

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- **3b. Tensoflessione**
- 3c. Forza normale eccentrica
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- 5. Torsione uniforme



Lezione

3. Sollecitazioni composte

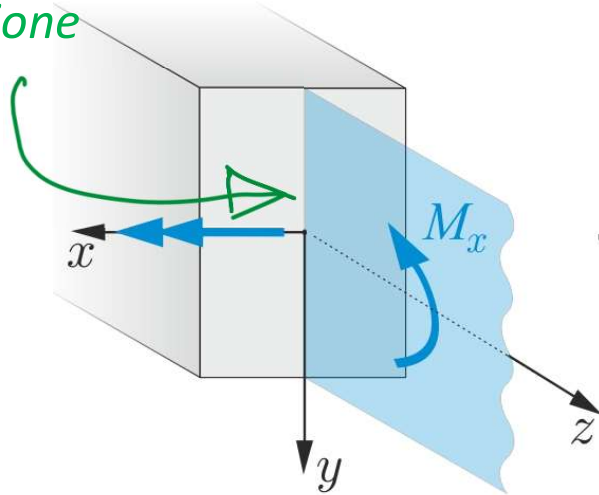
- Flessione deviata
- **Tensoflessione (pressoflessione) deviata**
- **Forza normale eccentrica**
- Esercizi (sito: E16, testo: §19.5-19.7)

