

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

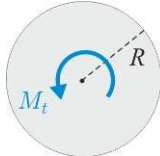
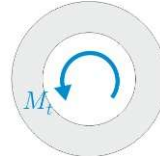



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare  
- **Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica** 
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

Sezione generica: analogia idrodinamica

- Equazioni per il vettore tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0, P \in \mathcal{A}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta \mathbf{k}$$

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

- Problema con condizioni al contorno di Neumann

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad P \in \mathcal{A}$$

$$\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma$$

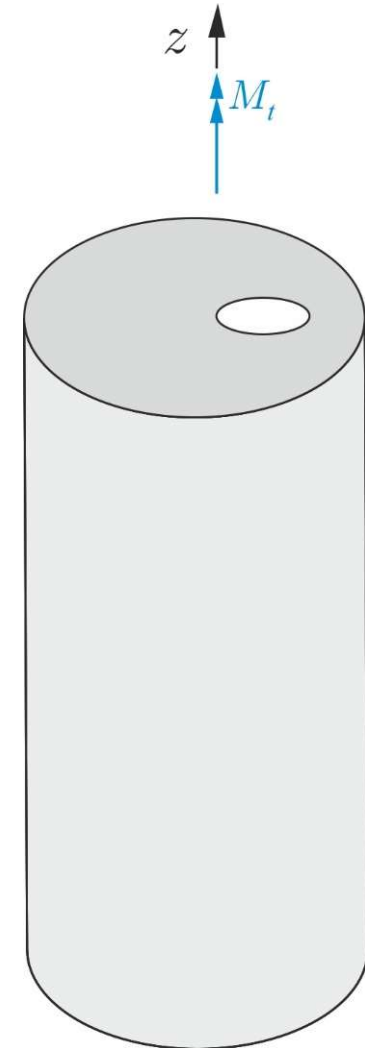
- Soluzione (tensioni)

$$\tau_{zx} = G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right),$$

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

$$\tau_{zy} = G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

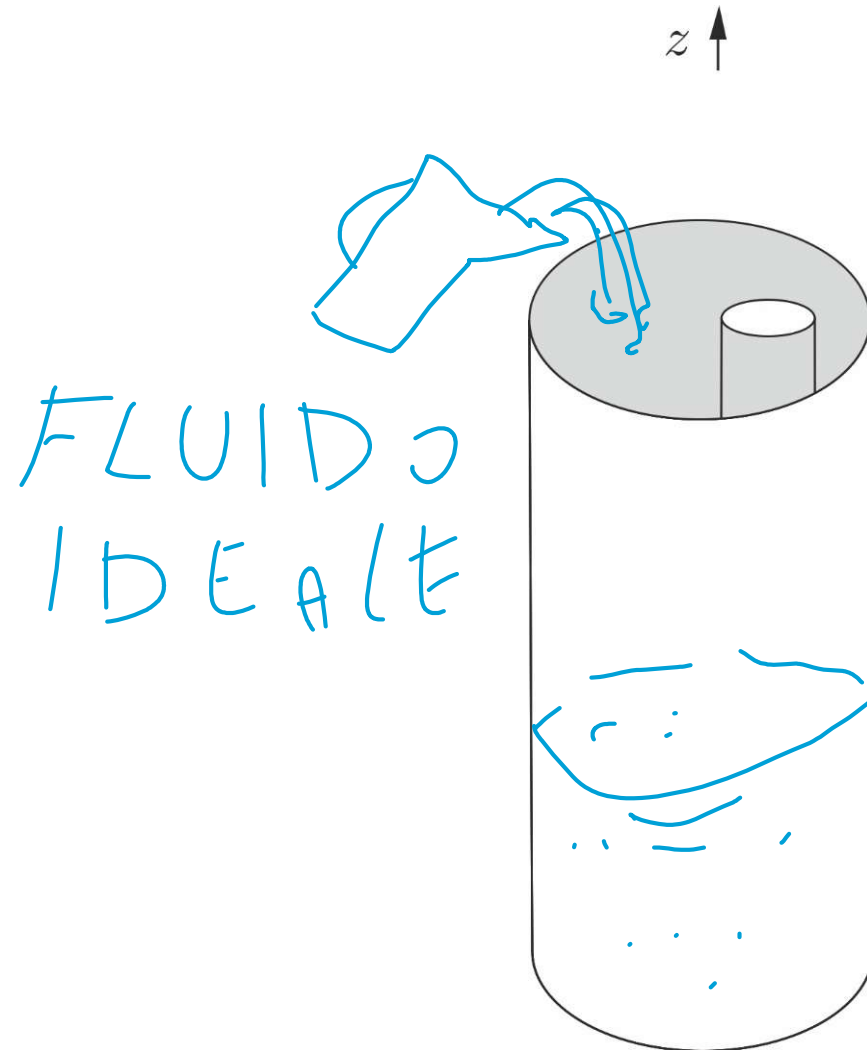
$$I_t = I_o + \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x + \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA$$





