

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- **PARTE IV – Cilindro di Saint Venant**



Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- **PARTE IV – Cilindro di Saint Venant**

Problema di Saint Venant: problema dell'equilibrio elastico di un particolare continuo tridimensionale detto *cilindro di Saint Venant*. Si utilizza il modello di continuo 3D (parte III) introducendo delle *ipotesi aggiuntive* riguardanti: **a)** la geometria; **b)** la distribuzione delle forze esterne di volume e di superficie; **c)** il materiale costitutivo.



Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- **Obiettivi, Generalità**
- **Forza normale centrata,**
- **Flessione retta (flessione uniforme retta)**
- **Flessione deviata (flessione uniforme deviata)**
- **Forza normale eccentrica**
- **Flessione e taglio (flessione non uniforme)**
- **Torsione uniforme**

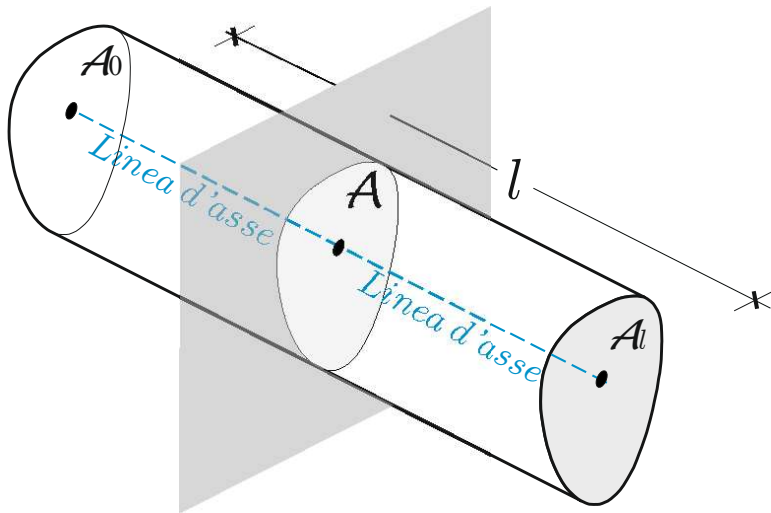


1. Problema di SV: generalità

- **Motivazioni e obiettivi**
- **Ipotesi**
 - ipotesi sulla geometria
 - ipotesi sulle forze esterne
 - ipotesi sul materiale costitutivo
- **Postulato di Saint Venant**
- **Metodo semi-inverso**
- **Formulazione analitica: equazioni risolventi e c.c.**
- **Problemi elementari**
- **Applicazione ai casi di interesse applicativo**

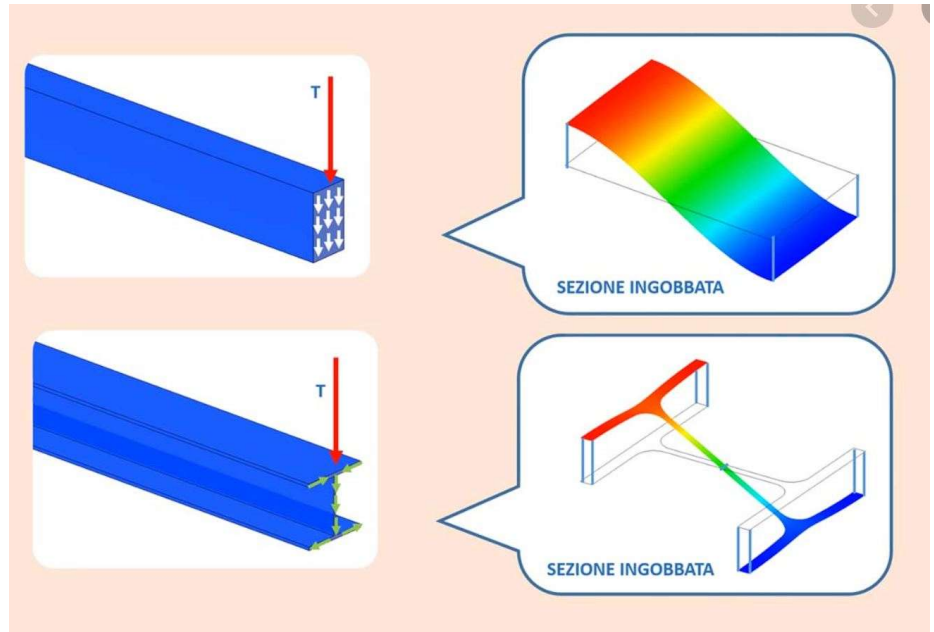
1. Problema SV: motivazioni e obiettivi

Modello di trave elastica 1D



Nel modello di trave 1D (parte II), le sezioni si assumono rigide

Caso reale



Nei casi reali, le sezioni possono deformarsi e le forze interne possono variare all'interno di una stessa sezione

Obiettivi: proporre un modello più evoluto per lo studio delle travi. Si coniugano i risultati ottenuti dal modello di trave 1D ai risultati ottenuti dal modello di continuo 3D



1. Problema di SV: generalità

Adhémar Jean Claude Barré de Saint Venant (1797-1886)

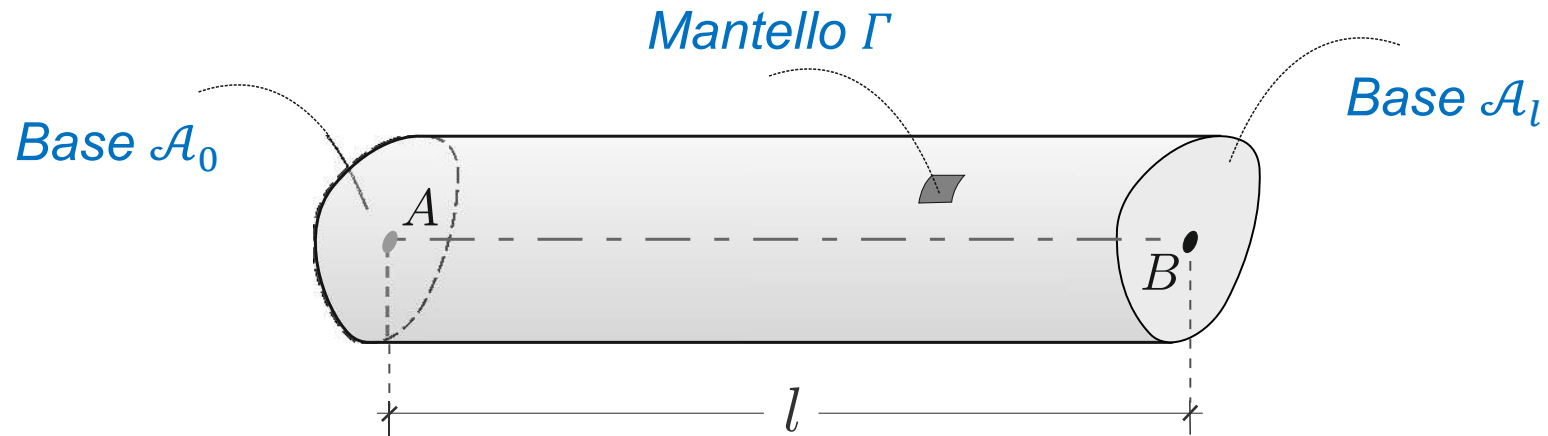


de Saint-Venant, A.J.C.: Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considérations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général, et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à diverse efforts s'exerçant simultanément. *Mémoires des Savants étrangers*, vol XIV, 1855

Lettura: E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, 1981 - §12.1, 12.5, 12.6 (vedi www.pcasini.it/disg/sdc)

