deformazioni in un sistema congruente



Sistema Congruente



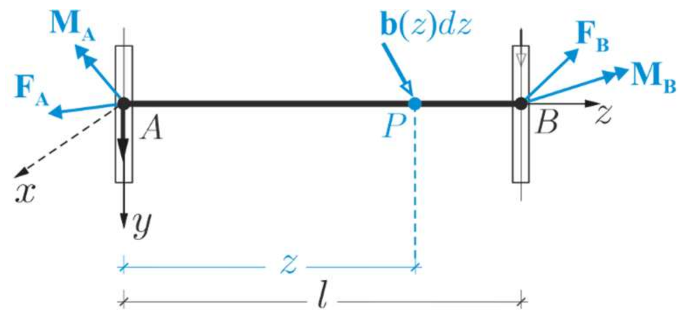


Sistemi congruenti   Sistemi **non** congruenti

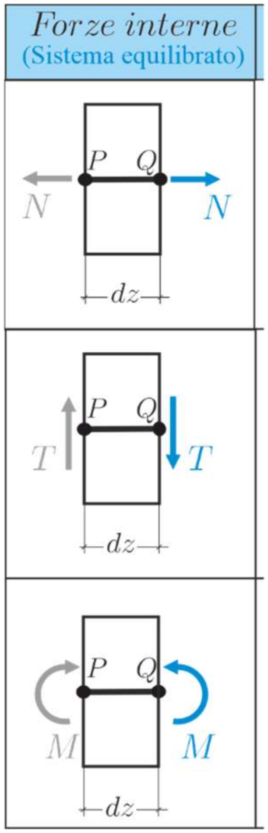
$$
\begin{cases}
\varepsilon(z) = w'(z) \\
\gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\
\chi(z) = \varphi'(z)
\end{cases}
+ c.c.
$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Forze esterne e forze interne in un sistema equilibrato



