

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- **5. Torsione uniforme**



Lezione

5. Torsione uniforme

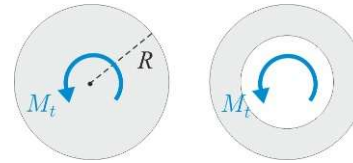
- **Posizione del problema**
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema

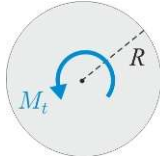
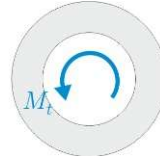

- **Sezioni a simmetria polare**



- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

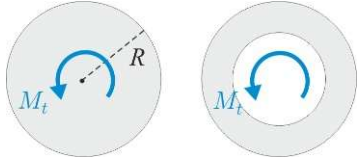
Lezione

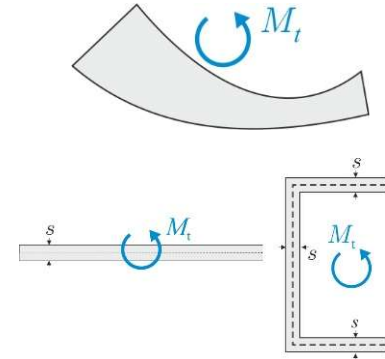
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare  
- **Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica** 
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare 
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- **Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili**
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

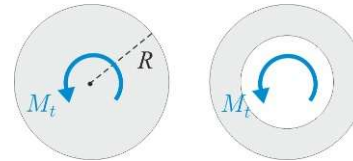


Lezione

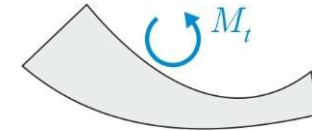
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema

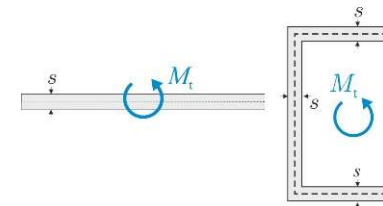
- Sezioni a simmetria polare



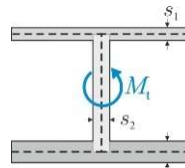
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica



- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili



- **Sezioni sottili aperte**



- Sezioni sottili chiuse:

- Teoria approssimata di Bredt

- Formule di Bredt

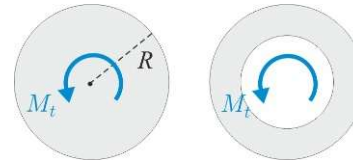
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

Lezione

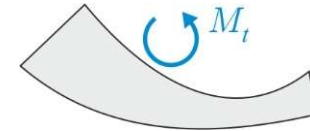
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema

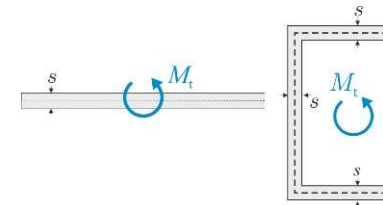
- Sezioni a simmetria polare



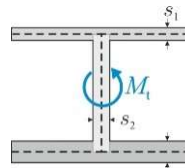
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica



- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili



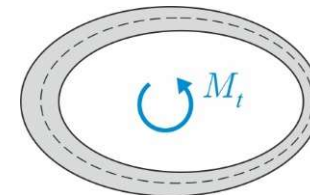
- Sezioni sottili aperte



- **Sezioni sottili chiuse:**

- Teoria approssimata di Bredt

- Formule di Bredt



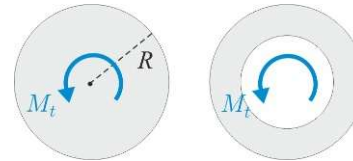
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

Lezione

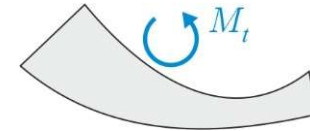
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema

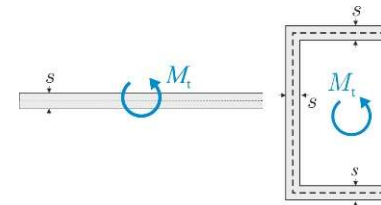
- Sezioni a simmetria polare



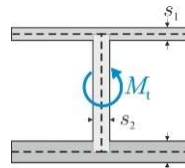
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica



- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili



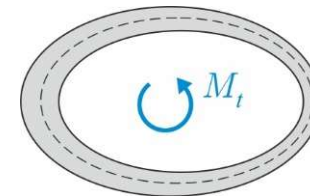
- Sezioni sottili aperte



- Sezioni sottili chiuse:

- Teoria approssimata di Bredt

- Formule di Bredt



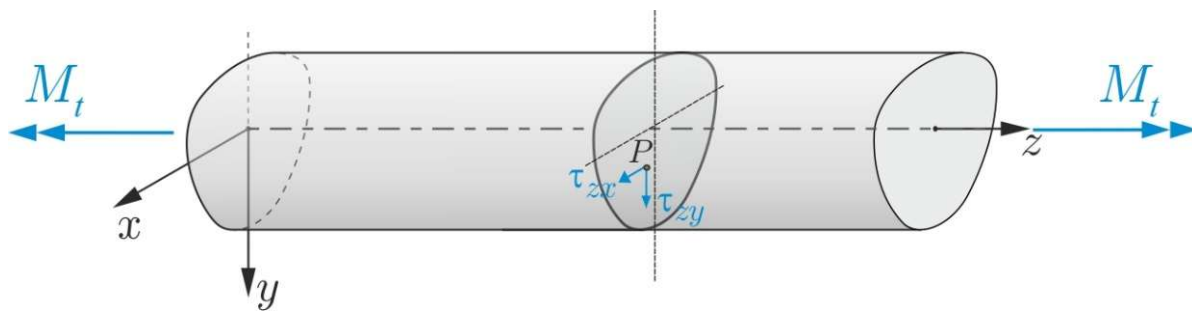
- **Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)**

