

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

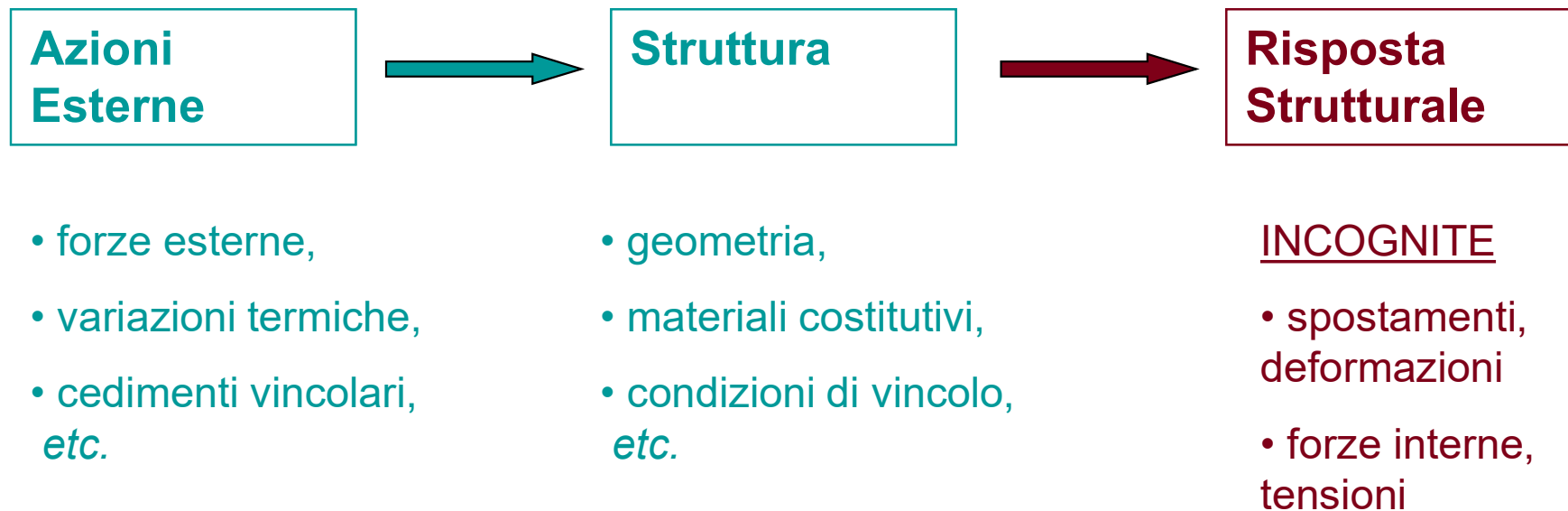
**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## 2.1 Parole chiave

**Analisi strutturale:** analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

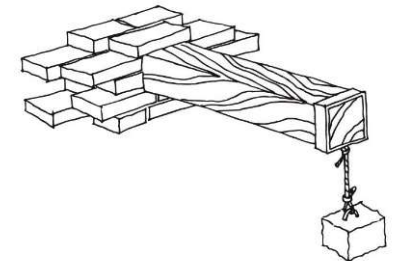
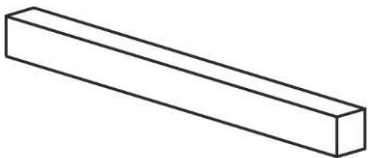




# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico

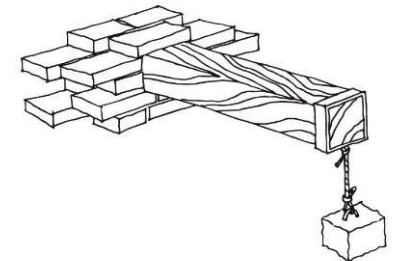
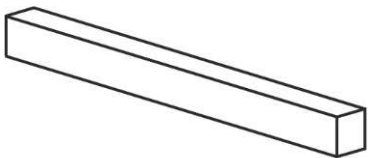




# Lezione

## Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
  - Metodo degli spostamenti
  - Metodo delle Forze