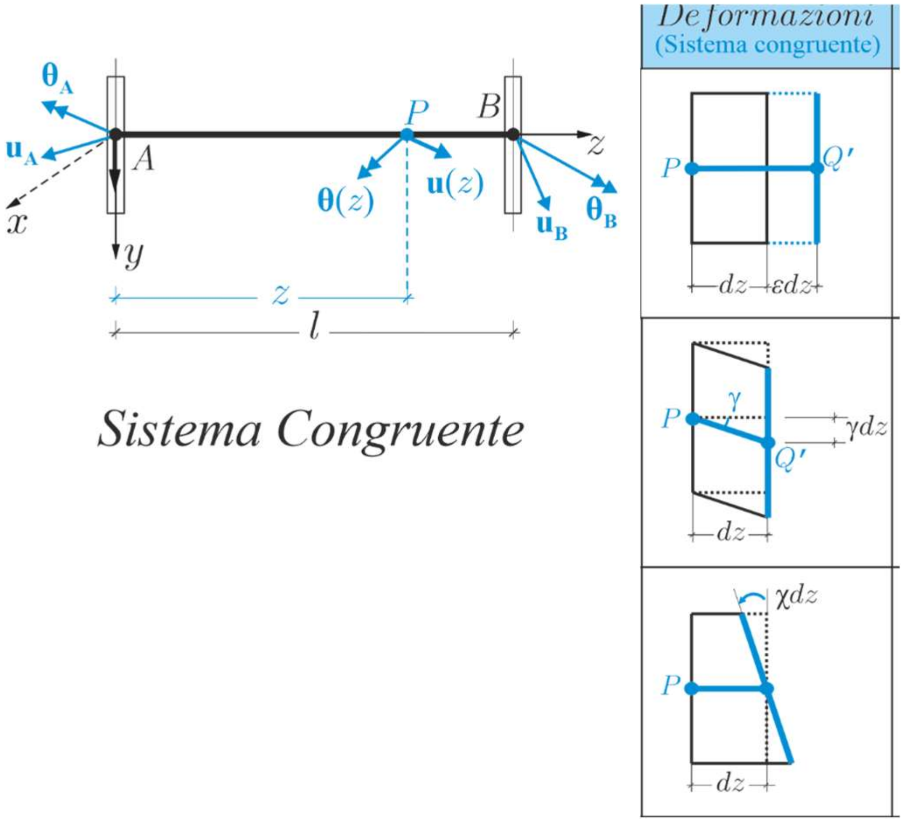
Sistema Equilibrato

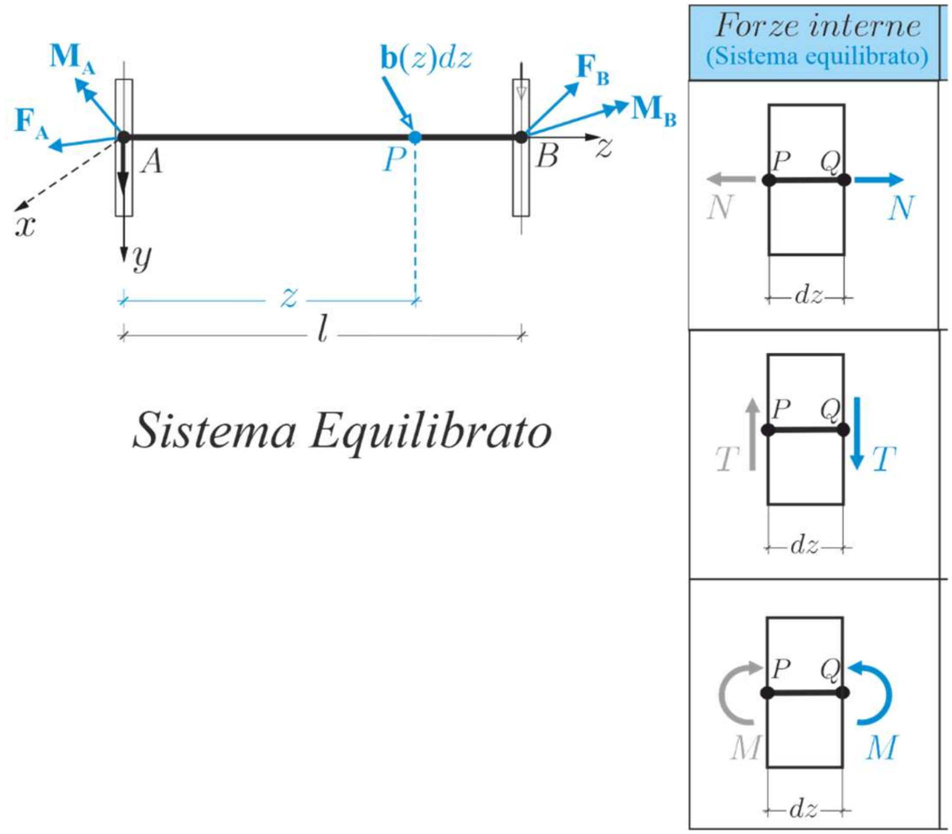


$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \quad + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il ‘Lavoro Virtuale’