Posizione del problema



$$N=T_x=T_y=0 \quad M_x=M_y=0 \quad M_z=M_t$$

Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



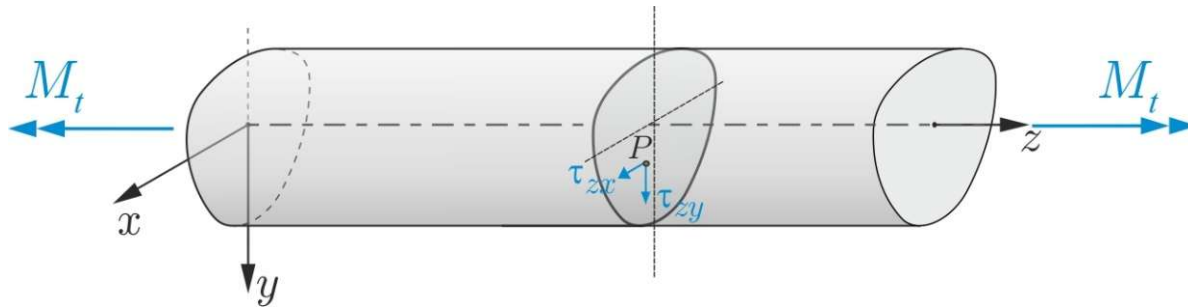
$$\sigma_z = 0$$

$$\tau \neq 0$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Torsione uniforme

Tensioni tangenziali τ



$$\sigma_z = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

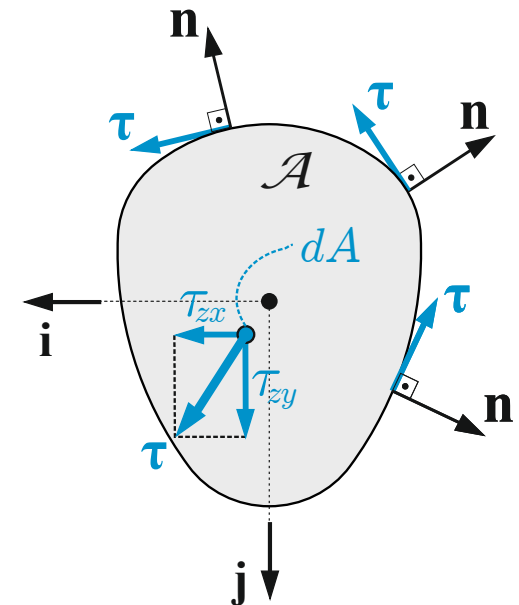
Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{const}_z$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0} \quad (\text{campo solenodale})$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$$

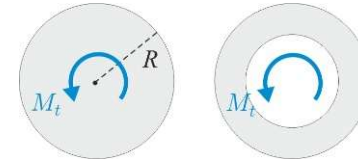




Lezione

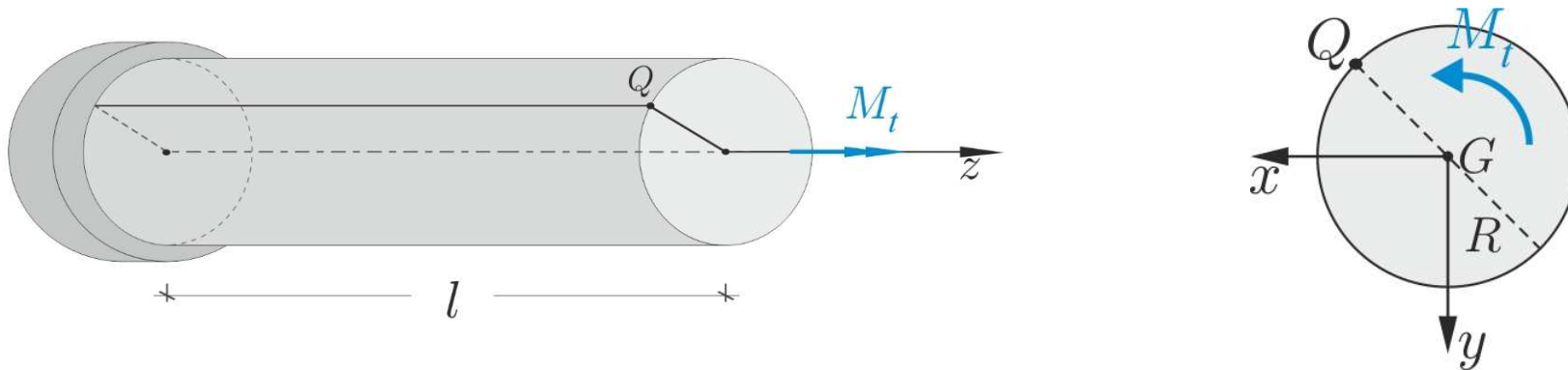
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- **Sezioni a simmetria polare**
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)