5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

Sezione generica: analogia idrodinamica



5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

Sezione generica: analogia idrodinamica

- *Equazioni campo velocità \mathbf{v}*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

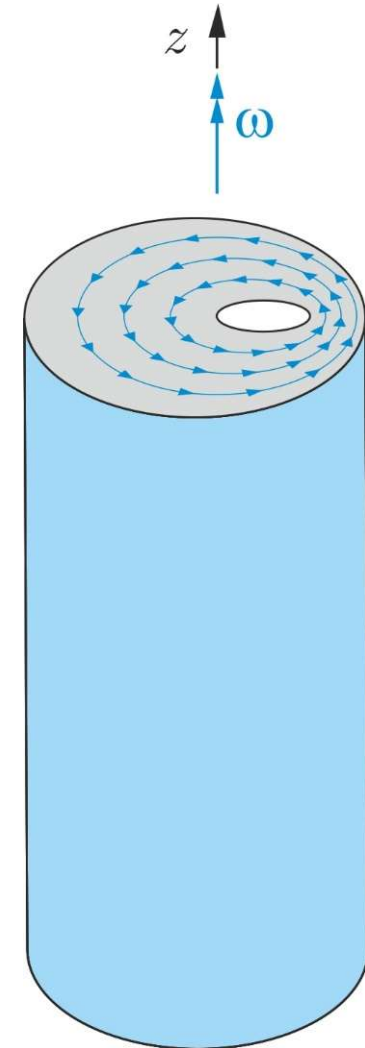
$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = c\mathbf{k}$$

$$\omega = \int_{\mathcal{A}} (v_y x - v_x y) dA$$

- *Analogia idrodinamica:*

$$\omega \leftrightarrow M_t$$

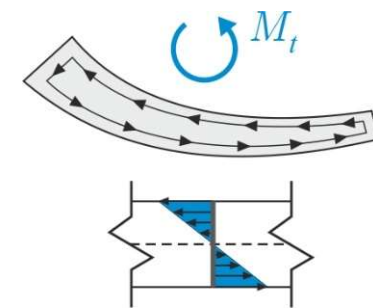
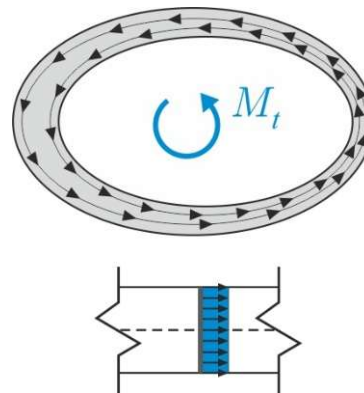
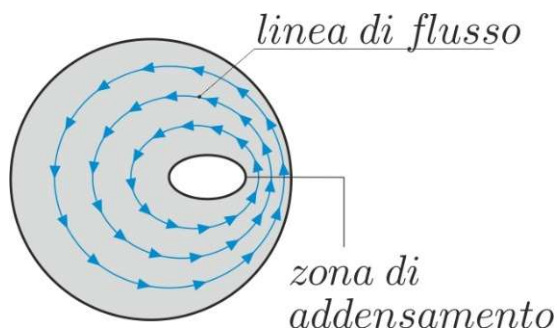
$$\mathbf{v} \leftrightarrow \boldsymbol{\tau}$$



5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

Sezione generica: analogia idrodinamica

- *Le linee di flusso sono curve chiuse (campo solenodale: $\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0$)*
- *Le linee di flusso si addensano in corrispondenza di restringimenti*
- *Le tensioni tangenziali (tangenti alle linee di flusso) sono orientate in modo da percorrere le linee di flusso nel verso del momento torcente*
- *Nelle sezioni sottili chiuse, le tensioni tangenziali sono parallele alla linea media e uniformi lungo la corda: l'intensità delle tensioni è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda (spessore)*
- *Nelle sezioni sottili aperte, le tensioni tangenziali sono parallele alla linea media, variano linearmente lungo la corda, sono massime ai bordi e nulle sulla linea media (distribuzione 'a farfalla')*