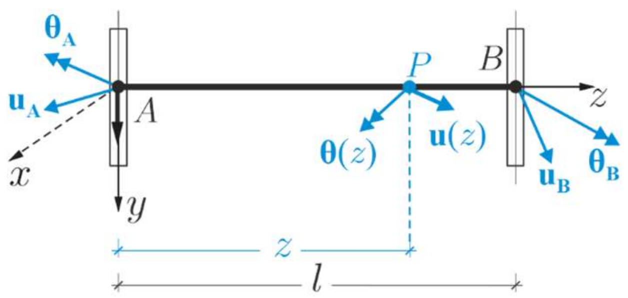


$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

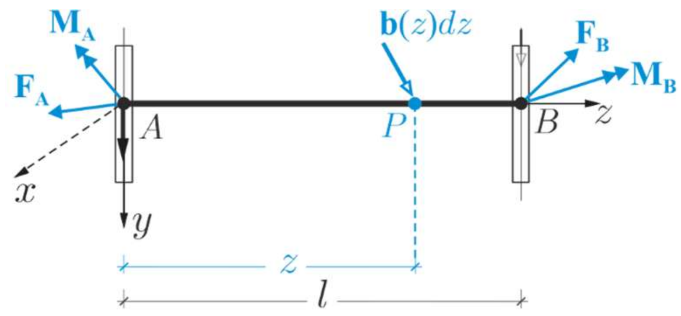
$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



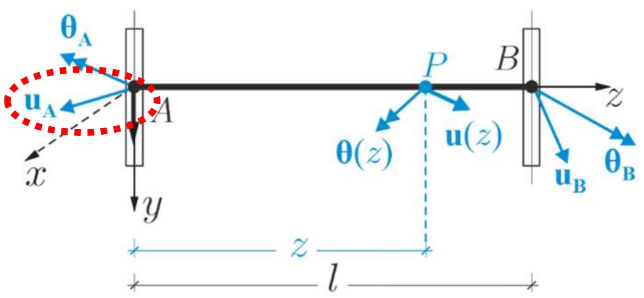
Sistema Congruente



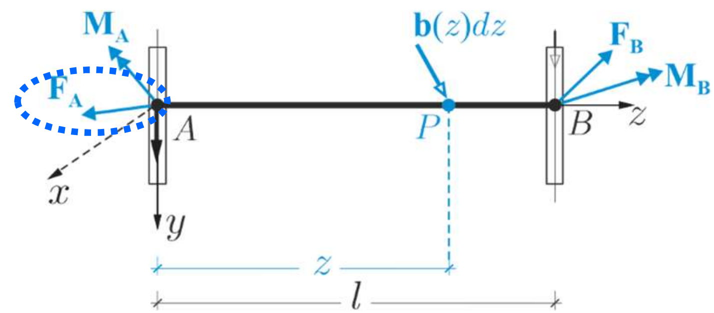
Sistema Equilibrato

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



Sistema Congruente



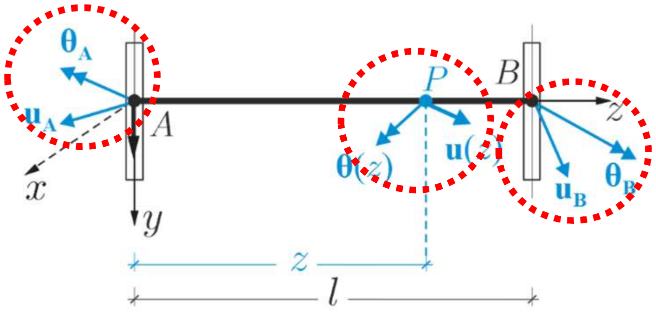
Sistema Equilibrato

Definizione. Lavoro che le forze ***esterne*** (forze attive e reazioni vincolari) del Sistema Equilibrato compiono sugli spostamenti del Sistema Congruente

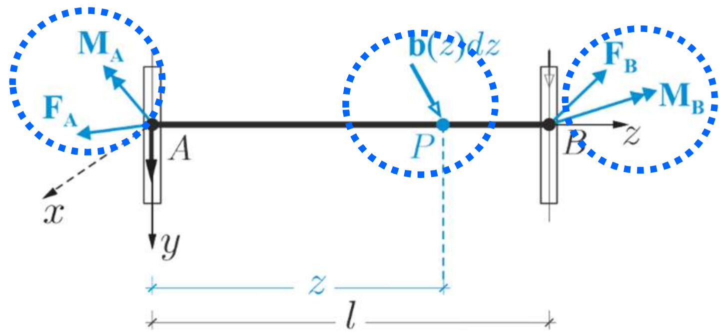
$$\mathcal{L}_v^e = \mathrm{F_A} \cdot \mathrm{u_A} + \cdots$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