5. Torsione uniforme: sezione circolare

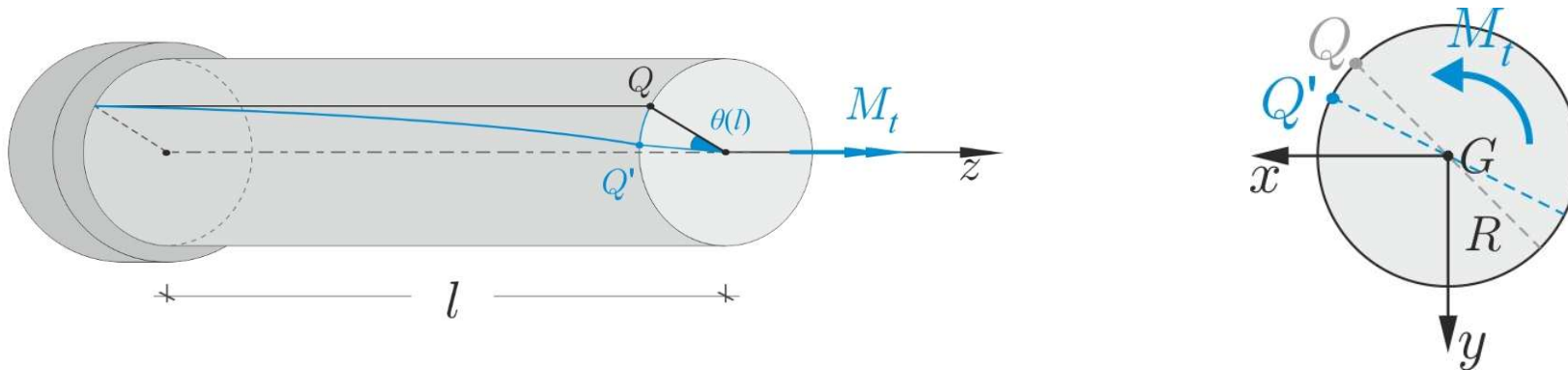
Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

5. Torsione uniforme: sezione circolare

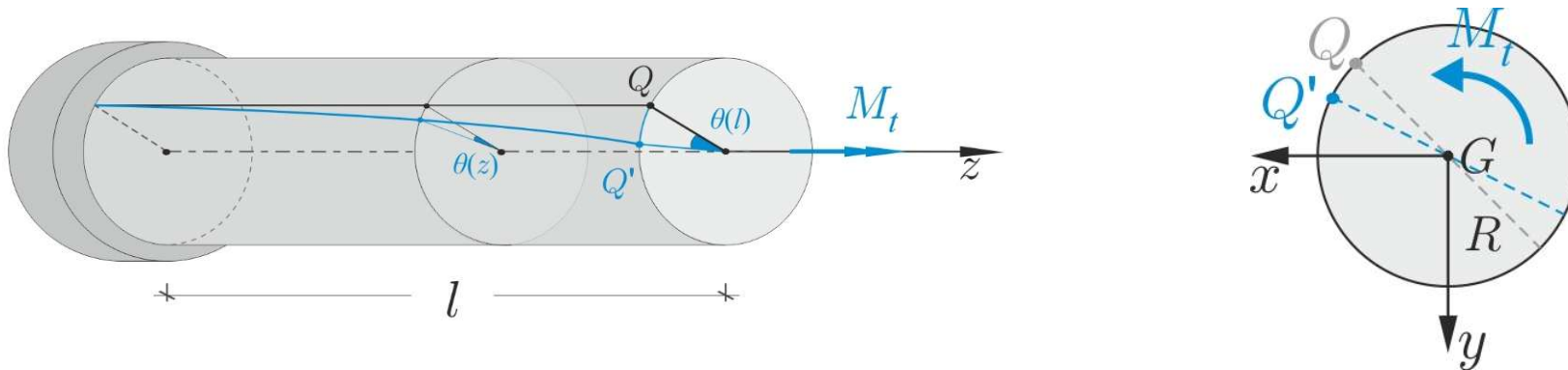
Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