1. Problema SV: ipotesi

Ipotesi sulla geometria: *prisma retto, asse rettilineo, sezione costante*

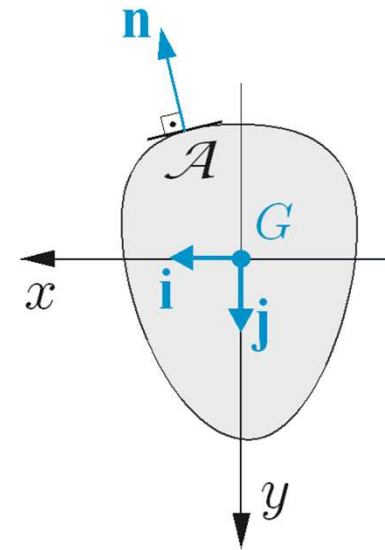
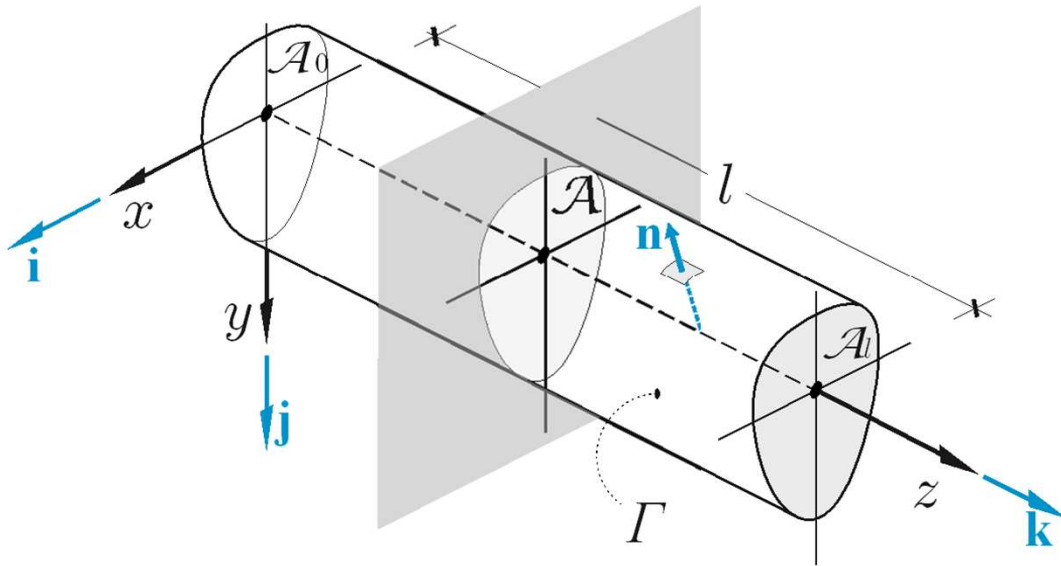


$$\text{Frontiera: } \partial\mathcal{C} = \Gamma \cup \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$$

Obiettivi: *proporre un modello più evoluto per lo studio delle travi. Si coniugano i risultati ottenuti dal modello di trave 1D ai risultati ottenuti dal modello di continuo 3D*

1. Problema SV: ipotesi

Ipotesi sulla geometria: *Sistema di riferimento locale*



$$\mathbf{n} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mantello Γ : versore normale uscente \mathbf{n}

Base \mathcal{A}_0 : versore normale uscente $-\mathbf{k}$

Base \mathcal{A}_1 : versore normale uscente \mathbf{k}

Sezione generica \mathcal{A}

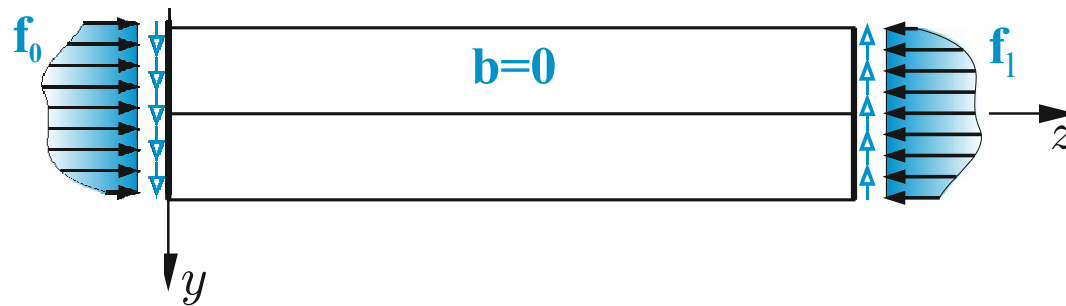
x, y assi centrali principali d'inerzia

$$\text{Frontiera: } \partial\mathcal{C} = \Gamma \cup \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$$

$$\text{Normali uscenti: } \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{n} & -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{matrix}$$

1. Problema SV: ipotesi

Ipotesi sulle forze esterne: *Forze di volume nulle, forze di superficie solo sulle basi. Poiché il solido è in equilibrio, le forze \mathbf{f}_0 e \mathbf{f}_l costituiscono un sistema di forze staticamente equilibrato*



$$\mathbf{b}(P) = \mathbf{0}, \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{0}, \quad P \in \Gamma$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}_0, \quad P \in \mathcal{A}_0$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}_l, \quad P \in \mathcal{A}_l$$



1. Problema SV: ipotesi

Ipotesi sul materiale costitutivo: *Elastico, Lineare, Isotropo, Omogeneo*

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

1. Problema SV: incognite

INCOGNITE:

Forma compatta

Incognite cinematiche

$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$

Incognite statiche

$\mathbf{T}(P)$

Forma scalare

(sistema di riferimento locale)

Incognite cinematiche

$u(P), v(P), w(P)$

$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$

$\gamma_{xy}(P), \gamma_{zy}(P), \gamma_{zx}(P)$

Incognite statiche

$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$

$\tau_{xy}(P), \tau_{zy}(P), \tau_{zx}(P)$



4. Problema elastico: formulazione analitica

Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$$

Incognite statiche

$$\mathbf{T}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\text{Div } \mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in S_f$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P) = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}(P)$$



Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$$u(P), v(P), w(P)$$

$$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$$

Incognite statiche

$$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$$

$$\tau_{xy}(P), \tau_{yz}(P), \tau_{xz}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad +c.c.$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \quad + c.c.$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

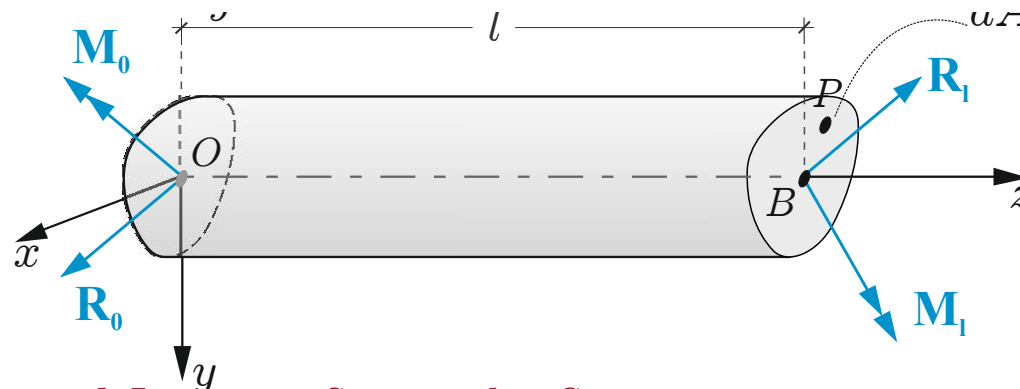
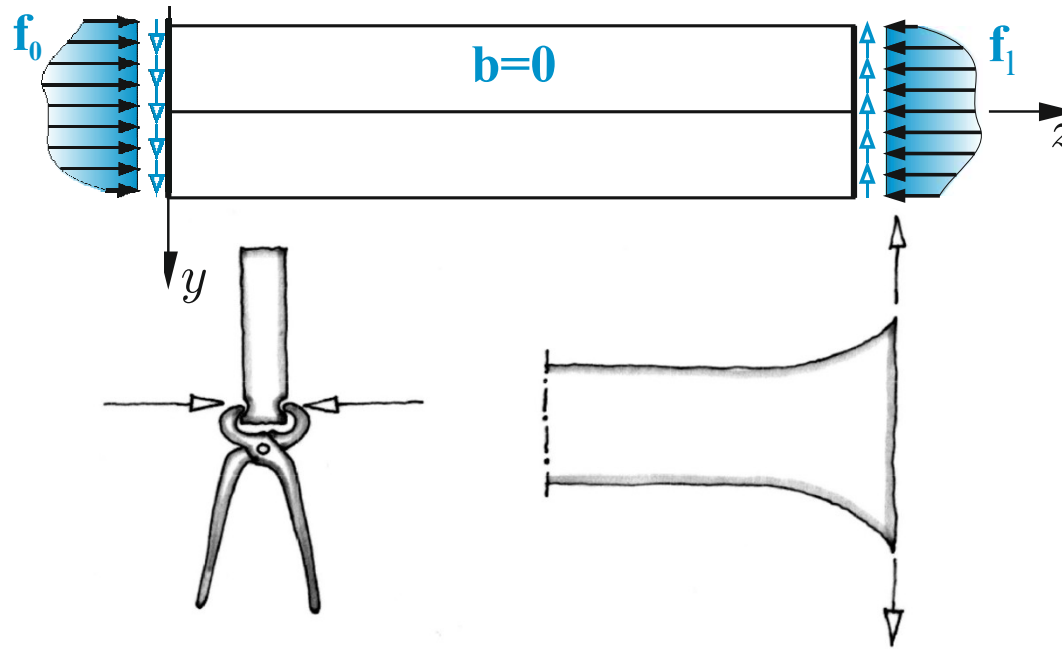
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