Sistema Congruente



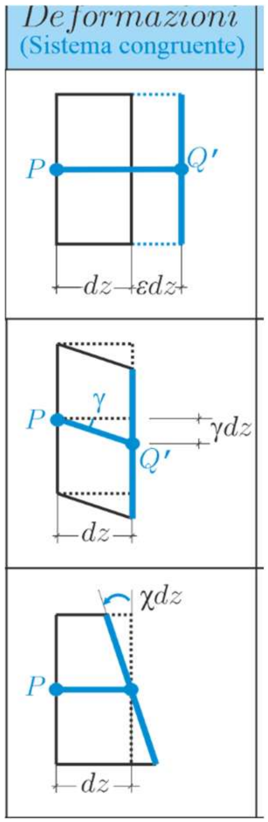
Sistema Equilibrato

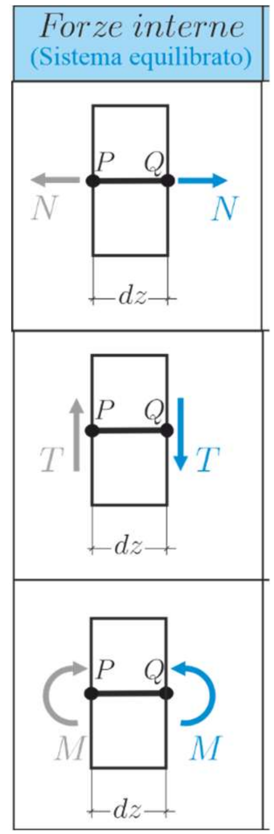
Definizione. Lavoro che le forze ***esterne*** (forze attive e reazioni vincolari) del Sistema Equilibrato compiono sugli spostamenti del Sistema Congruente

$$\mathcal{L}_v^e = \mathrm{F}_A \cdot \mathrm{u}_A + \mathrm{M}_A \cdot \boldsymbol{\theta}_A + \mathrm{F}_B \cdot \mathrm{u}_B + \mathrm{M}_B \cdot \boldsymbol{\theta}_B + \int_0^l \mathbf{b}\,dz \cdot \mathbf{u}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