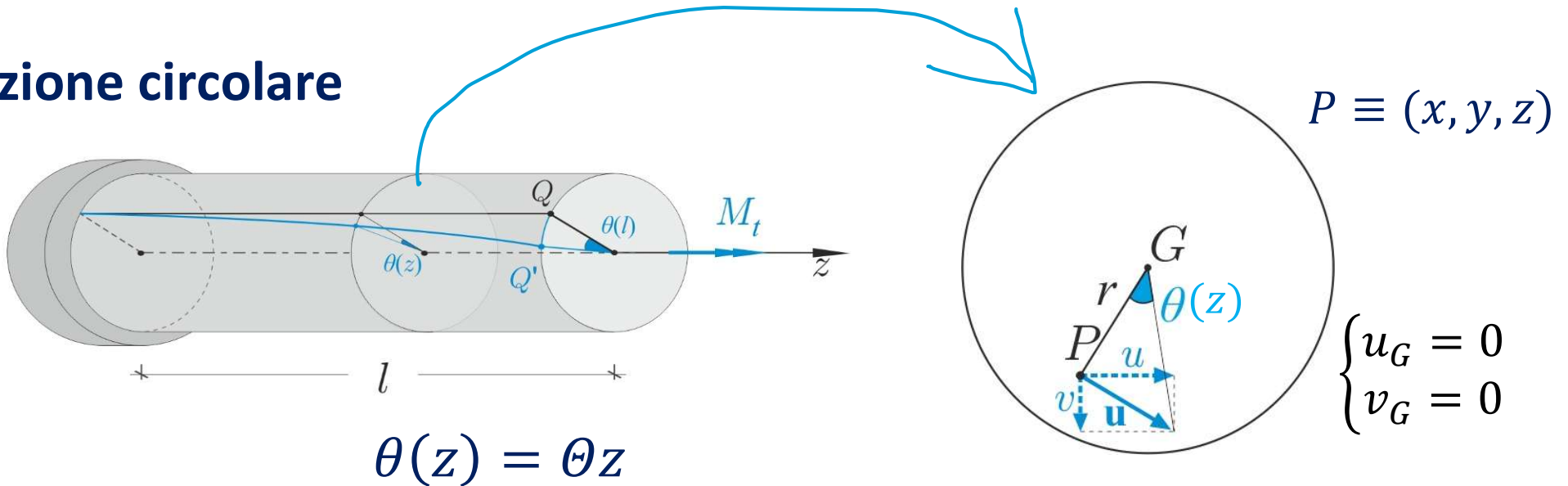
- **Ipotesi 1.** Le sezioni non si deformano e ruotano rigidamente intorno all'asse z
- **Ipotesi 2.** L'angolo di rotazione delle sezioni è una funzione lineare di z :

$$\theta(z) = \Theta z$$

Θ : angolo unitario di torsione $[L^{-1}]$

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

$$\begin{cases} u = \cancel{u_G} - \theta y \\ v = \cancel{v_G} + \theta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\theta(z)y \\ v = \theta(z)x \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = 0 \end{cases}}$$

FGSR

Θz



5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare: deformazioni

- *Equazioni implicite di congruenza (caso generale)*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- *Sostituzione delle funzioni spostamento nelle equazioni implicite di congruenza*

$$\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x \end{cases}$$

- *Tensore della deformazione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$E(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Theta y \\ 0 & 0 & \Theta x \\ -\Theta y & \Theta x & 0 \end{bmatrix}$$



5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x$$

⇒

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x$$

- *Tensore e rotore della tensione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\Theta y \\ 0 & 0 & G\Theta x \\ -G\Theta y & G\Theta x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = 2G\Theta \mathbf{k}$$

Sezione circolare: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x$$

⇒

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x$$

- *Tensore e rotore della tensione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\Theta y \\ 0 & 0 & G\Theta x \\ -G\Theta y & G\Theta x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta \mathbf{k}$$

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare: calcolo del parametro Θ

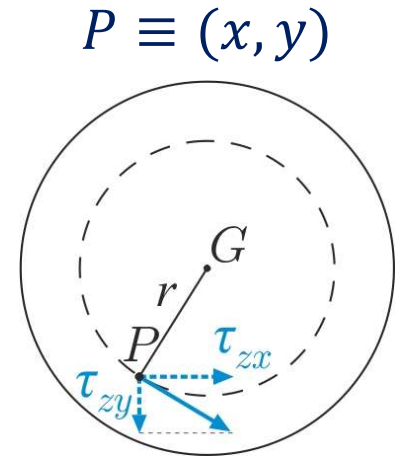
- Condizioni di equivalenza statica alle basi

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

- Sostituzione delle componenti di tensione

$$\tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x \quad \Rightarrow \quad M_t = \int_{\mathcal{A}} G\Theta(x^2 + y^2) dA = G\Theta \int_{\mathcal{A}} r^2 dA$$

$$M_t = G\Theta I_t \quad I_t = I_o = \int_{\mathcal{A}} r^2 dA = \frac{1}{2} \pi R^4$$



- Rigidezza torsionale

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

GI_t → Rigidezza torsionale [FL^2]

EA → Rigidezza assiale [F]

GA_t → Rigidezza di taglio [F]

EI → Rigidezza flessionale [FL^2]

$$\left(\varepsilon = \frac{N}{EA} \right)$$

$$\left(\chi = \frac{M}{EI} \right)$$

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare: verifica della soluzione trovata

- *Soluzione (le altre incognite sono nulle):*

$$\begin{aligned} u &= -\Theta zy, \\ v &= \Theta zx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= -G\Theta y, \\ \gamma_{zy} &= G\Theta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -G\Theta y, \\ \tau_{zy} &= G\Theta x \end{aligned}$$

$$\left(\Theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

- *Equazioni implicite di congruenza* *Verificate* ✓
- *Equazioni di legame costitutivo* *Verificate* ✓
- *Equazioni indefinite di equilibrio*

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \text{cost}_z \text{ *Verificata* } \checkmark \quad \text{div } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \text{ *Verificata* } \checkmark$$