1. Problema SV: postulato di Saint Venant

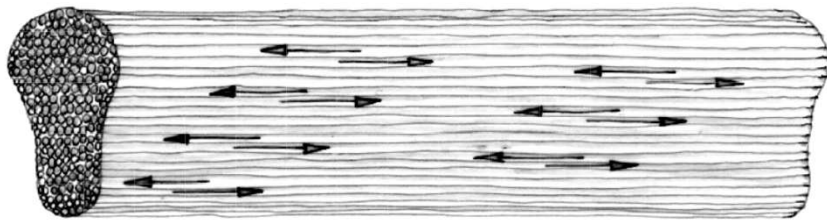
Postulato di Saint Venant



1. Problema SV: metodo semi-inverso

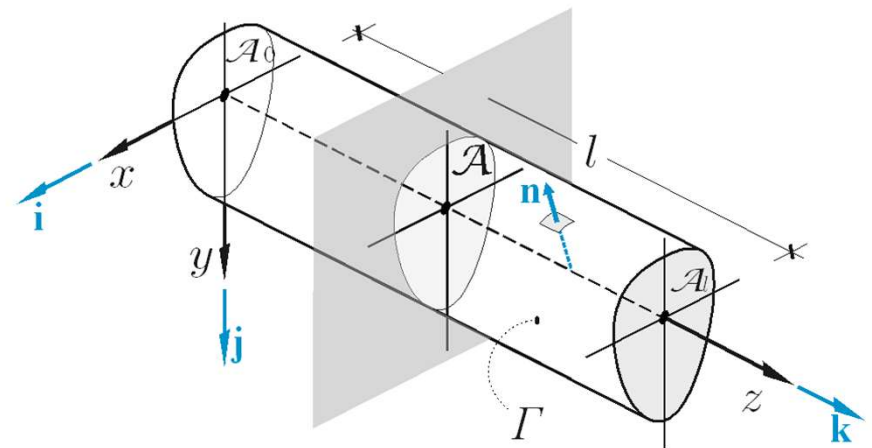
Metodo semi-inverso: sulla base dell'esperienza e/o dell'intuizione si fanno delle ipotesi non solo sui **dati** del problema ma anche su alcune delle **incognite**. Se la soluzione (in parte ipotizzata, in parte da determinare) soddisfa tutte le equazioni del problema elastico, per il teorema di esistenza e unicità, essa è proprio la soluzione cercata.

Ipotesi sullo stato tensionale



$$\sigma_x(P) = 0, \sigma_y(P) = 0, \tau_{xy}(P) = 0$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

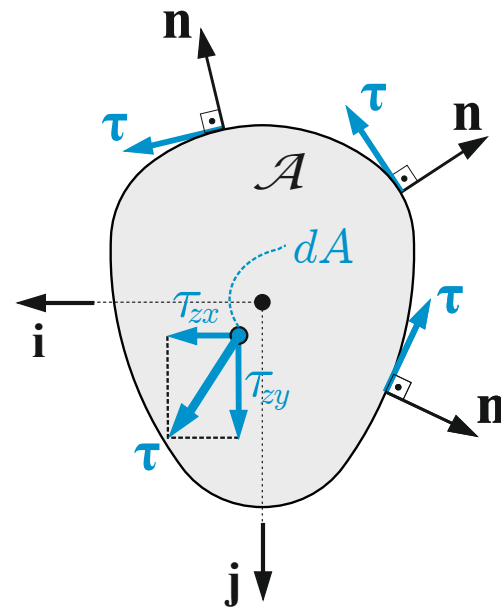
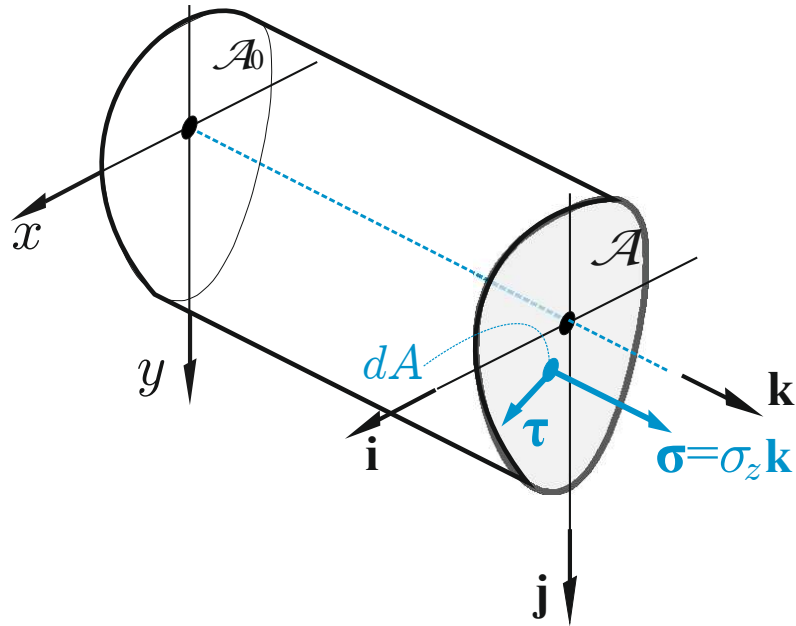


$$\sigma_z(P), \tau_{xz}(P), \tau_{yz}(P)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

1. Problema SV: metodo semi-inverso

Tensioni normali e tangenziali



$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vettore Tensioni normali $\boldsymbol{\sigma}$: agisce in ogni punto perpendicolarmente alla sezione

Vettore Tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$: agisce in ogni punto parallelamente alla sezione

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_z(P)\mathbf{k} : \text{vettore tensioni normali } [FL^{-2}]$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(P)\mathbf{i} + \tau_{zy}(P)\mathbf{j} : \text{vettore tensioni tangenziali } [FL^{-2}]$$

1. Problema SV: equazioni risolventi

Equazioni implicite di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + c.c.$$

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

ipotesi:
 $\sigma_x = \sigma_y = \phi \quad \tau_{xy} = \phi$

Equazioni indefinite di equilibrio (b=0)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \partial\mathcal{C}$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{0}, \quad P \in \Gamma$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}_0, \quad P \in \mathcal{A}_0$$

$$\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}_l, \quad P \in \mathcal{A}_l$$

1. Problema SV: equazioni risolventi

Equazioni implicite di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + c.c.$$

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

c.c. sul mantello

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad P \in \Gamma$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

c.c. sulle basi

$$\mathbf{T}(P)(-\mathbf{k}) = \mathbf{f}_0, \quad P \in \mathcal{A}_0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{k} = \mathbf{f}_l, \quad P \in \mathcal{A}_l$$



1. Problema SV: equazioni risolventi

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$



$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \text{cost}_z$$

le τ non dipendono da z :
tutte le sezioni
presentano la stessa
distribuzione delle
tensioni tangenziali

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

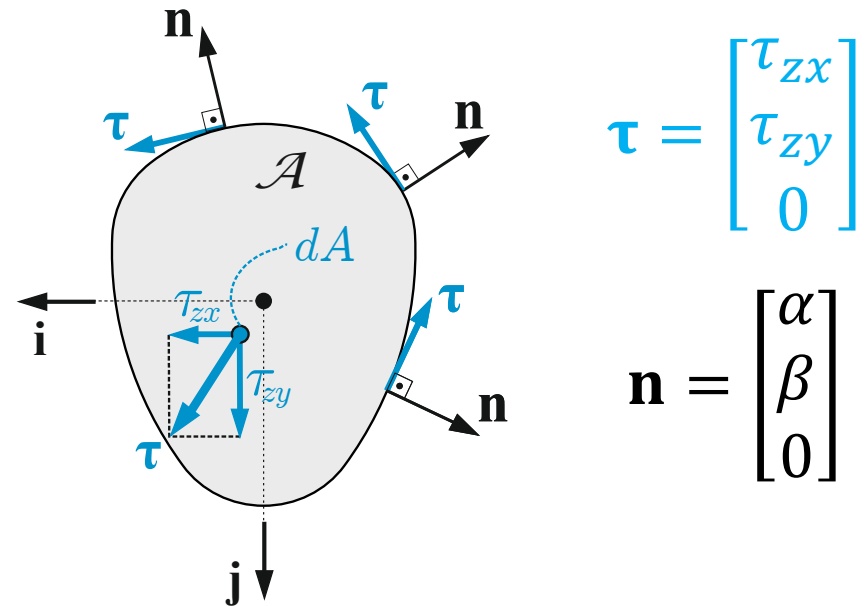
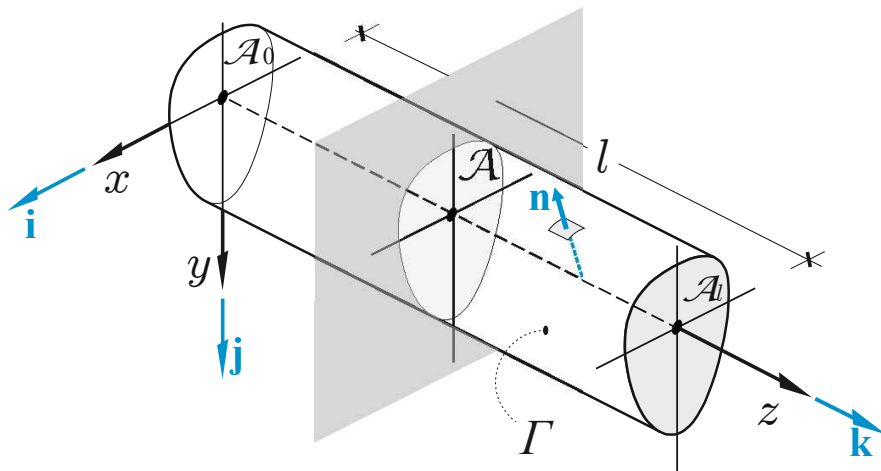