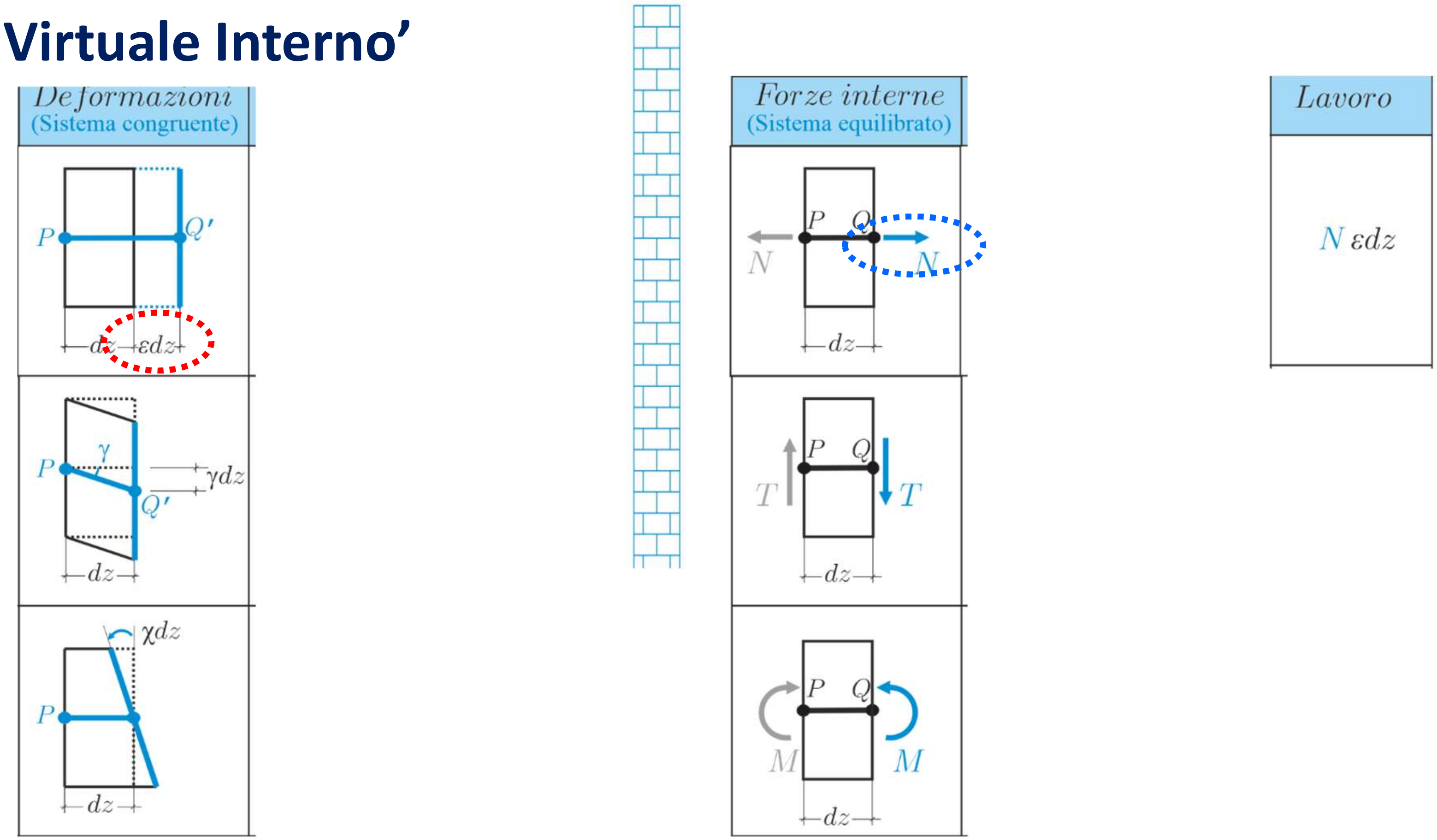
Il ‘Lavoro Virtuale Interno’





Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il ‘Lavoro Virtuale Interno’