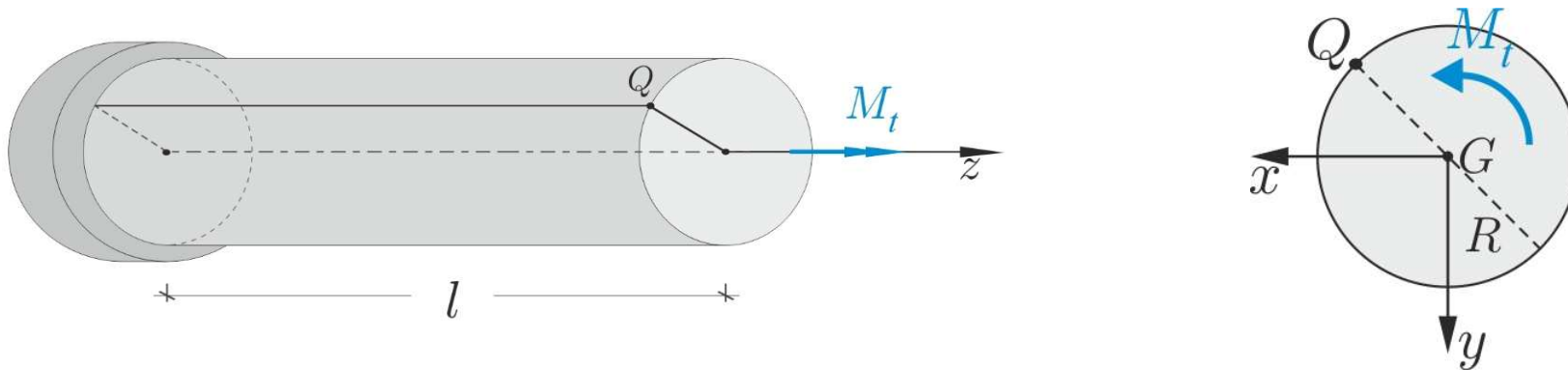
- *Condizioni al contorno sul mantello Γ*

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \text{ *Verificate* } \checkmark$$

- *Condizioni al contorno sulle basi* *Verificate se* $\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$ *con* $I_t = \frac{1}{2}\pi R^4$ ✓

5. Torsione uniforme: sezione circolare

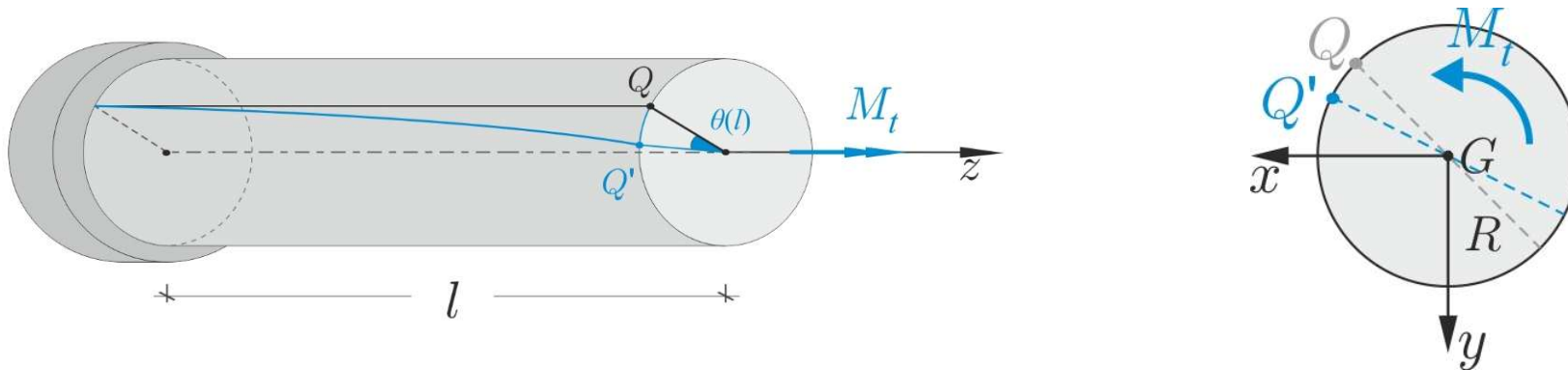
Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

5. Torsione uniforme: sezione circolare

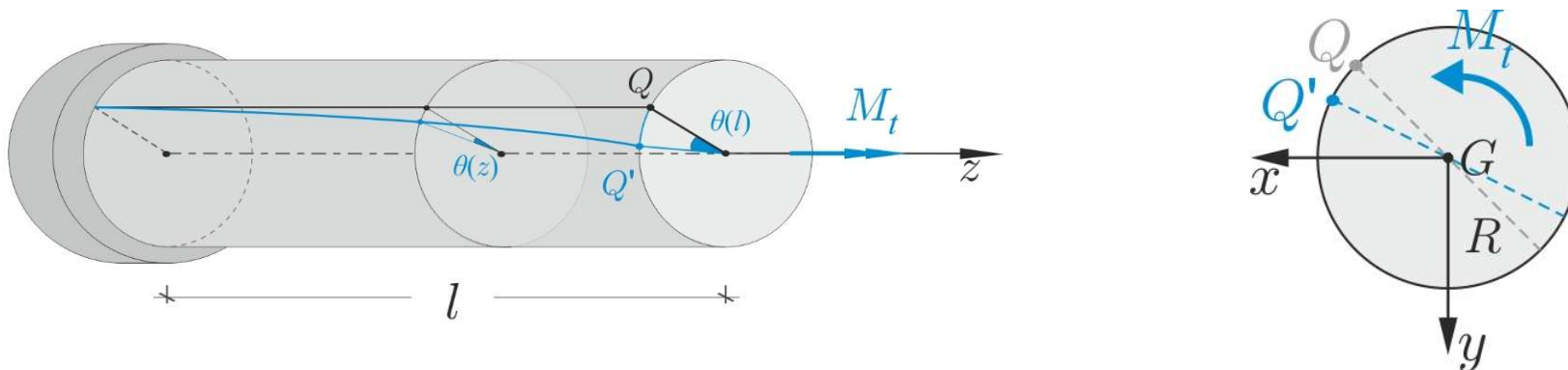
Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