*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

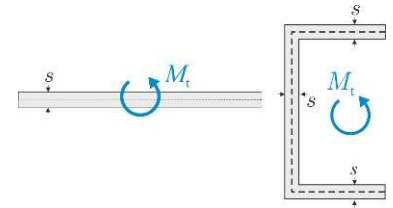


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

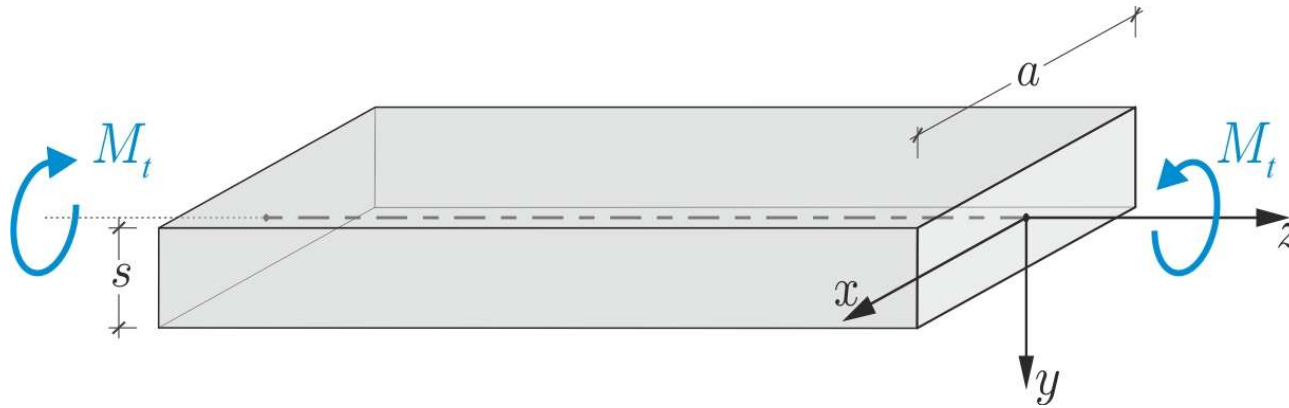
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- **Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili**
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)



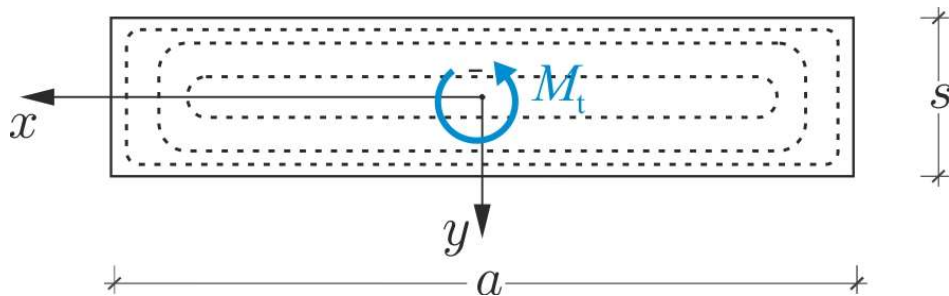


Sezione rettangolare sottile

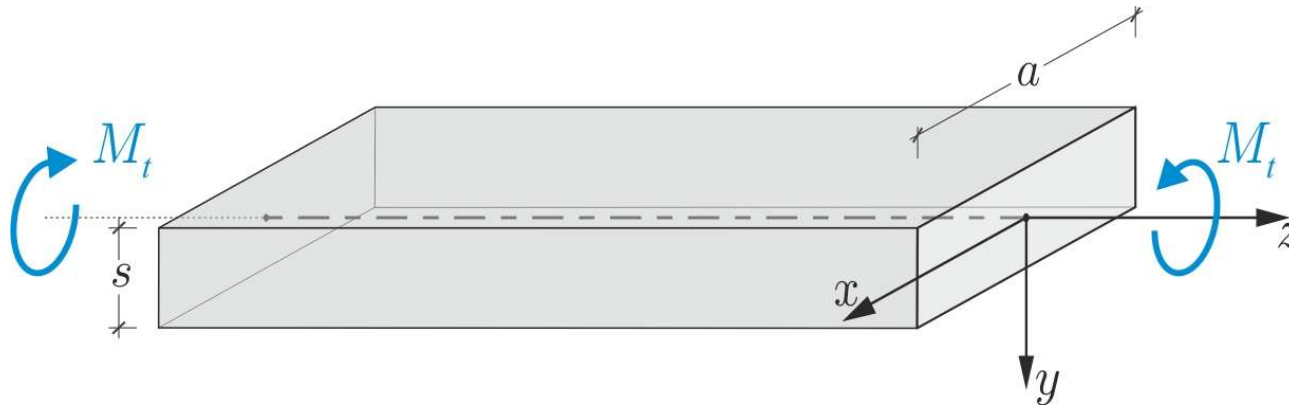


$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)

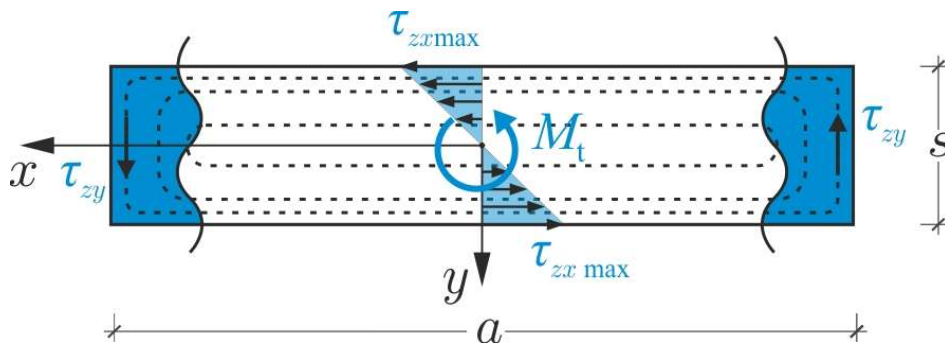


Sezione rettangolare sottile



$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)