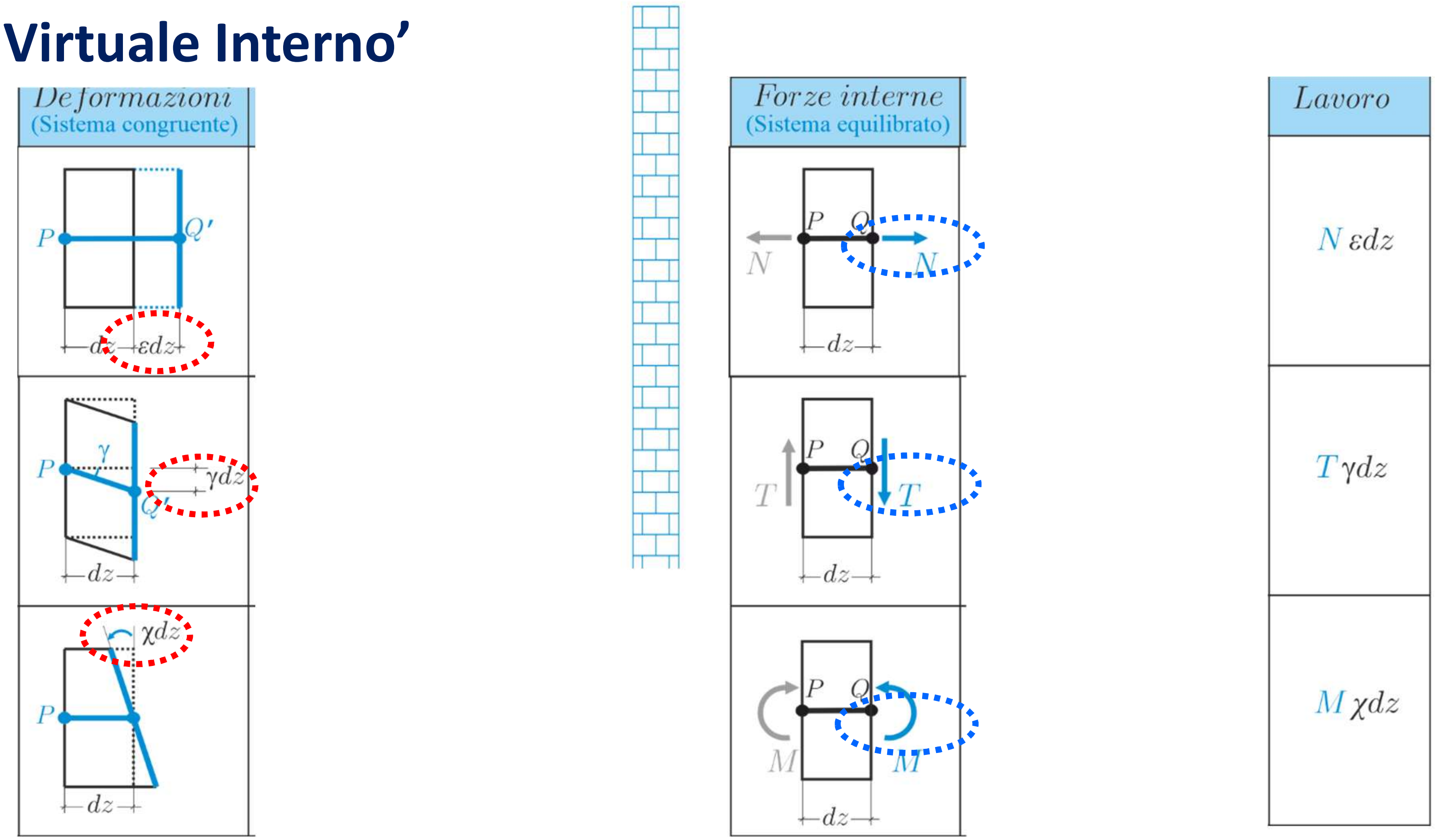


Definizione. Lavoro che le forze ***interne*** (caratteristiche della sollecitazione) del Sistema Equilibrato compiono sulle deformazioni del Sistema Congruente

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l N\,\varepsilon\,dz + \cdots$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il ‘Lavoro Virtuale Interno’