- **Ipotesi 1.** Le sezioni non si deformano e ruotano rigidamente intorno all'asse z
- **Ipotesi 2.** L'angolo di rotazione delle sezioni è una funzione lineare di z :

$$\theta(z) = \Theta z$$

Θ : angolo unitario di torsione $[L^{-1}]$

5. Torsione uniforme: sezione circolare

Sezione circolare: rappresentazione grafica dello stato tensionale

- *Modulo del vettore τ*

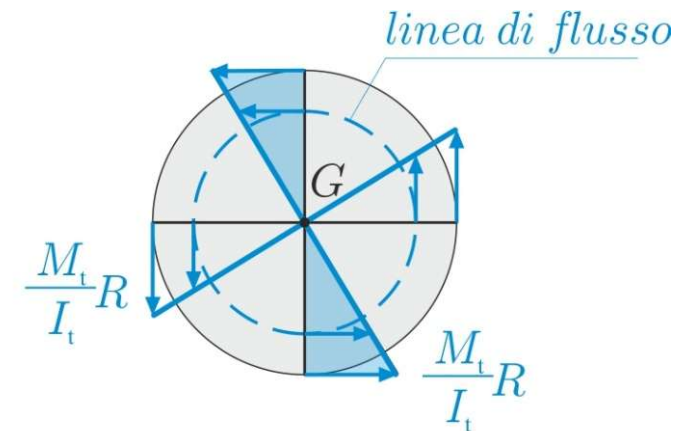
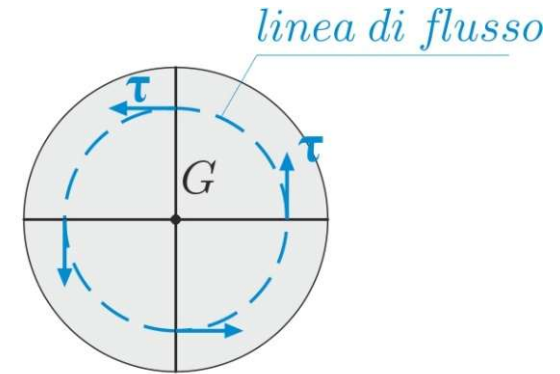
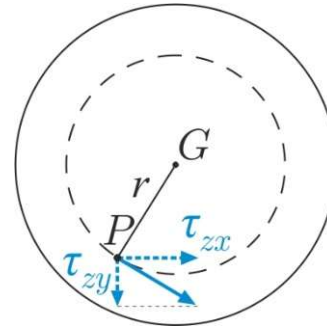
$$\tau_{zx} = -G\theta y, \tau_{zy} = G\theta x \quad \left(\theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

$$|\tau| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta \sqrt{x^2 + y^2} = G\theta r$$

$$\tau(r) = G\theta r \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = \frac{M_t}{I_t} r$$

$$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{M_t}{I_t} R$$

$$I_t = \frac{1}{2} \pi R^4$$



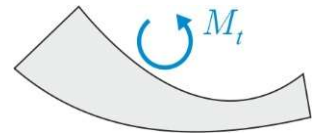
- **Linea di flusso per il campo τ :** curva caratterizzata dal fatto che in ogni suo punto il vettore delle tensioni tangenziali risulta tangente ad essa



Lezione

5. Torsione uniforme

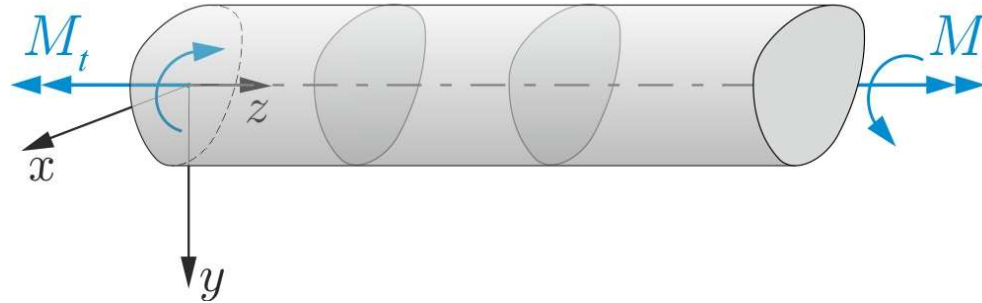
- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- **Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica**
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)





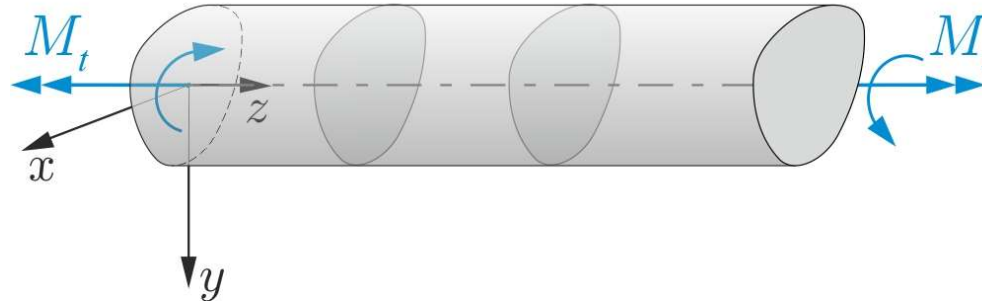
5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione di forma generica