$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

$\text{div } \boldsymbol{\tau}$

1. Problema SV: c.c. sul mantello

Condizioni al contorno sul mantello



$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad P \in \Gamma$$

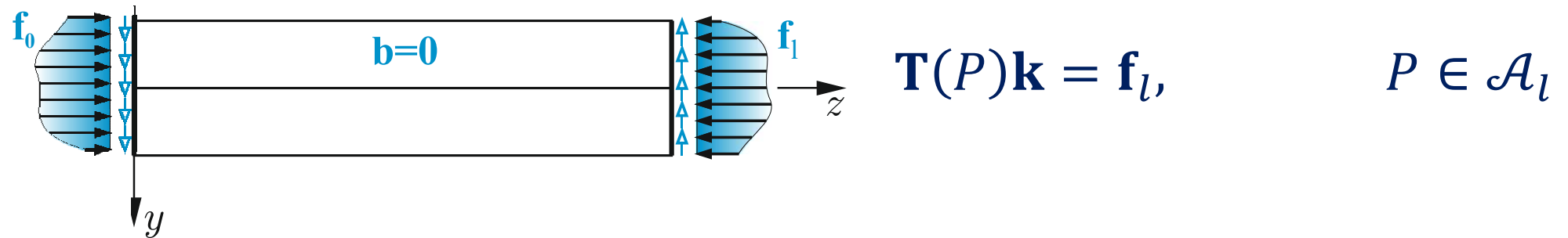
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$$

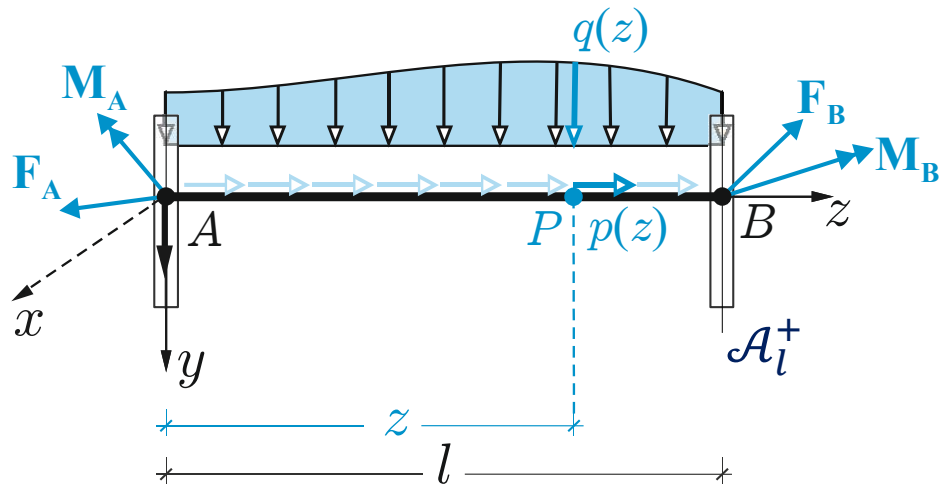
1. Problema SV: c.c. sulle basi

Condizioni al contorno sulla base \mathcal{A}_l

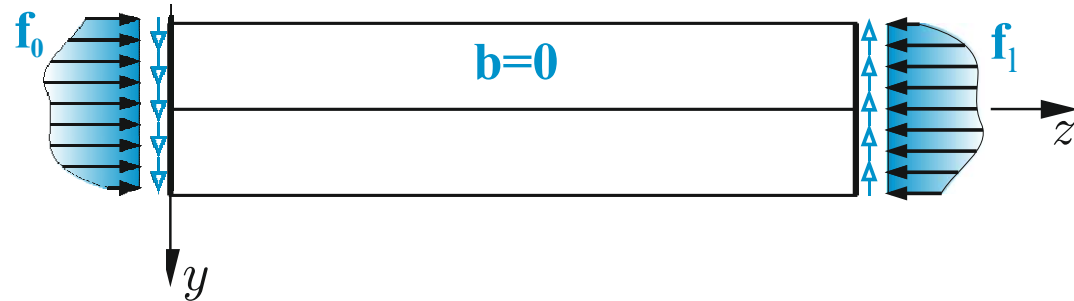


1. Problema SV: c.c. sulle basi

Confronto con il modello di trave 1D



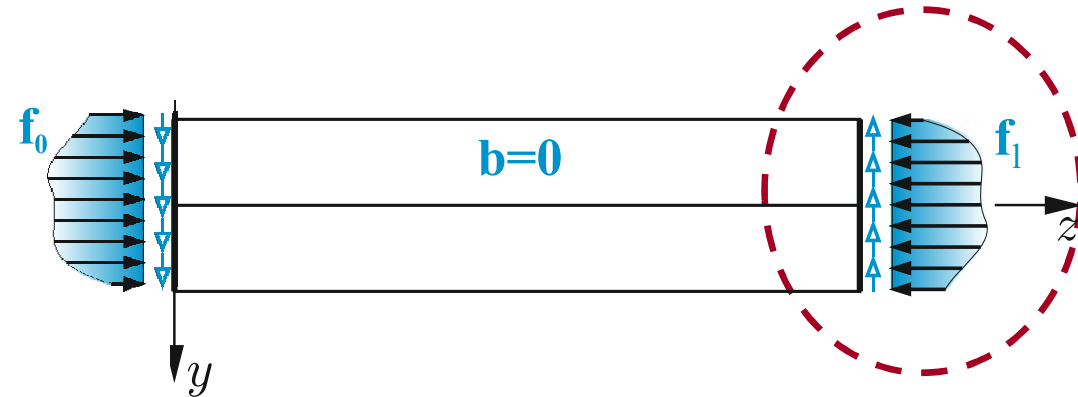
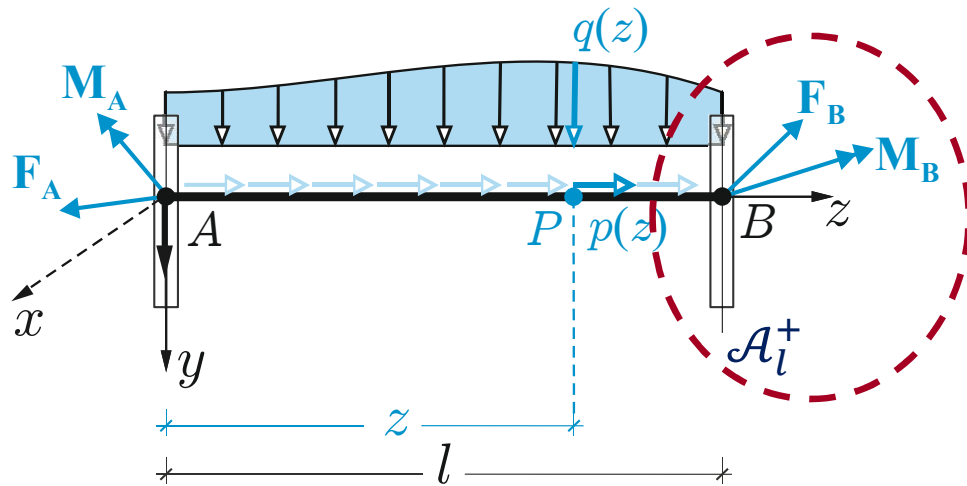
Forze esterne trave 1D