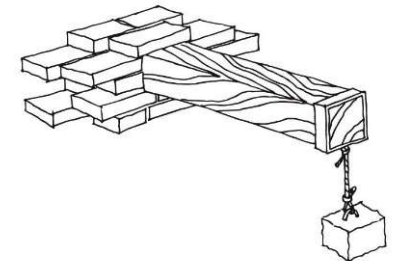
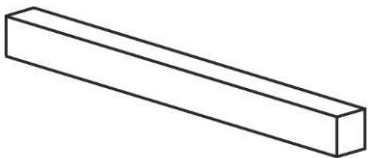




# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico

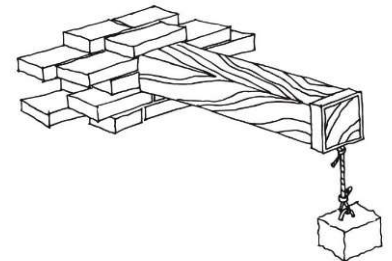
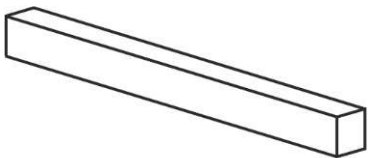




# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- **Cinematica della trave**
- Statica della trave
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



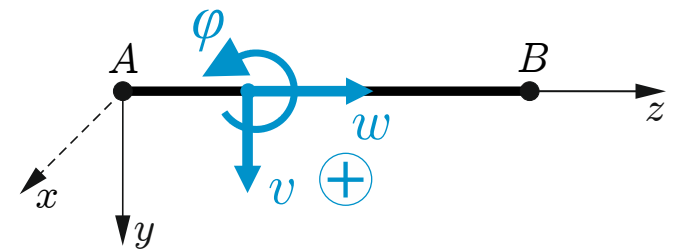
## • RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

**Misure di deformazione** (piano  $zy$ ): grandezze atte a misurare i cambiamenti di forma e/o di dimensione della trave a livello locale (generico concio di trave o sezione)

- Deformazione assiale  $\varepsilon(z)$  [0]
- Scorrimento angolare  $\gamma(z)$  [0]
- Curvatura flessionale  $\chi(z)$  [ $L^{-1}$ ]

**Equazioni implicite di congruenza** (piano  $zy$ ): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

$$\text{Forma scalare} \begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$



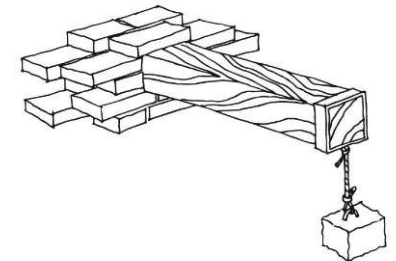
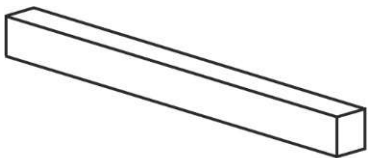
Sistema cinematicamente congruente



# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





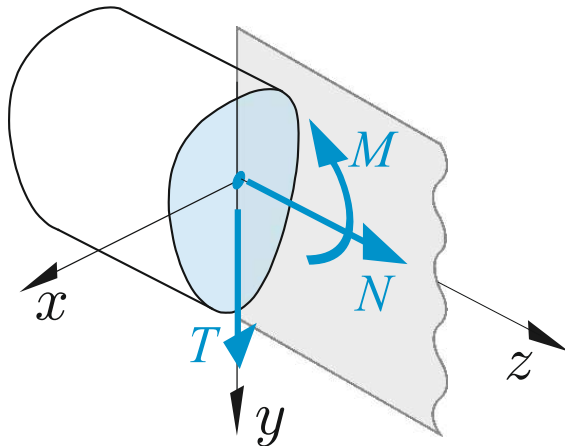
- RIEPILOGO STATICA TRAVE

### Caratteristiche della sollecitazione: caso piano ( $zy$ )

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$  Risultante delle forze interne  $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$  Momento risultante delle forze interne  $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$  Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

### Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

(obiettivo 2)