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

Sezione di forma generica

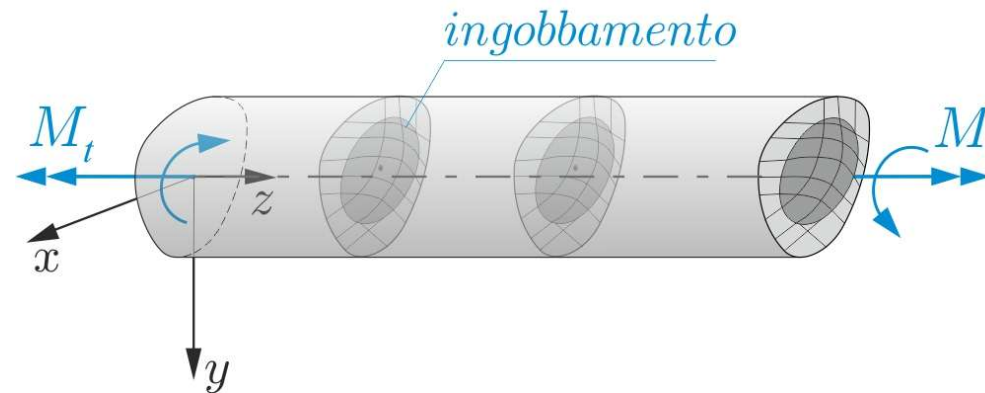


Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)



Video ingobbamento

Sezione di forma generica



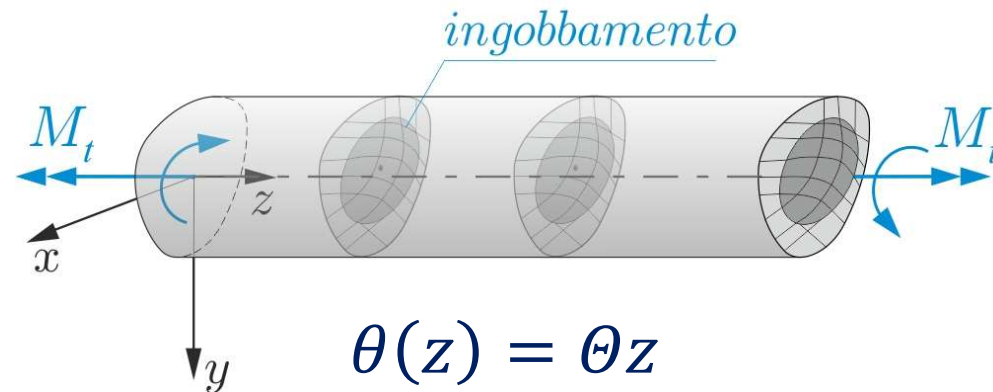
Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

Ipotesi 1. Le sezioni ruotano intorno all'asse z ma si deformano e non sono più piane: ingobbamento delle sezioni (la componente di spostamento w in generale non è nulla)

Ipotesi 2. Le sezioni si ingobbano tutte allo stesso modo, la funzione ingobbamento non dipende dall'ascissa z

NB. Le sezioni a simmetria polare hanno dunque ingobbamento nullo

Sezione di forma generica



Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

$$\begin{cases} u = -\theta(z)y \\ v = \theta(z)x \\ w = w(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\Theta z y \\ v = \Theta z x \\ w = \Theta \Psi(x, y) \end{cases}$$

Θ : angolo unitario di torsione (costante) $[L^{-1}]$

$\Psi(x, y)$: funzione di ingobbamento $[L^2]$

Sezione generica: deformazioni

- *Equazioni implicite di congruenza (caso generale)*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- *Sostituzione delle funzioni spostamento nelle equazioni implicite di congruenza*

$$\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = \Theta \Psi(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} &= 0, \gamma_{zx} = \Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \gamma_{zy} = \Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

- *Tensore della deformazione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$E(P) = \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$

Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

⇒

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Tensore della tensione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = G\Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} - y & \frac{\partial\Psi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$



5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

⇒

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Rotore della tensione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = G\Theta\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + 1 - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} + 1\right)\mathbf{k} = 2G\Theta\mathbf{k}$$



5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Rotore della tensione nel punto $P \equiv (x, y)$*

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta\mathbf{k}$$



5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione generica: calcolo della funzione ingobbamento $\Psi(x, y)$

- Equazioni indefinite di equilibrio

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, P \in \mathcal{A}}$$

- Condizioni al contorno sul mantello Γ

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma}$$

- Problema con condizioni al contorno di Neumann

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad P \in \mathcal{A}}$$

$$\boxed{\alpha \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma}$$

\Rightarrow Determinazione di $\Psi(x, y)$

(Soluzione in forma chiusa ad es. per sezioni a simmetria polare, ellittiche, triangolari isosceli o equilatero, cfr. cap. 20)

5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione generica: parametro Θ e inerzia torsionale I_t