RIEPILOGO Flessione Retta

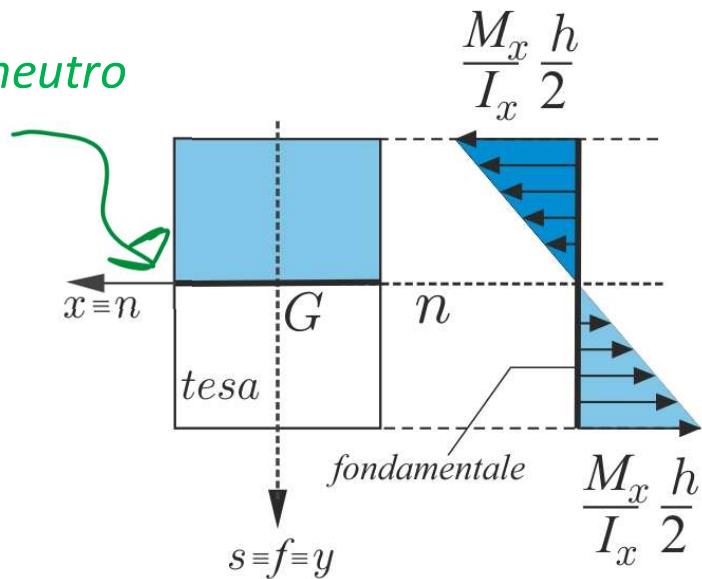
Flessione retta M_x

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Asse sollecitazione



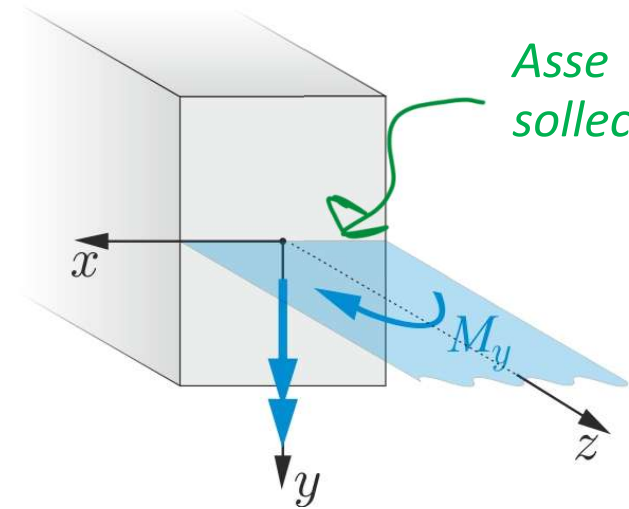
Asse neutro



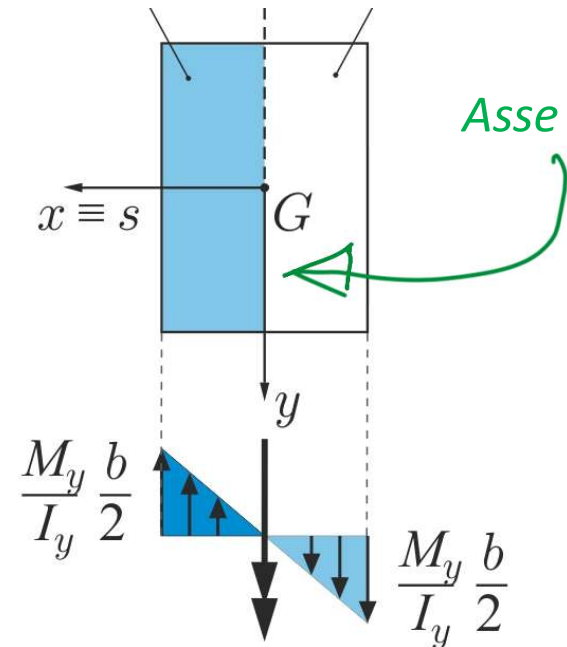
Flessione retta M_y

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x$$

Asse sollecitazione



Asse neutro



RIEPILOGO Flessione deviata

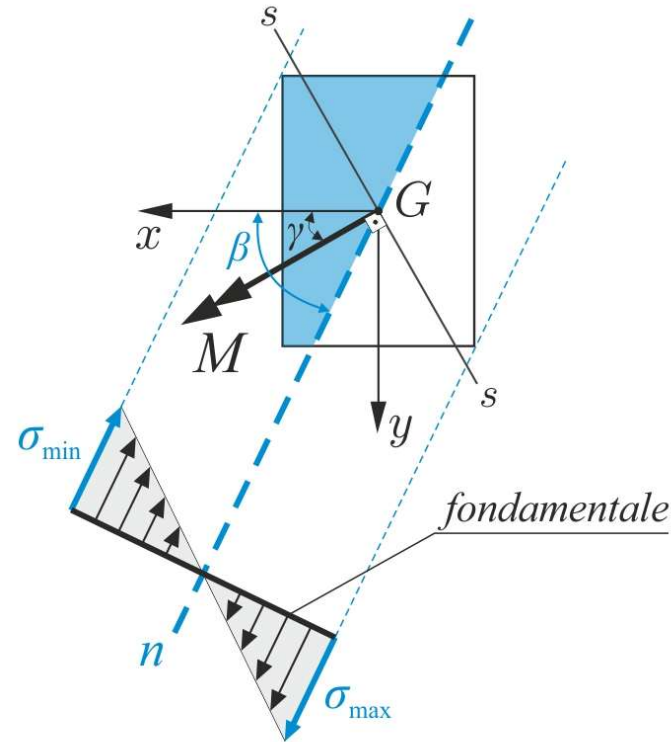
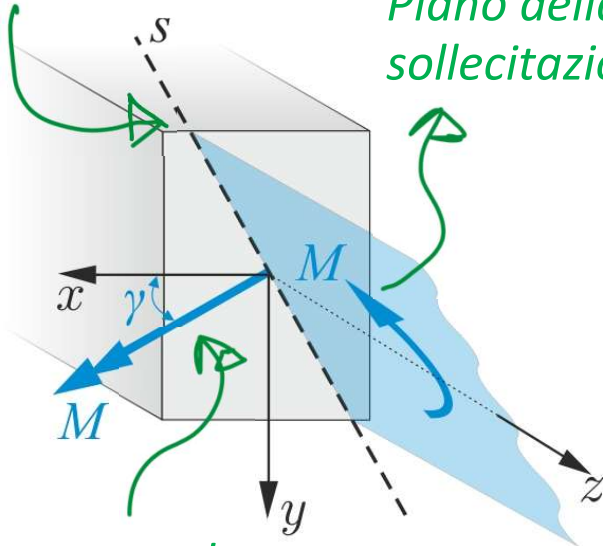
Posizione del problema