Forze esterne cilindro Saint Venant

1. Problema SV: c.c. sulle basi

Confronto con il modello di trave 1D



Forze esterne trave 1D
sulla base \mathcal{A}_l

$$\mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B$$

$$\mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

Forze esterne cilindro Saint Venant
sulla base \mathcal{A}_l

$$\mathbf{F}_B = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{f}_l dA$$

$$\mathbf{M}_B = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_l dA$$



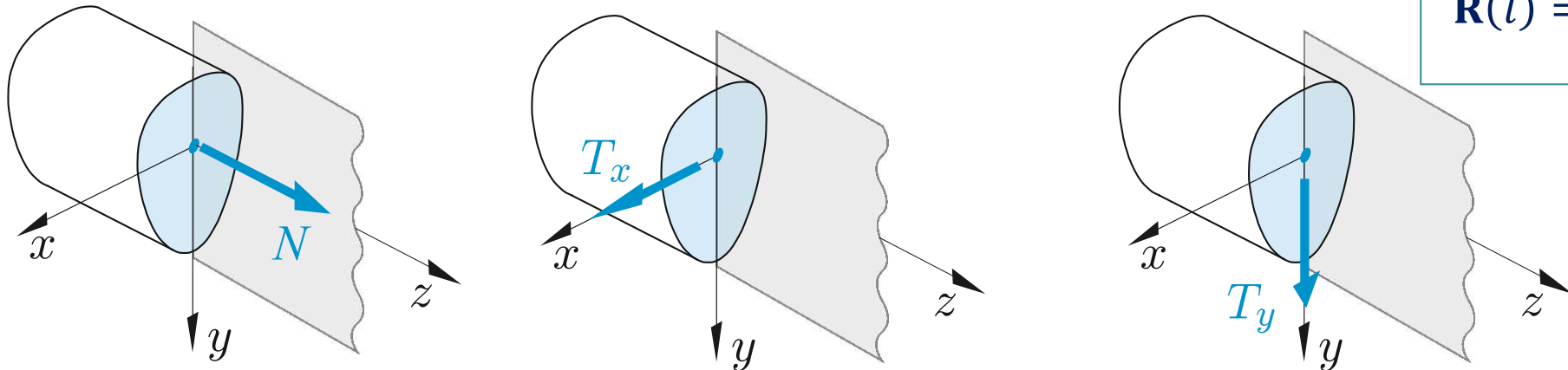
$$\mathbf{R}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{f}_l dA$$

$$\mathbf{M}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_l dA$$

1. Problema SV: c.c. sulle basi

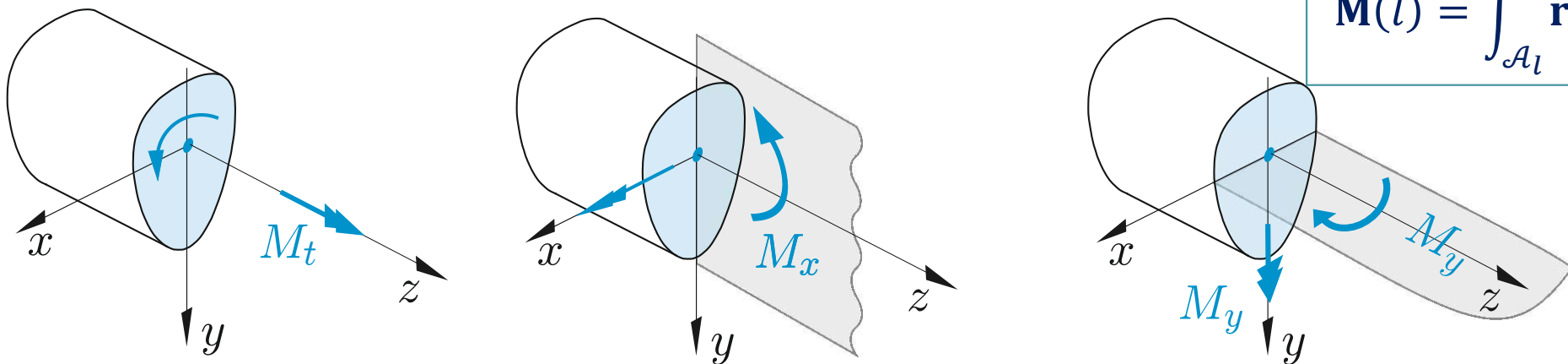
Caratteristiche della sollecitazione sulla base \mathcal{A}_l : componenti di $\mathbf{R}(l)$ [F]

$$\mathbf{R}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{f}_l dA$$



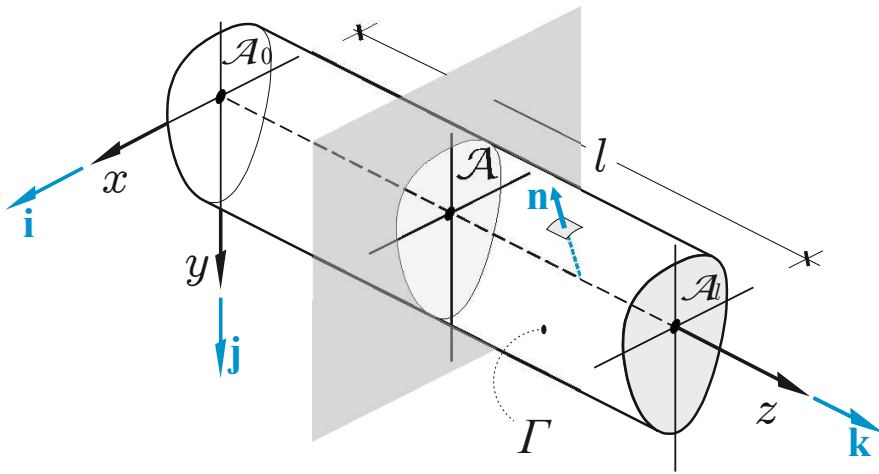
Caratteristiche della sollecitazione sulla base \mathcal{A}_l : componenti di $\mathbf{M}(l)$ [FL]

$$\mathbf{M}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_l dA$$



1. Problema SV: c.c. sulle basi

Condizioni al contorno sulla base \mathcal{A}_l



$$\mathbf{T}(P)\mathbf{k} = \mathbf{f}_l, \quad P \in \mathcal{A}_l$$

$$\mathbf{R}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{f}_l dA = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{T}(P)\mathbf{k} dA$$

$$\mathbf{M}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_l dA = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(P)\mathbf{k} dA$$

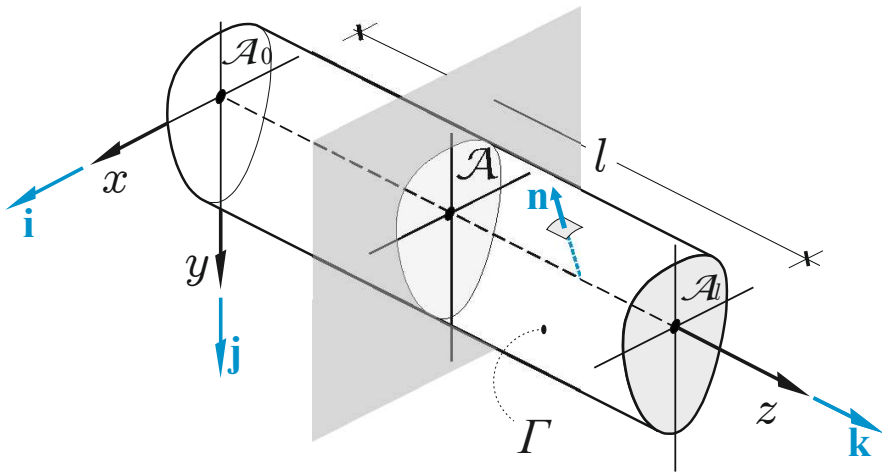
$$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T_x(z)\mathbf{i} + T_y(z)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}(z) = M_t(z)\mathbf{k} + M_x(z)\mathbf{i} + M_y(z)\mathbf{j}$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

1. Problema SV: c.c. sulle basi

Condizioni al contorno sulla base \mathcal{A}_l



$$\mathbf{T}(P)\mathbf{k} = \mathbf{f}_l, \quad P \in \mathcal{A}_l$$

$$\mathbf{R}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{f}_l dA = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{T}(P)\mathbf{k} dA$$

$$\mathbf{M}(l) = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_l dA = \int_{\mathcal{A}_l} \mathbf{r} \times \mathbf{T}(P)\mathbf{k} dA$$