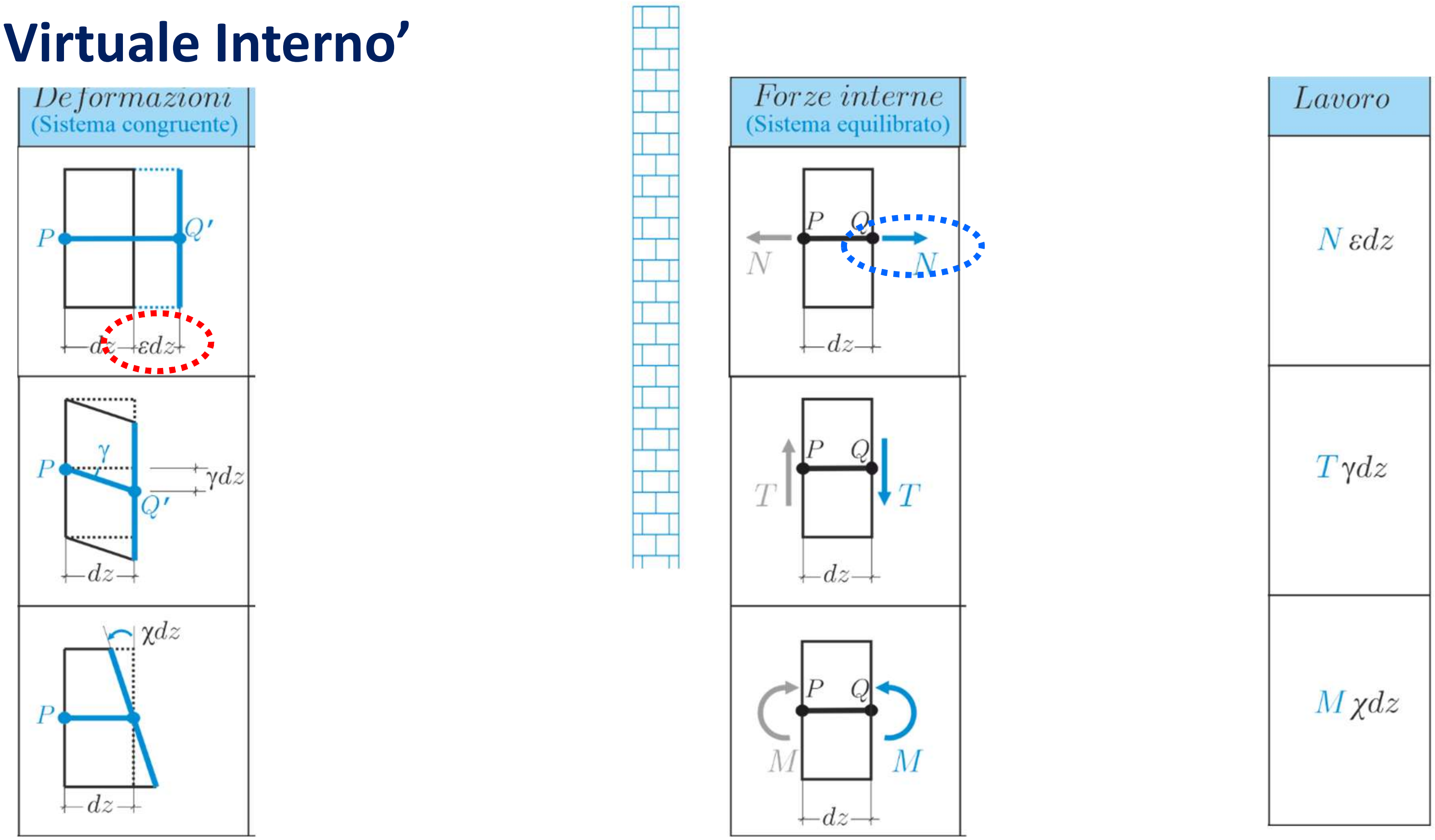


Definizione. Lavoro che le forze ***interne*** (caratteristiche della sollecitazione) del Sistema Equilibrato compiono sulle deformazioni del Sistema Congruente

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N\,\varepsilon\,dz + T\,\gamma\,dz + M\,\chi\,dz]$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

Il 'Lavoro Virtuale Interno'



Definizione. Lavoro che le forze ***interne*** (caratteristiche della sollecitazione) del Sistema Equilibrato compiono sulle deformazioni del Sistema Congruente

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

$$\mathrm{F_A} \cdot \mathrm{u_A} + \mathrm{M_A} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{A} + \mathrm{F_B} \cdot \mathrm{u_B} + \mathrm{M_B} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{B} + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z)\, \varepsilon(z) + T(z)\, \gamma(z) + M(z)\, \chi(z)] dz$$

IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

$$\mathrm{F_A} \cdot \mathrm{u_A} + \mathrm{M_A} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{A} + \mathrm{F_B} \cdot \mathrm{u_B} + \mathrm{M_B} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{B} + \int_0^l \mathbf{b}\,dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Sistema Congruente (grandezze cinematiche)

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA’ DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

Sistema Equilibrato (grandezze statiche)

$$\mathrm{F_A} \cdot \mathrm{u_A} + \mathrm{M_A} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{A} + \mathrm{F_B} \cdot \mathrm{u_B} + \mathrm{M_B} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{B} + \int_0^l \mathbf{b}\,dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Sistema Congruente (grandezze cinematiche)

L’identità dei LV ha valenza del tutto generale: infatti è indipendente dal materiale costitutivo e sussiste anche nel caso in cui il Sistema Congruente e il Sistema Equilibrato siano due strutture distinte, ad esempio due travi realizzate in materiale diverso.