Asse

sollecitazione

Piano della
sollecitazione

Asse momento



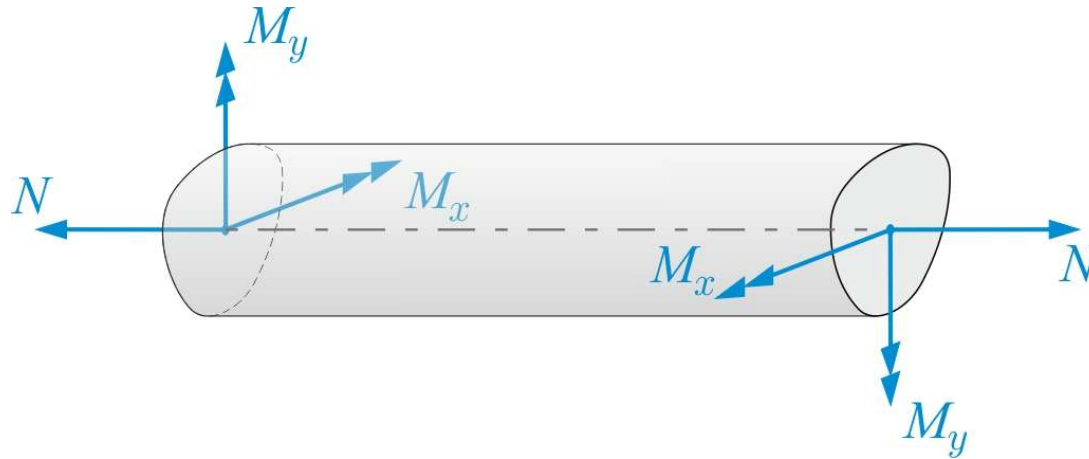
Asse neutro

$$y = \tan \beta x$$

$$\sigma_z = \frac{M \cos \gamma}{I_x} y - \frac{M \sin \gamma}{I_y} x$$

3b. Tensoflessione deviata

Posizione del problema



Sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

3b. Tensoflessione deviata

Stato tensionale: rappresentazione grafica

Formula generalizzata di Navier

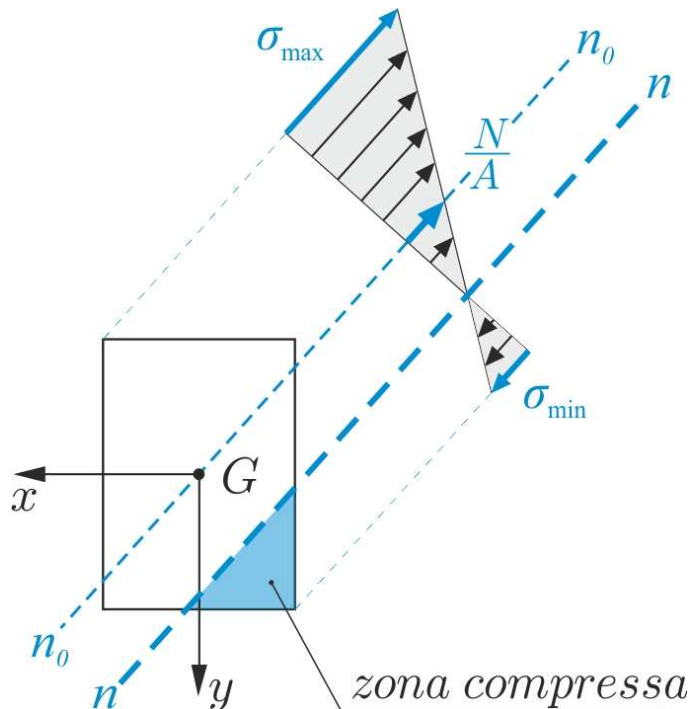
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$G \equiv (0,0) \Rightarrow \sigma_G = \frac{N}{A}$$

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow y = \tan \beta x + p$$

$$\tan \beta = \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \quad p = -\frac{M_y A}{N I_y}$$