Equivalenza statica fra distribuzione delle tensioni e caratteristiche della sollecitazione

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z dA \quad T_x = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zx} dA \quad T_y = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zy} dA$$

$$M_x = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z y dA \quad M_y = - \int_{\mathcal{A}} \sigma_z x dA \quad M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

1. Problema SV: formulazione analitica

INCOGNITE:

Forma compatta

Incognite cinematiche

$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$

Incognite statiche

$\mathbf{T}(P)$

Forma scalare

(sistema di riferimento locale)

Incognite cinematiche

$u(P), v(P), w(P)$

$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$

~~$\gamma_{xy}(P), \gamma_{zy}(P), \gamma_{zx}(P)$~~

Incognite statiche

~~$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$~~

~~$\tau_{xy}(P), \tau_{zy}(P), \tau_{zx}(P)$~~

1. Problema SV: formulazione analitica

INCOGNITE:

Forma compatta

Incognite cinematiche

$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$

Incognite statiche

$\mathbf{T}(P)$

Forma scalare

(sistema di riferimento locale)

Incognite cinematiche

$u(P), v(P), w(P)$

$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$

$\gamma_{zy}(P), \gamma_{zx}(P)$

Incognite statiche

$\sigma_z(P)$

$\tau_{zy}(P), \tau_{zx}(P)$

1. Problema SV: formulazione analitica

Equazioni implicite di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + c.c.$$

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{cost}_z$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, P \in \mathcal{C}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$N = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z dA \quad T_x = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zx} dA \quad T_y = \int_{\mathcal{A}} \tau_{zy} dA \quad P \in \mathcal{A}$$

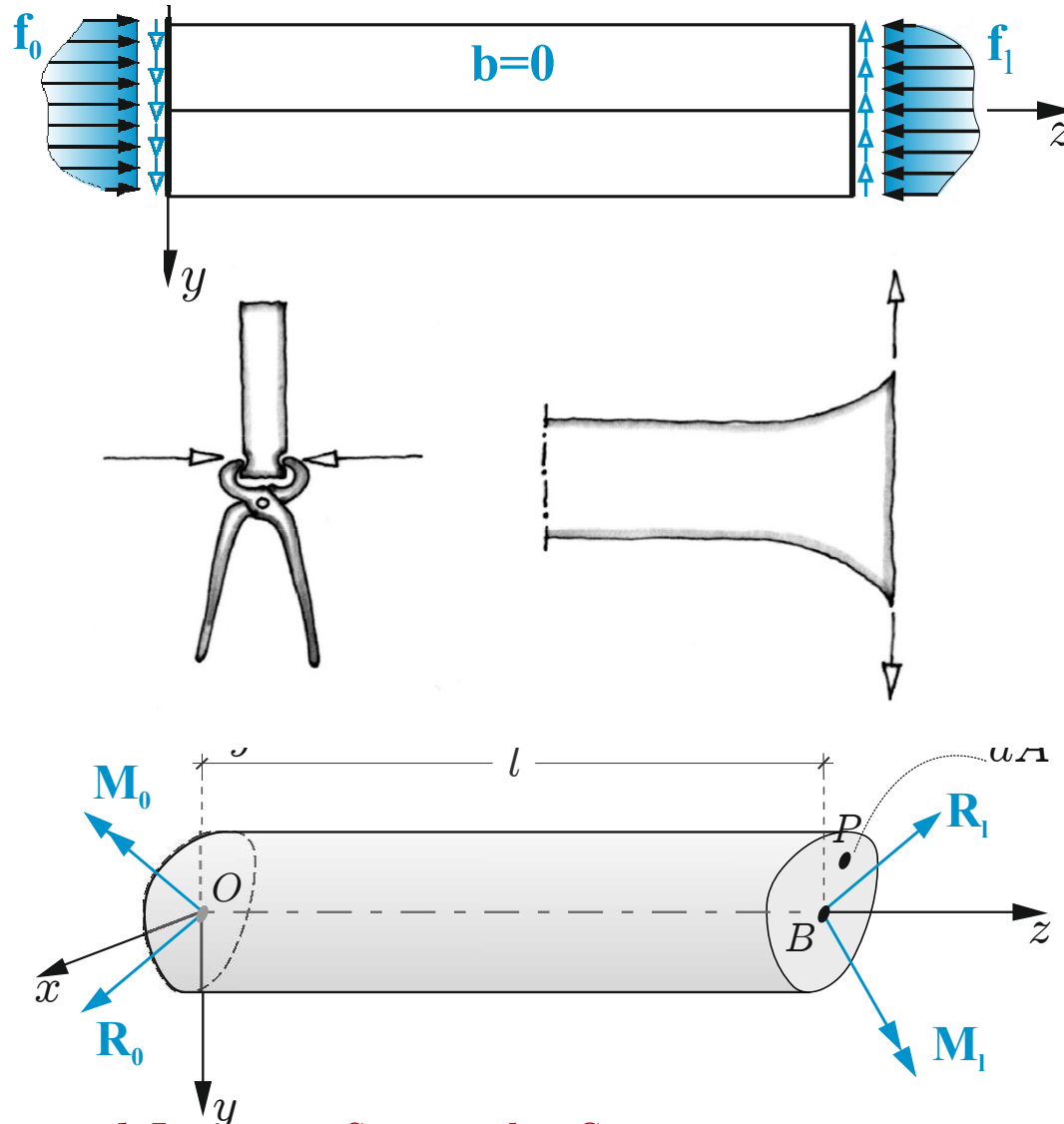
$$M_x = \int_{\mathcal{A}} \sigma_z y dA \quad M_y = -\int_{\mathcal{A}} \sigma_z x dA \quad M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$

Legge generalizzata di Hooke

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{zy}$$

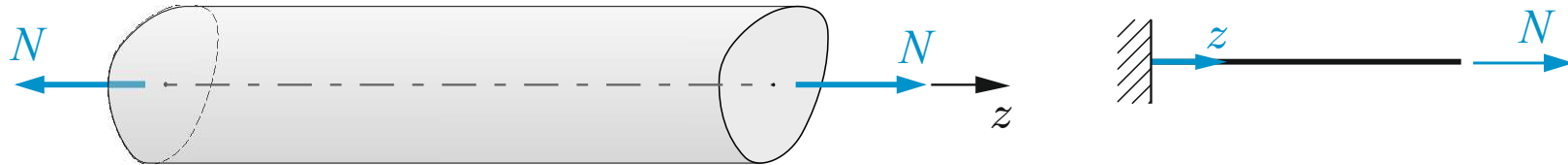
1. Problema SV: equazioni risolventi

Postulato di Saint Venant



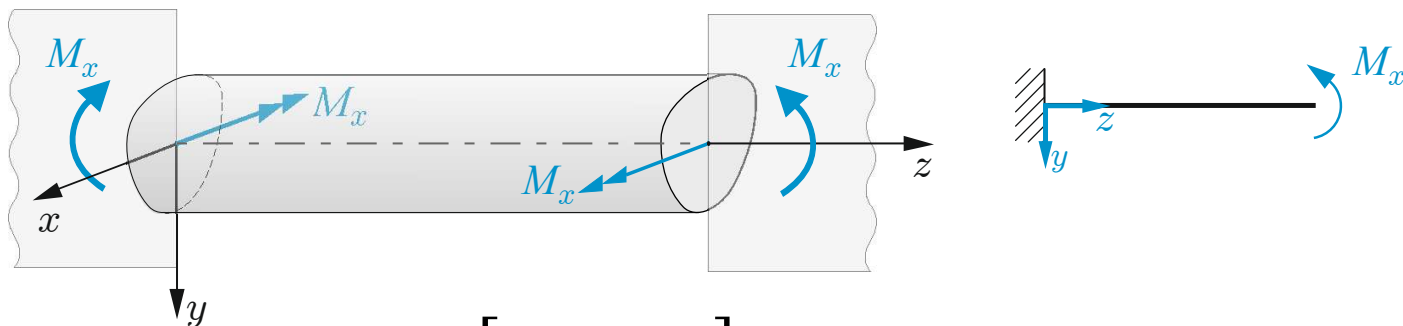
1. Problema SV: Problemi elementari

A. Forza normale centrata



$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

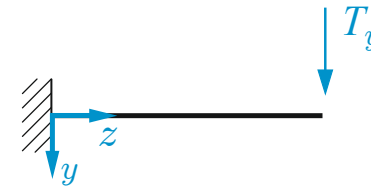
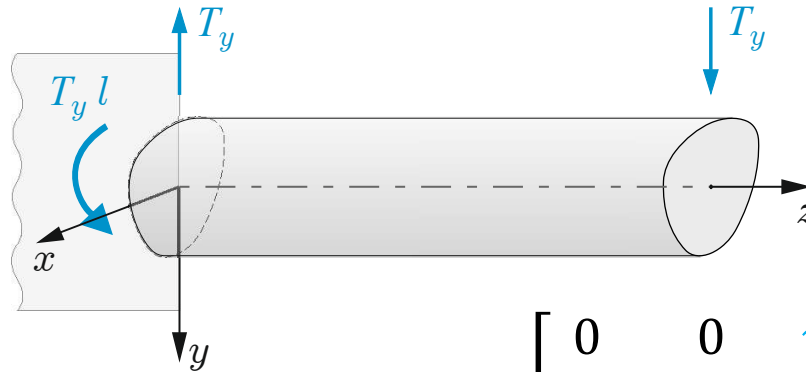
B. Flessione retta (flessione uniforme) M_x (o M_y)