Soluzione del problema di Neumann

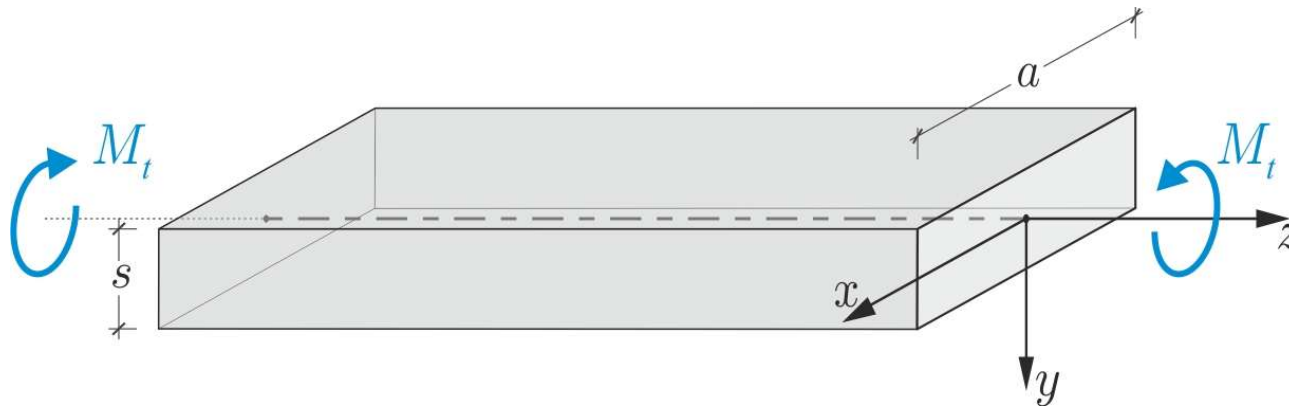
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{k_1 a s^3}$$

$$I_t = k_2 a s^3$$

$$\frac{a}{s} \rightarrow \infty \quad k_1 \rightarrow \frac{1}{3}$$

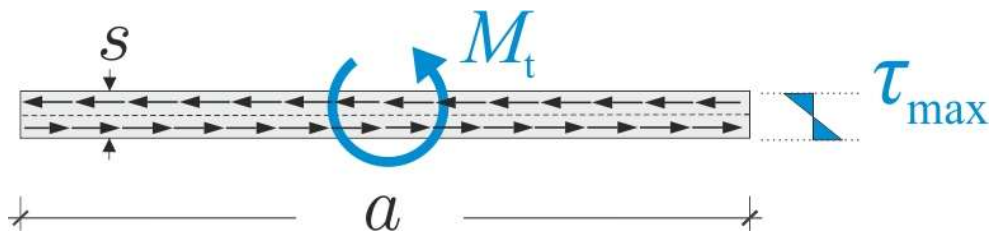
$$k_2 \rightarrow \frac{1}{3}$$

Sezione rettangolare sottile



$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)

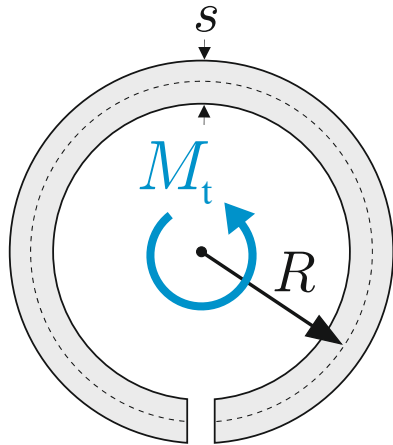


$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} a s^3$$

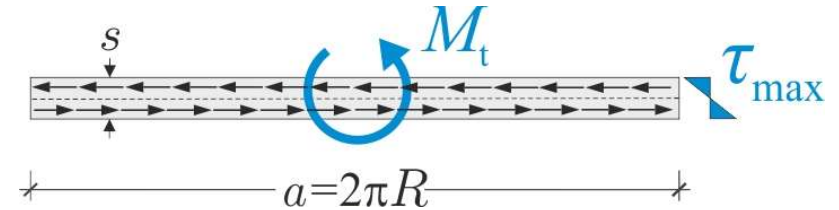
$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