L'asse neutro NON passa per il baricentro

L'asse neutro NON è perpendicolare all'asse di sollecitazione



Lezione

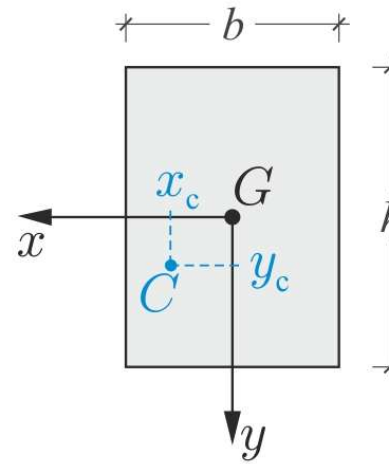
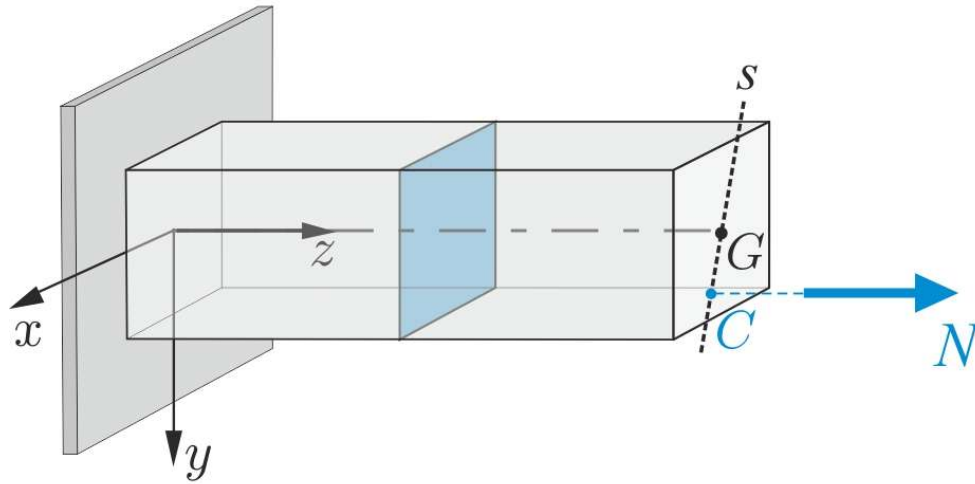
Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- **3c. Forza normale eccentrica**
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- 5. Torsione uniforme