$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

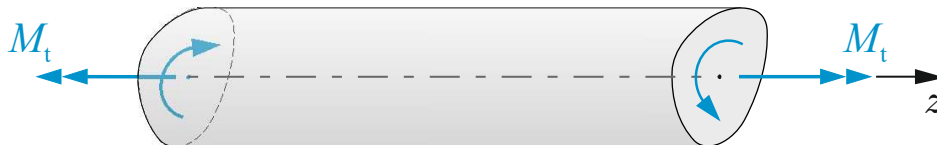
1. Problema SV: Problemi elementari

C. Flessione e Taglio (flessione non uniforme) T_y (o T_x)



$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

D. Torsione uniforme M_t



$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

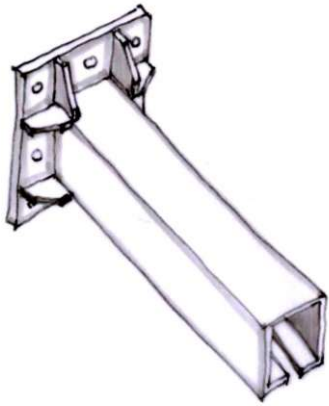


Parte IV - Il Problema di Saint Venant

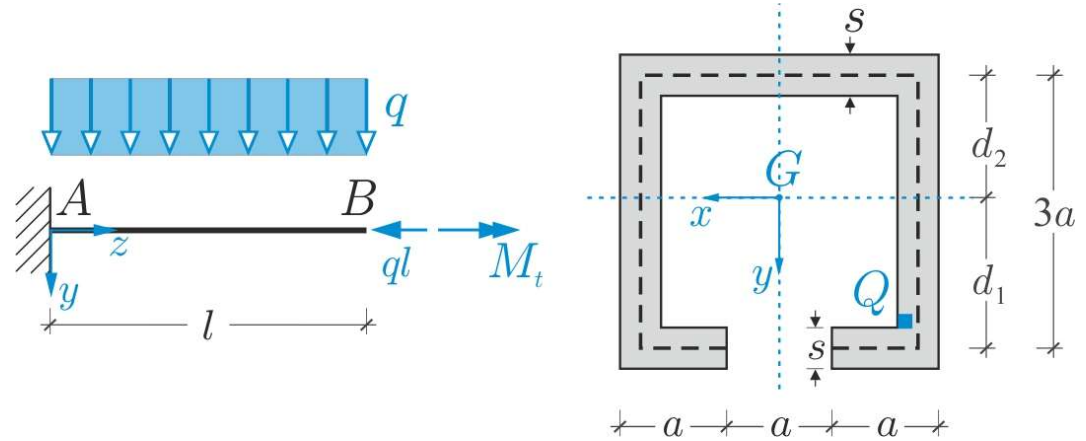
- **Applicazione della teoria di Saint Venant ai casi reali**
- **Esempi**