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI (TLV)

Enunciato

Assegnato un sistema congruente (cfr. § 10.2.2) e, *indipendentemente* da esso, un sistema equilibrato (cfr. § 10.2.3), il lavoro virtuale esterno, Eq. (10.9), eguaglia il lavoro virtuale interno, Eq. (10.10):

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

Dimostrazione

Cfr. Libro §10.3

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

COROLLARI DEL TLV

- CONGRUENZA + EQUILIBRIO $\Rightarrow$ IDENTITÀ LV
- CONGRUENZA + IDENTITÀ LV $\Rightarrow$ EQUILIBRIO
- EQUILIBRIO + IDENTITÀ LV $\Rightarrow$ CONGRUENZA

In particolare, dagli ultimi due punti, si possono ricavare i seguenti due corollari.

Corollario degli spostamenti virtuali:

condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze esterne e interne sia equilibrato è che sia soddisfatta l'identità dei lavori virtuali Eq. (10.15) per ogni campo di spostamenti e deformazioni congruenti.

Corollario delle forze virtuali:

condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di spostamenti e deformazioni sia congruente è che sia soddisfatta l'identità dei lavori virtuali Eq. (10.15) per ogni sistema di forze esterne e interne equilibrato. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, da questo corollario si deduce una semplice procedura operativa per il calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture isostatiche o iperstatiche.

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE INDEFORMABILE A TAGLIO (Eulero-Bernouilli)

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Se la **trave è indeformabile a taglio**, lo scorrimento angolare è identicamente nullo:

$$\gamma(z) = 0 \qquad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è indeformabile a taglio**:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + M(z)\,\chi(z)]dz}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE INDEFORMABILE A TAGLIO (Eulero-Bernouilli)

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:
Assegnato un Sistema **rigido** Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema **rigido** Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

Trave indeformabile a taglio

$$\boxed{\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + M(z)\,\chi(z)]dz}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE PURAMENTE FLESSIBILE

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Se la **trave è puramente flessibile**, la deformazione assiale e lo scorrimento angolare sono identicamente nulli:

$$\varepsilon(z) = 0, \gamma(z) = 0 \qquad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è puramente flessibile**:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^i = \int_0^l M(z)\,\chi(z)\,dz}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE PURAMENTE FLESSIBILE

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:
Assegnato un Sistema **rigido** Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema **rigido** Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

Trave puramente flessibile

$$\boxed{\mathcal{L}_v^i = \int_0^l M(z)\, \chi(z)\, dz}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV) PER LA TRAVE RIGIDA

Assegnato un Sistema Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i}$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z)\,\varepsilon(z) + T(z)\,\gamma(z) + M(z)\,\chi(z)]dz$$

Se la **trave è rigida**, le misure di deformazione sono identicamente nulle:

$$\varepsilon(z) = 0, \gamma(z) = 0, \chi(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è rigida**:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^i = 0}$$

Identità dei Lavori Virtuali: richiami

IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV) PER LA TRAVE RIGIDA

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:
Assegnato un Sistema **rigido** Equilibrato e indipendentemente da esso un Sistema **rigido** Congruente sussiste la seguente identità:

$$\boxed{\mathcal{L}_v^e = 0}$$

$$\boxed{\mathrm{F_A} \cdot \mathrm{u_A} + \mathrm{M_A} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{A} + \mathrm{F_B} \cdot \mathrm{u_B} + \mathrm{M_B} \cdot \boldsymbol{\theta}_\mathrm{B} + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = 0}$$