3c. Forza normale eccentrica

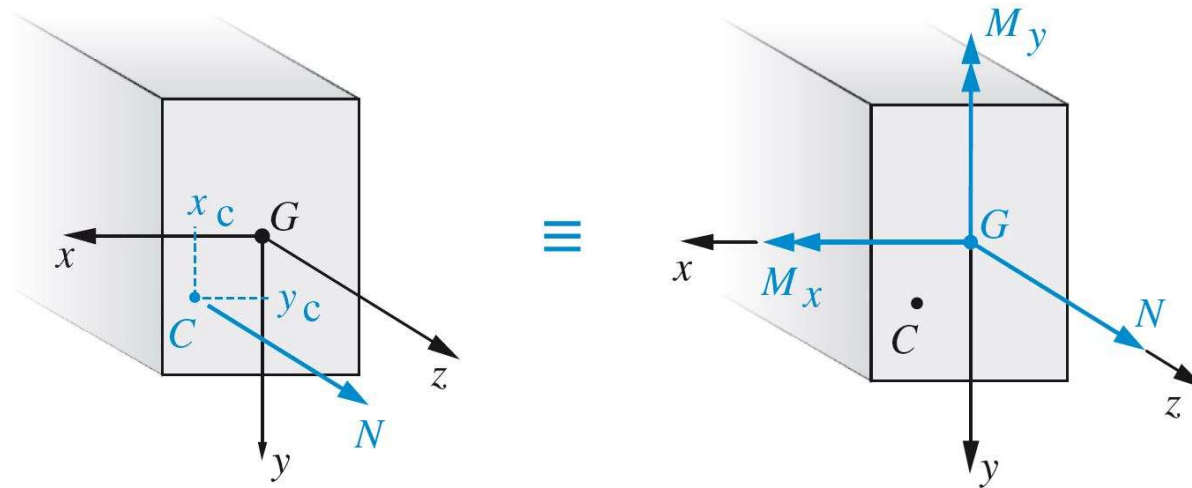
Posizione del problema



*C : centro di
sollecitazione*

3c. Forza normale eccentrica

Posizione del problema



N

$$M_x = N y_c$$

$$M_y = -N x_c$$

Sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

3c. Forza normale eccentrica

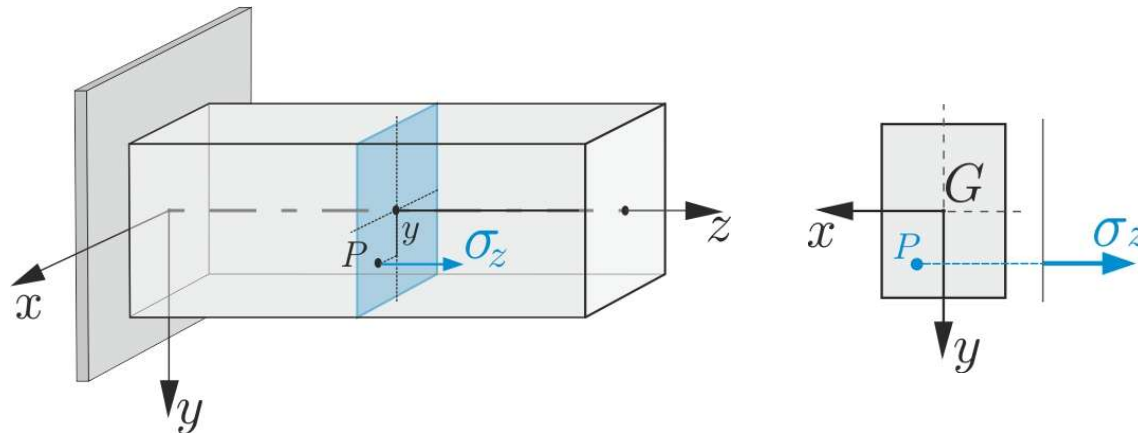
Soluzione in forma chiusa (tensioni)

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_c y + \frac{N}{I_y} x_c x$$





3c. Forza normale eccentrica

Stato tensionale

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C y + \frac{N}{I_y} x_C x$$

$$G \equiv (0,0) \Rightarrow$$

$$\sigma_G = \frac{N}{A}$$

L'asse neutro NON passa per il baricentro

L'asse neutro NON è perpendicolare all'asse di sollecitazione

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C y + \frac{N}{I_y} x_C x = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} \left(1 + \frac{Ay_C}{I_x} y + \frac{Ax_C}{I_y} x \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{Ay_C}{I_x} y + \frac{Ax_C}{I_y} x = 0 \Rightarrow 1 + \frac{y}{\left(\frac{I_x}{Ay_C} \right)} + \frac{x}{\left(\frac{I_y}{Ax_C} \right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{\rho_y^2}{x_C} \right)} + \frac{y}{\left(-\frac{\rho_x^2}{y_C} \right)} = 1$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$



3c. Forza normale eccentrica

Stato tensionale

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C y + \frac{N}{I_y} x_C x$$

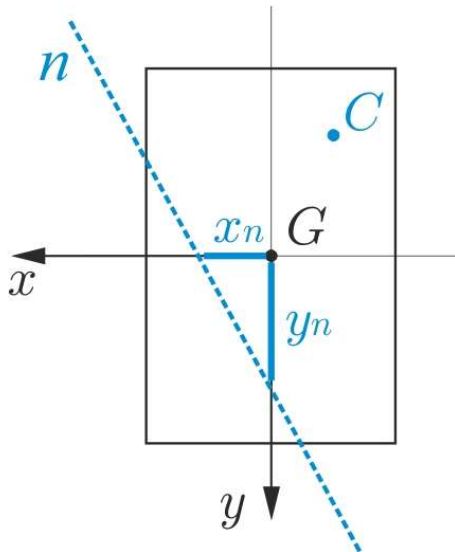
$$G \equiv (0,0) \Rightarrow$$

$$\sigma_G = \frac{N}{A}$$

Asse neutro (forma segmentaria)

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1$$

$$x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_C}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_C}$$



- *L'asse neutro NON passa per il baricentro.*
- *La sua posizione dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione e dalla posizione del centro di sollecitazione.*
- *Fissata la geometria della sezione, esiste una corrispondenza biunivoca fra asse neutro e centro di sollecitazione (antipolarità)*
- *L'asse neutro si trova rispetto al baricentro dalla parte opposta del centro di sollecitazione.*

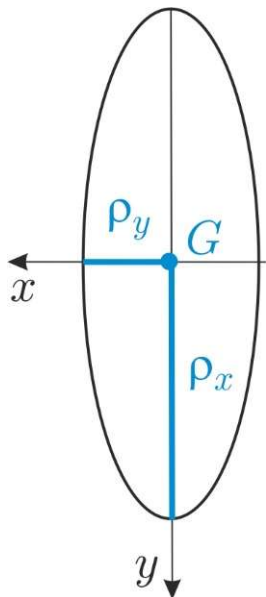
3c. Forza normale eccentrica

Interpretazione geometrica: ellisse centrale d'inerzia e antipolarità

Asse neutro (forma segmentaria)

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1 \quad x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_c}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_c} \quad \rho_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad \rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Ellisse centrale d'inerzia della sezione



$$\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1$$

- L'asse neutro è la **retta antipolare** del centro di sollecitazione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia

- Il centro di sollecitazione è l'**antipolo** dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale d'inerzia