- Condizioni di equivalenza statica alle basi

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$\tau_{zx} = G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right),$$

$$\tau_{zy} = G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

- Sostituzione delle componenti di tensione

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}x + x^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y + y^2 \right) dA = G\Theta \int_{\mathcal{A}} \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA \quad I_t$$

$$\boxed{M_t = G\Theta I_t} \quad I_t = \int_{\mathcal{A}} \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA = I_o + \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA$$

- Rigidezza torsionale

$$\boxed{\Theta = \frac{M_t}{GI_t}}$$

$$GI_t \rightarrow \text{Rigidezza torsionale } [FL^2]$$

5. Torsione uniforme: sezione generica

Sezione generica: verifica della soluzione trovata

- *Soluzione (le altre incognite sono nulle):*

$$\begin{aligned} u &= -\Theta zy, \\ v &= \Theta zx, \\ w &= \Theta \Psi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{zy} &= \Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad \left(\Theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

- *Equazioni implicite di congruenza* **Verificate ✓**
- *Equazioni di legame costitutivo* **Verificate ✓**
- *Equazioni indefinite di equilibrio*

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{cost}_z \quad \text{Verificata ✓} \quad \text{div } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

- *Condizioni al contorno sul mantello Γ*

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \quad \text{Verificata se } \Psi(x, y) \text{ è soluzione del prob. di Neumann ✓}$$

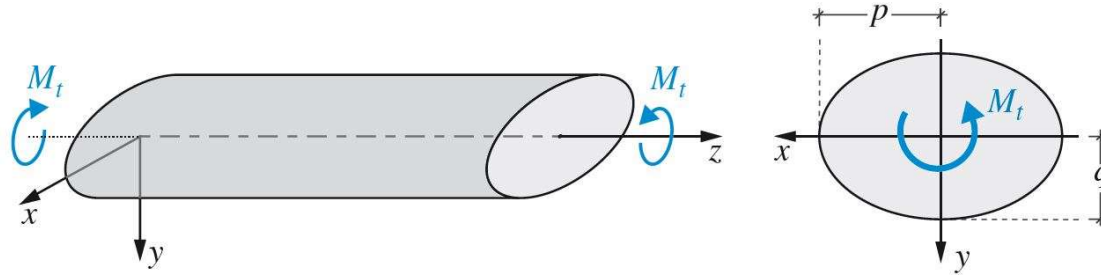
Verificata se $\Psi(x, y)$ è soluzione del prob. di Neumann ✓

- *Condizioni al contorno sulle basi*

$$\text{Verificate se } \Theta = \frac{M_t}{GI_t} \text{ con } I_t = I_0 + \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} x + \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA \quad \checkmark$$

5. Torsione uniforme: sezione generica

Esempio: sezione ellittica



Equazione della frontiera $\partial\mathcal{A}$: $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$

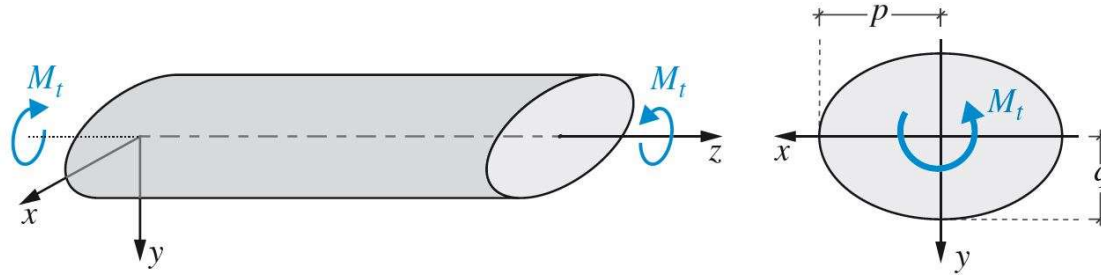
- *Soluzione funzione ingobbamento:*

$$\Psi(x, y) = kxy$$

$$k = -\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \leq 0$$

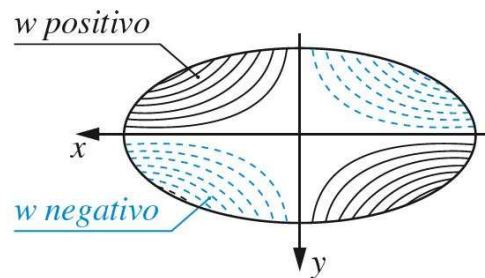
5. Torsione uniforme: sezione generica

Esempio: sezione ellittica

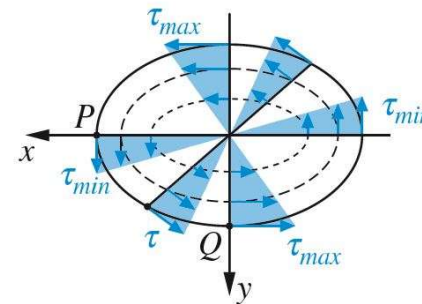


- Soluzione:**

$$I_t = I_p + k(I_y - I_x) = \pi \frac{p^3 q^3}{p^2 + q^2} \quad \tau_{zx} = -\frac{2}{\pi} \frac{M_t}{pq^3} y, \quad \tau_{zy} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{p^3 q} x. \quad \tau^{max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{pq^2}, \quad \tau^{min} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{p^2 q}$$



a)



b)