Applicabilità del modello di Saint Venant

- **Procedura operativa: esempio**



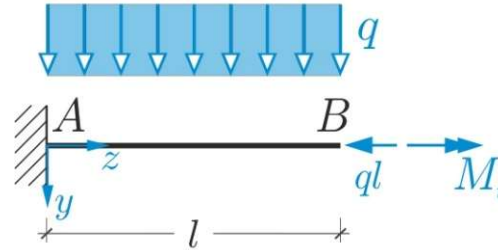
Struttura reale



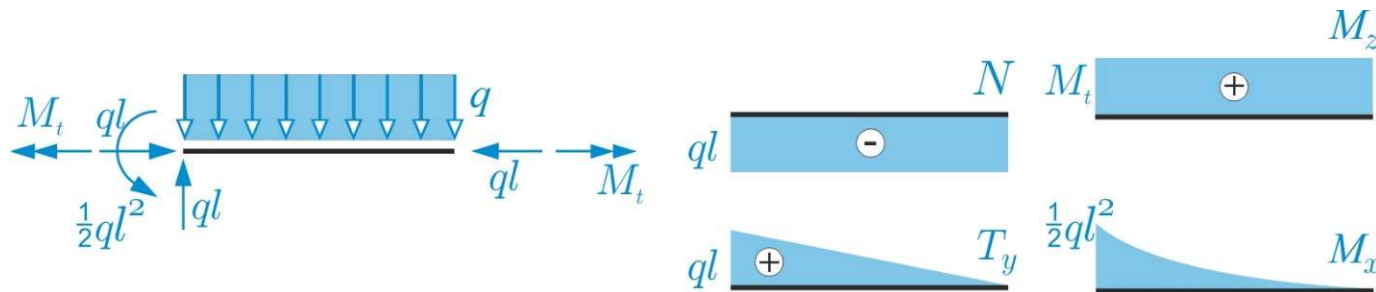
Modello 1D

Applicabilità del modello di Saint Venant

- **Procedura operativa: esempio**

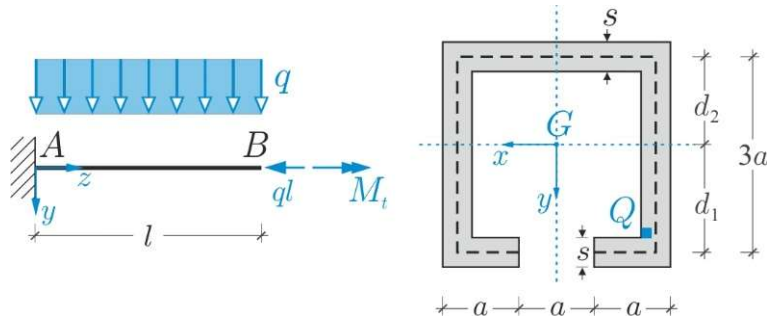


Modello 1D

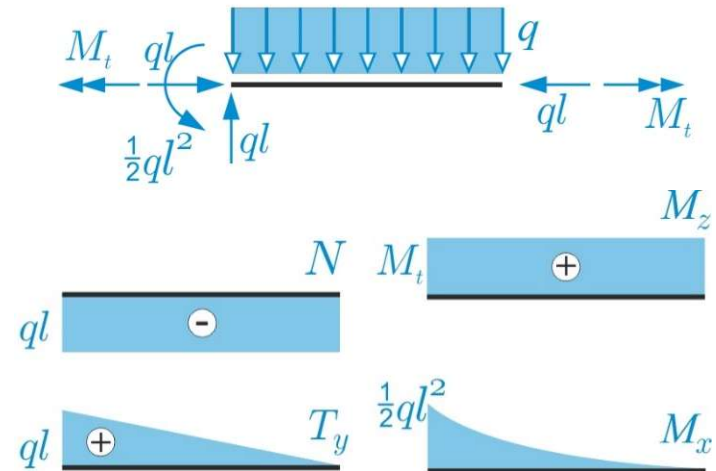


Modello 1D: soluzione

- Procedura operativa: esempio



Modello 1D




Modello 1D: soluzione

Sezione in A


$$N = -ql$$

$$M_x = -\frac{1}{2}ql^2$$

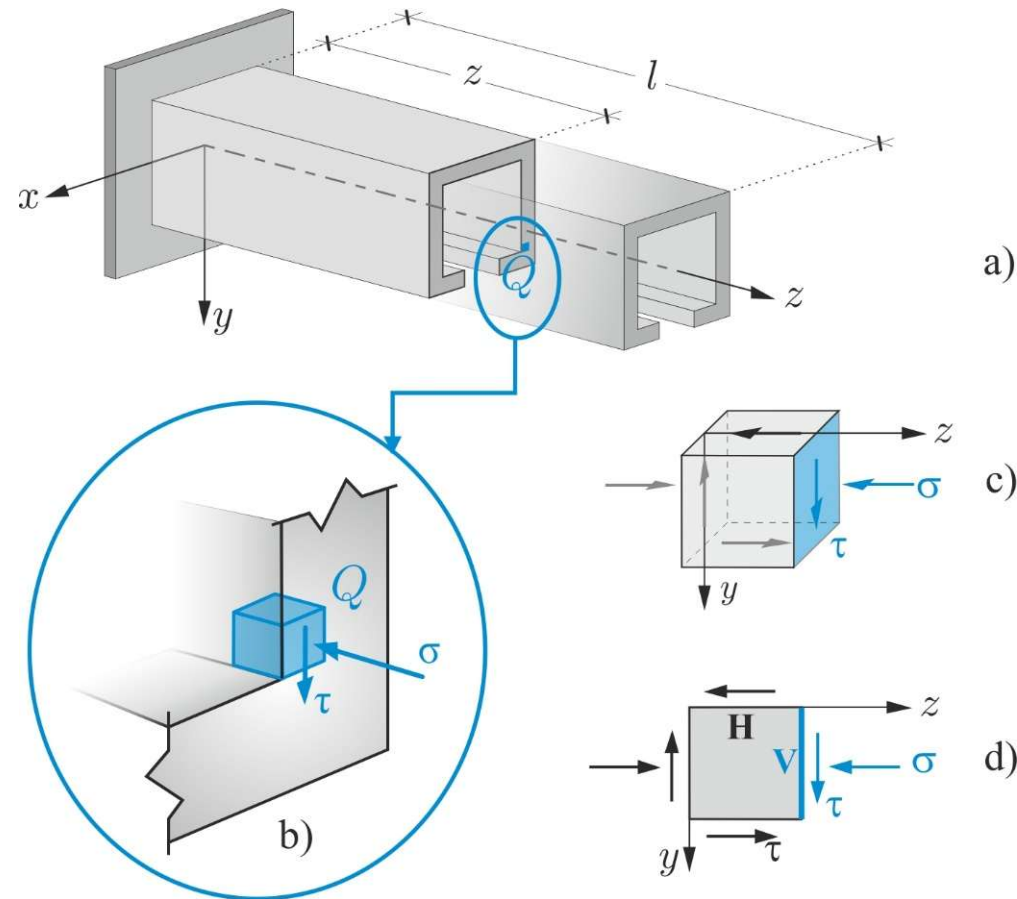
→ 

$$T_y = ql$$

$$M_z = M_t$$

→ 

- Procedura operativa: esempio



Modello 3D

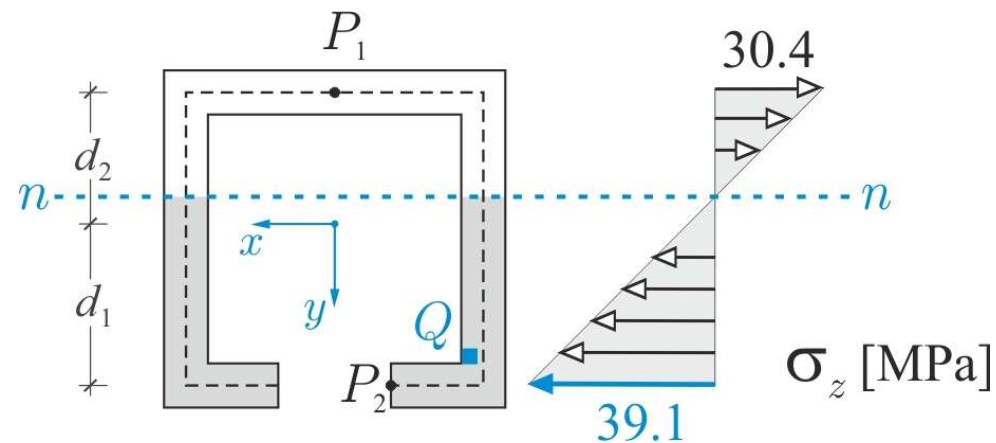
- **Procedura operativa: esempio**

Sezione in A

$$N = -ql$$

$$M_x = -\frac{1}{2}ql^2$$

→ σ_z



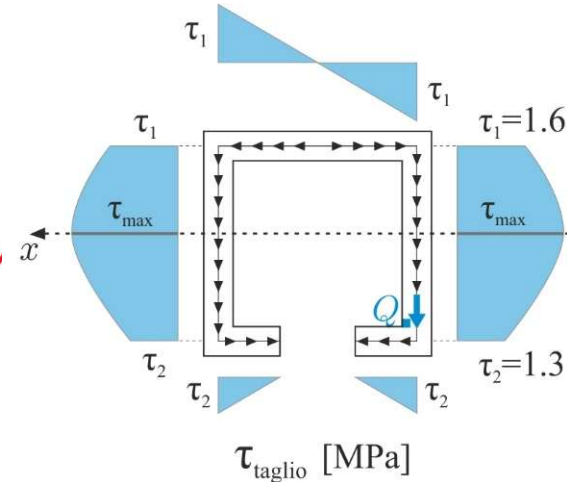
Distribuzione delle tensioni normali (Navier)

- Procedura operativa: esempio

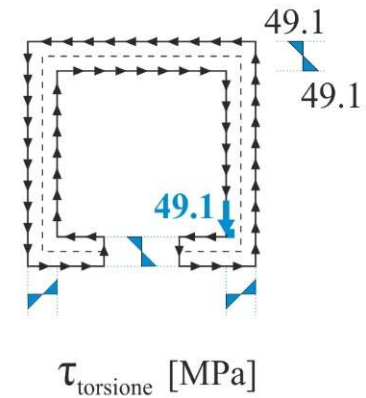
Sezione in A

$$T_y = ql$$

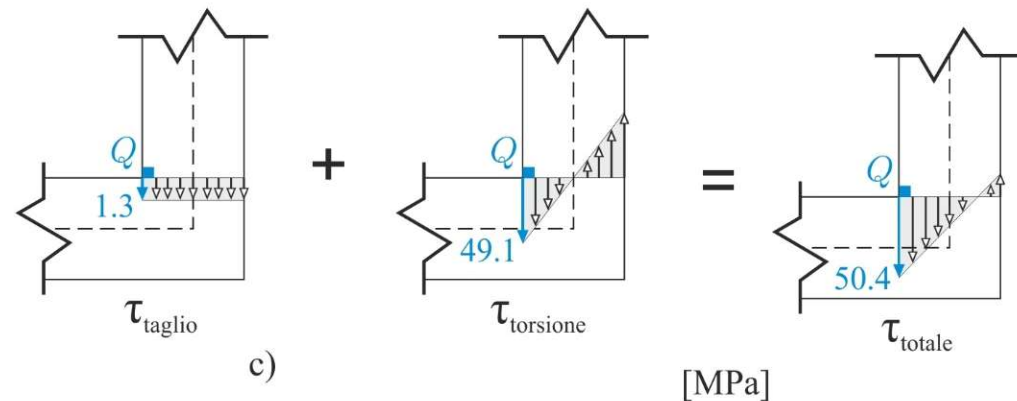
$$M_z = M_t$$



a)



b)



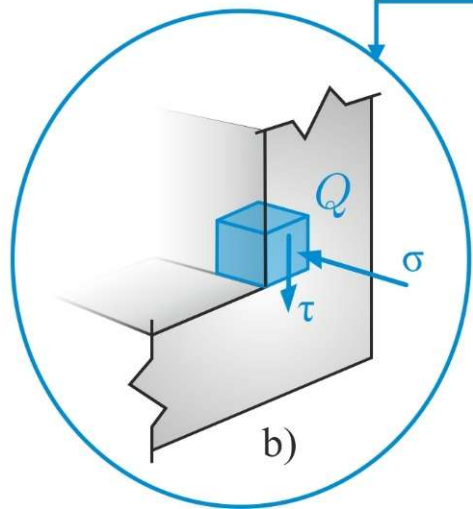
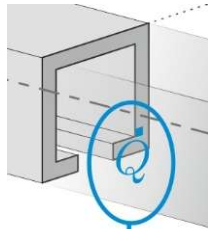
c)

Distribuzione delle tensioni tangenziali [MPa]

- Taglio (Jourawsky)
- Torsione uniforme (sezione sottile aperta)

- **Procedura operativa: esempio**

Stato tensionale nel punto Q (incastro) [MPa]



$$\sigma_z = \sigma = -39.1 \quad \tau_{zy} = \tau = 50.4 \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$$

$$T(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50.4 \\ 0 & 50.4 & -39.1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} I_1 = \sigma_z = -39.1 \text{ MPa} \\ I_2 = -\tau_{zy}^2 = -2540 \text{ MPa}^2 \\ I_3 = \det(T) = 0 \end{cases}$$