3c. Forza normale eccentrica

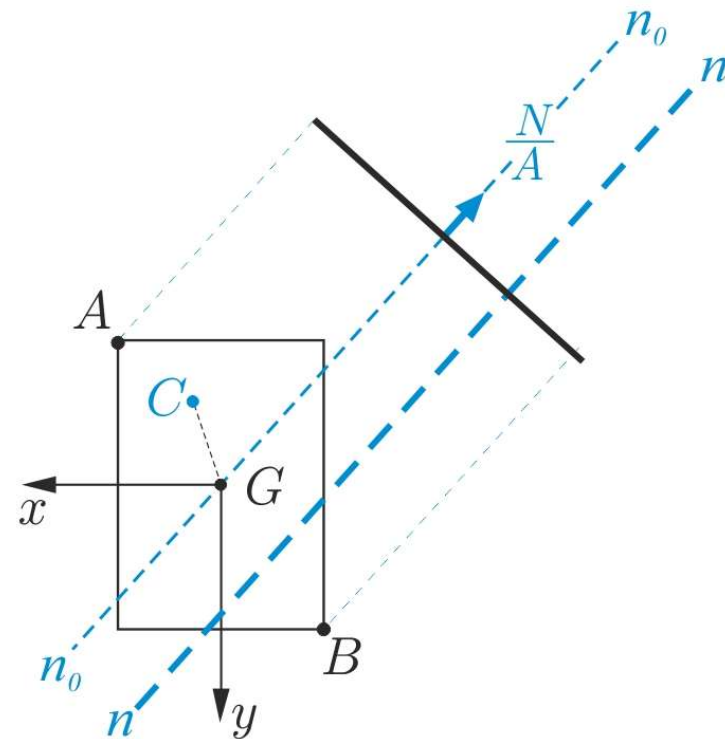
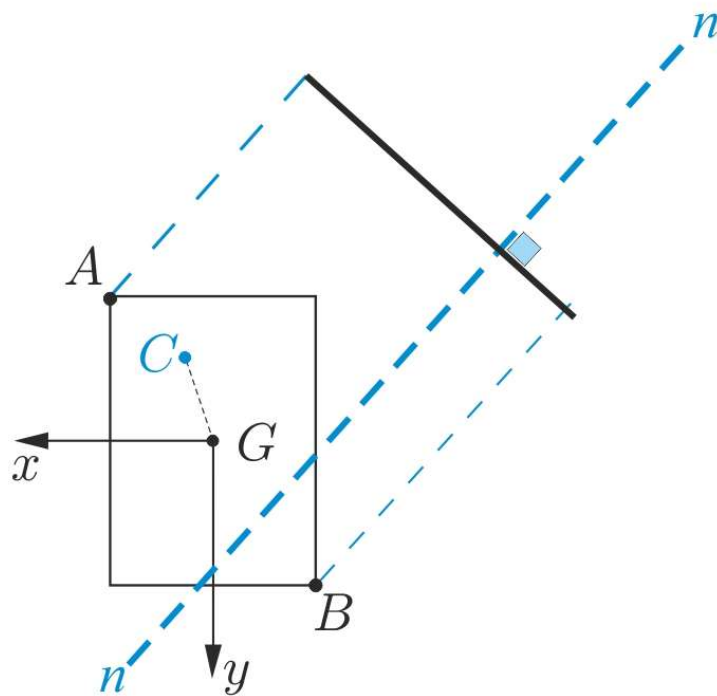
Stato tensionale: rappresentazione grafica

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_c y + \frac{N}{I_y} x_c x$$

Asse neutro

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1 \quad x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_c}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_c}$$