Sezioni sottili aperte rettificabili

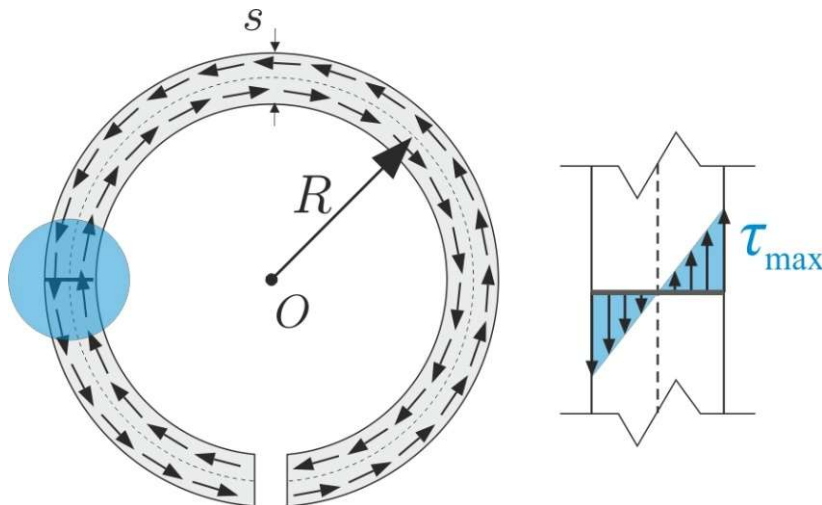


$$s \ll a$$

$$a \cong 2\pi R$$



Andamento delle tensioni

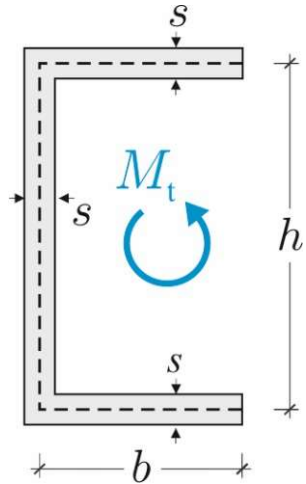


$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} (2\pi R) s^3$$

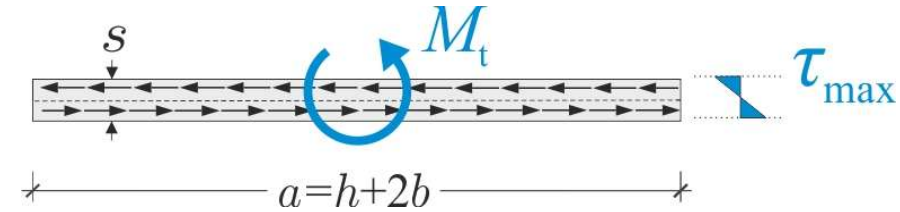
$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

Sezioni sottili aperte rettificabili

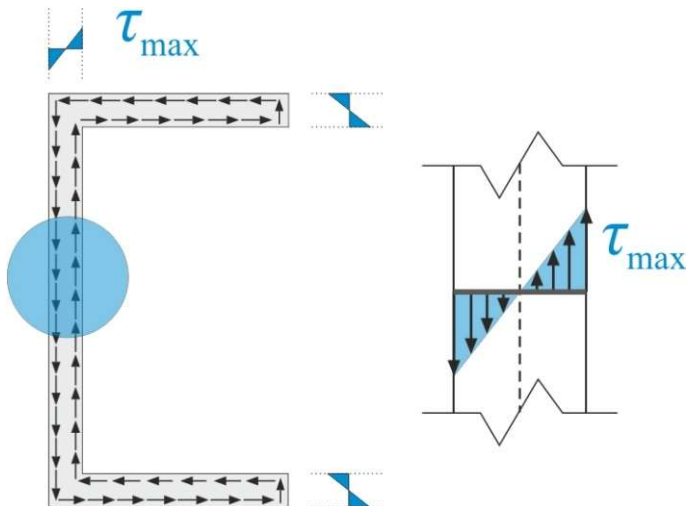


$$s \ll a$$

$$a = h + 2b$$



Andamento delle tensioni



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} (h + 2b) s^3$$

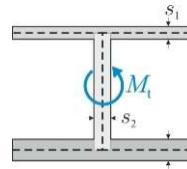
$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili

- **Sezioni sottili aperte**

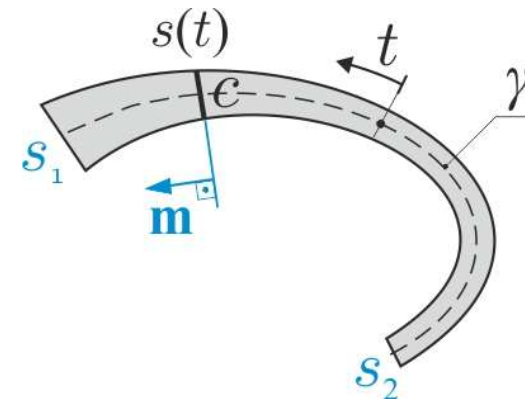
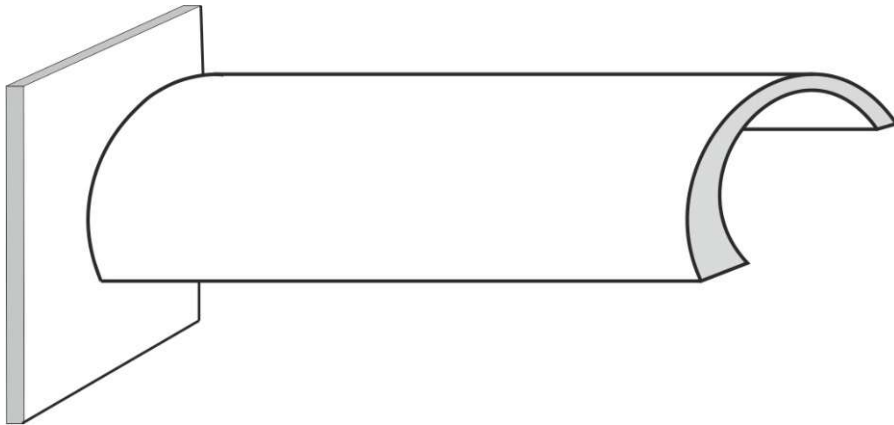


- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

5. Torsione uniforme: sezioni sottili

Definizione

*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



γ : linea media

c : corda (segmento perpendicolare alla linea media)

t : ascissa locale

\mathbf{m} : versore perpendicolare alla corda e orientato concordemente all'ascissa locale

$s(t)$: lunghezza della corda detta spessore (costante o variabile con t)

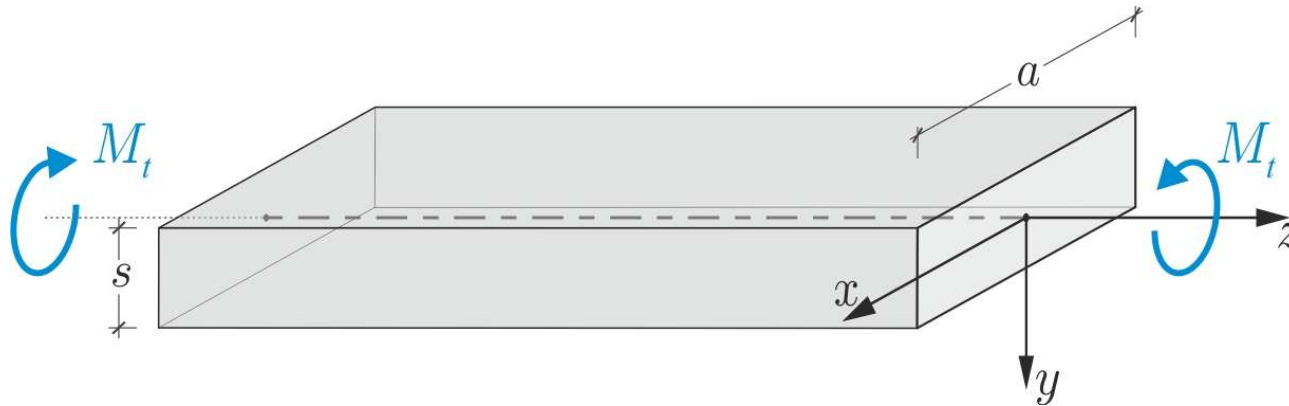
$$mis(\gamma) := a$$

$$mis(c) := s(t)$$

$$s \ll a$$

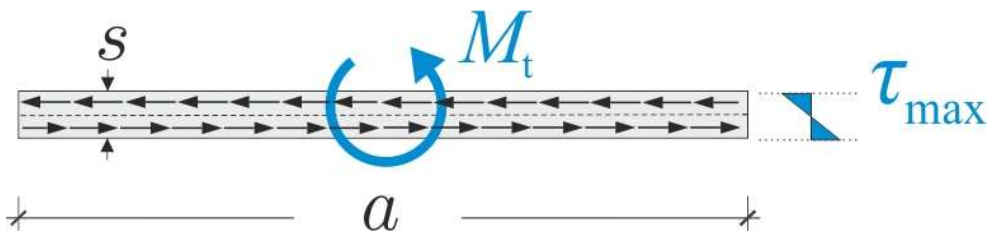
$$0 \leq t \leq a$$

Sezione rettangolare sottile



$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)