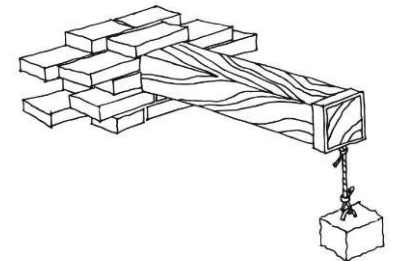
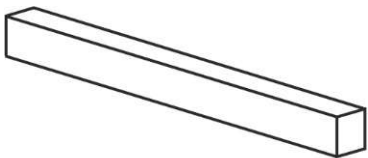
Sistema staticamente equilibrato



# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Dualità statico-cinematica: identità dei Lavori Virtuali**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





# Parte III - Il modello di trave elastica 1D

## Identità dei Lavori Virtuali

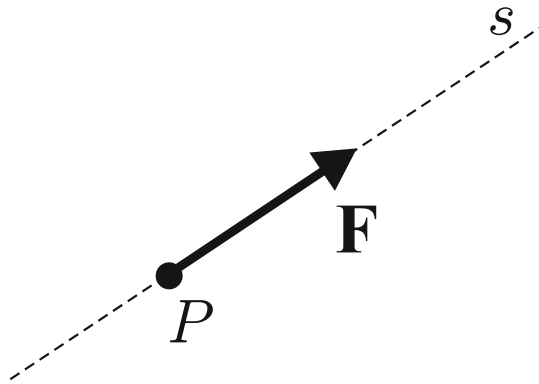
- **Obiettivi**
- **La grandezza fisica *lavoro*: definizioni**
- **Il *lavoro virtuale*:**
  - Lavoro Virtuale Esterno: definizione e interpretazione
  - Lavoro Virtuale Interno: definizione e interpretazione
- **Identità dei Lavori Virtuali: teorema dei LV**
  - Modello di trave rigida
  - Modello di trave deformabile
- **Applicazioni**
  - calcolo di spostamenti in strutture determinate
- **Esercizi (sito: E13; testo §10.5-10.6)**

## Grandezza fisica 'Forza'

**Unità di misura.** L'unità di misura della forza nel S.I. è il Newton ( $N$ ), definito come:

$$1 N = 1 \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Tenendo conto del secondo principio della dinamica, possiamo quindi affermare che una forza di  $1 N$  imprime ad un corpo con la massa di  $1 kg$  l'accelerazione di  $1 m/s^2$ .



*s: retta d'azione*

*P: punto di applicazione*

*$|\mathbf{F}|, F$ : modulo o intensità  $[F]$*

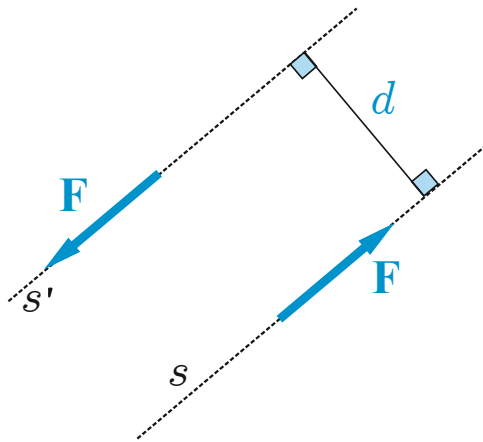
*Dimensioni fisiche  $[F]$ , unità di misura  $N$*



## Coppia di forze

*Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ( $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi:  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .*

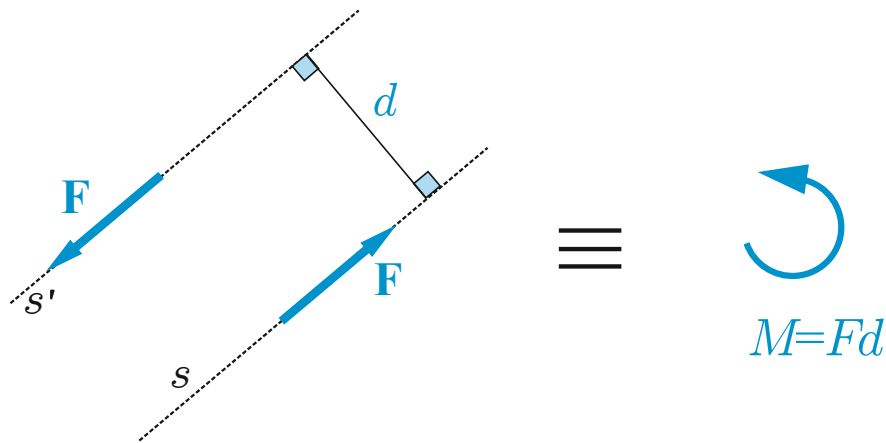
*il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.*