3c. Forza normale eccentrica

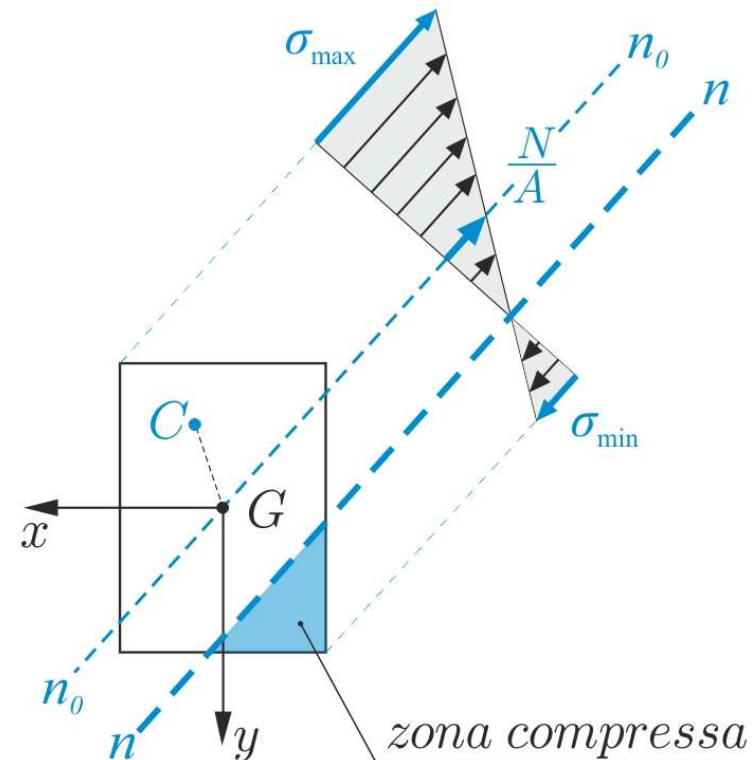
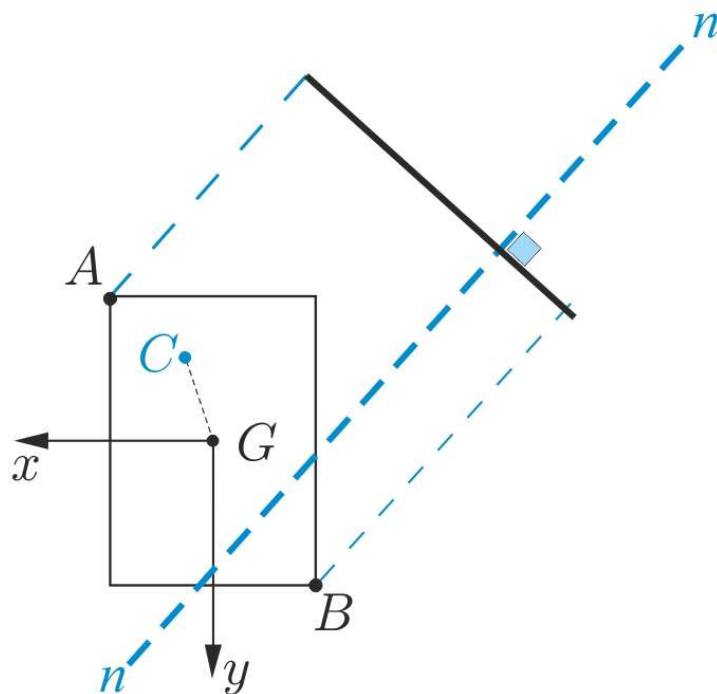
Stato tensionale: rappresentazione grafica

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_c y + \frac{N}{I_y} x_c x$$

Asse neutro

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1 \quad x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_c}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_c}$$

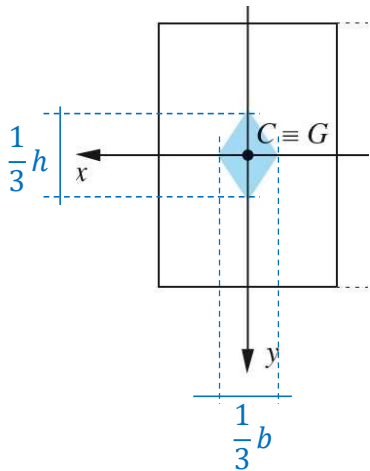




3c. Forza normale eccentrica

Nocciolo centrale d'inerzia

Luogo geometrico degli antipoli (rispetto all'ellisse centrale d'inerzia) di rette non secanti la sezione



Alcune proprietà

- *Se il centro di sollecitazione appartiene al nocciolo, l'asse neutro è esterno alla sezione.*
- *Regione piana la cui forma dipende unicamente dalla geometria della sezione.*
- *Il centro di figura appartiene al nocciolo.*
- *Se il centro di sollecitazione sta sulla frontiera del nocciolo, l'asse neutro è tangente alla sezione.*
- *Se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo, l'asse neutro è interno alla sezione che risulta pertanto soggetta a tensioni normali sia di trazione che di compressione.*

3c. Forza normale eccentrica

Nocciolo centrale d'inerzia