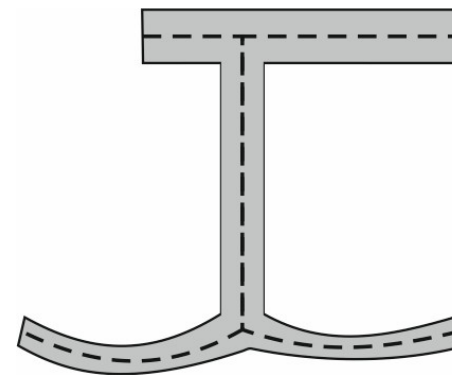
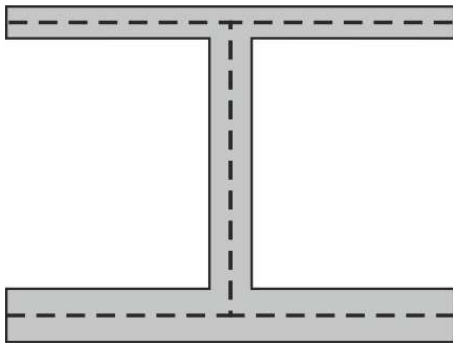
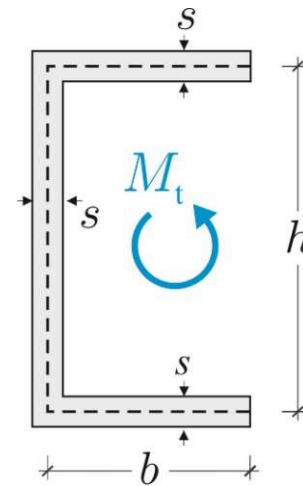
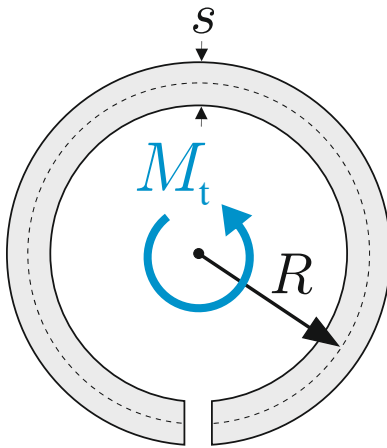
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} a s^3$$

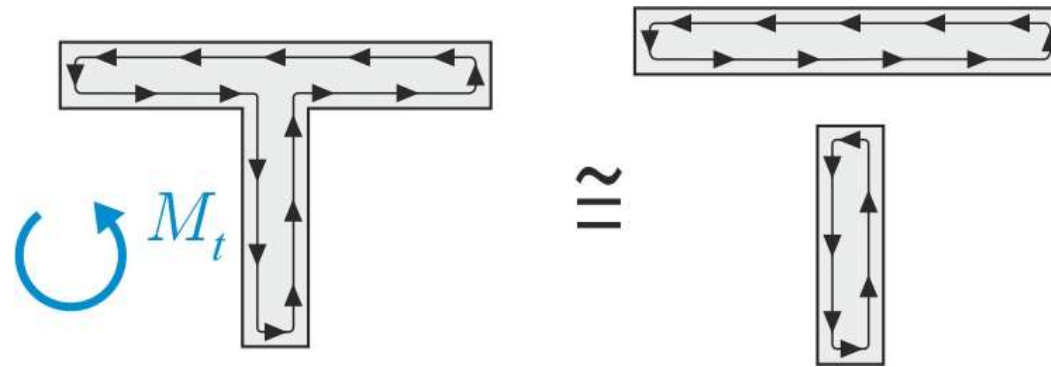
$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

Sezioni sottili aperte: geometria

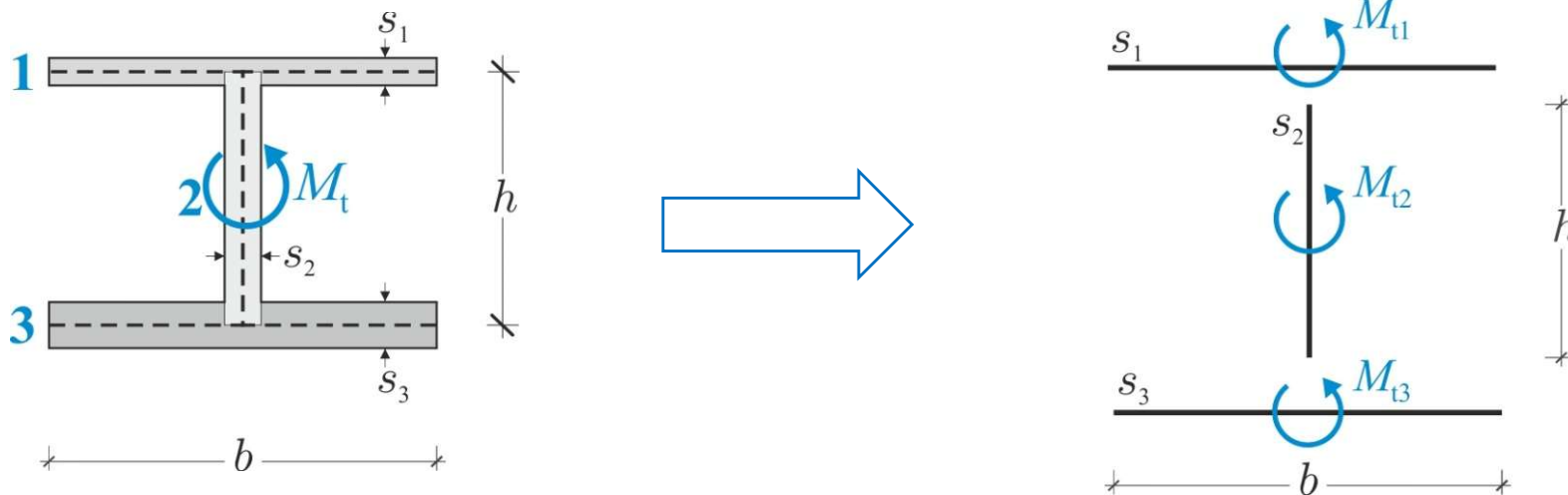
- La linea media γ non descrive curve chiuse (*cicli*): non sono presenti cavità (*lacune*)



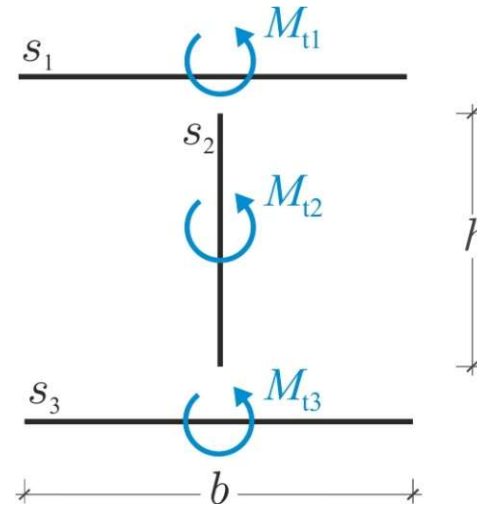
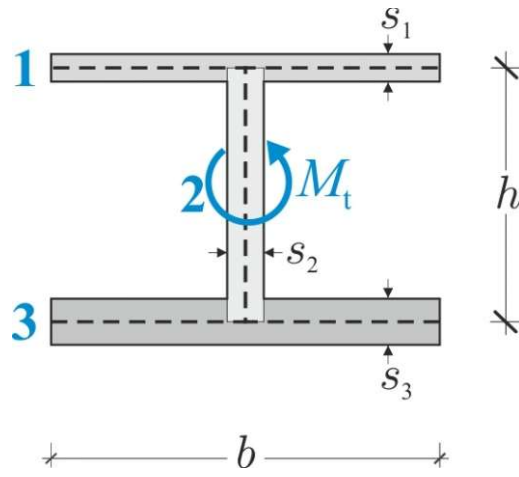
Sezioni sottili aperte composte (considerazioni intuitive)



Ripartizione del momento torcente



Ripartizione del momento torcente



$$I_{ti} = \frac{1}{3} a_i s_i^3$$

$$I_t = \sum I_{ti} = \sum \frac{1}{3} a_i s_i^3$$

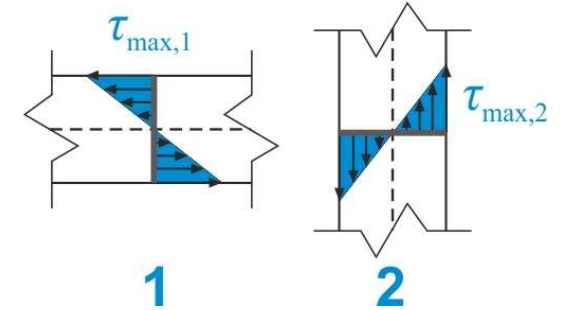
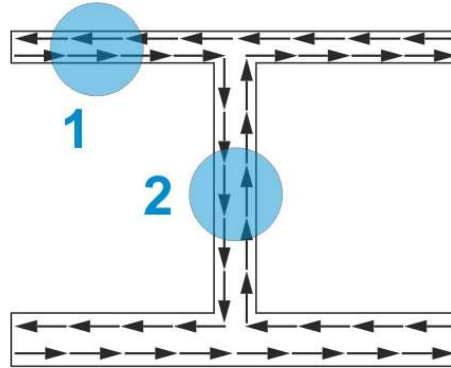
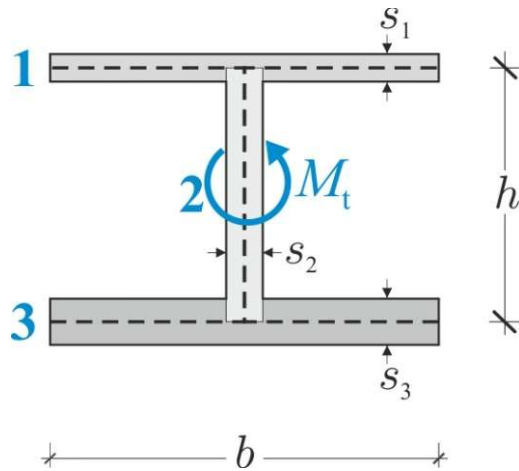
$$M_{ti} = \frac{I_{ti}}{I_t} M_t$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{ti}}{I_{ti}} s_i$$



$$\tau_{max,i} = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

Ripartizione del momento torcente



$$I_t = \sum I_{ti} = \frac{1}{3} b s_1^3 + \frac{1}{3} h s_2^3 + \frac{1}{3} b s_3^3$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t}$$