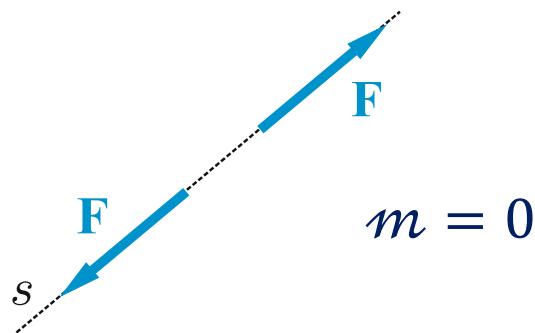
## Coppia di forze

Si definisce coppia di forze un sistema costituito da due forze ( $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ ) che hanno: stessa direzione, stesso modulo, versi opposti; risulta quindi:  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .

il momento risultante di una coppia di forze non dipende dal polo scelto.



$$m = M_O = Fd$$



$$m = +Fd$$

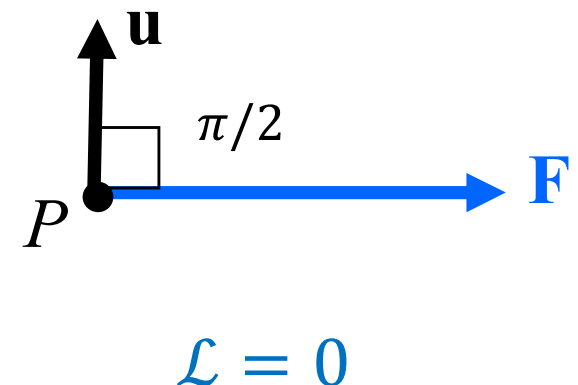
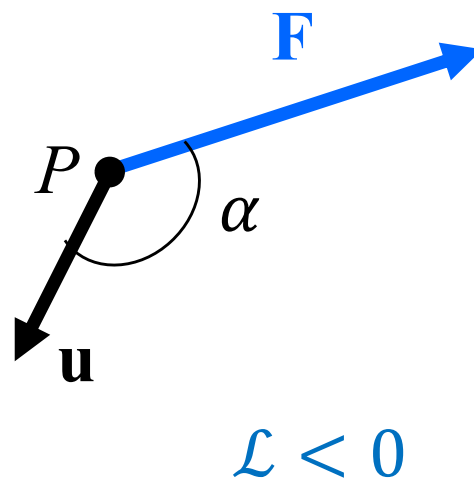
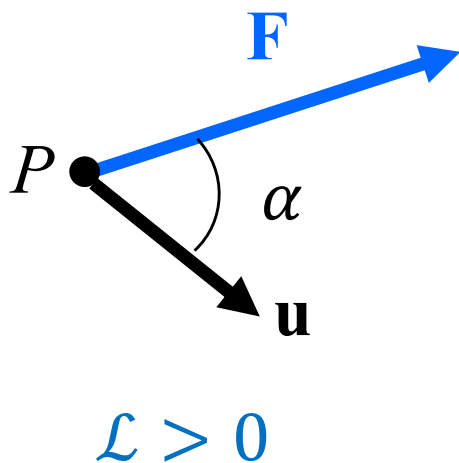
$$m = -Fd$$

## Grandezza fisica 'Lavoro': lavoro di una forza sullo spostamento

**Definizione.** Si consideri una forza  $\mathbf{F}$  applicata in un punto  $P$ ; se il punto  $P$  compie uno spostamento  $\mathbf{u}$ , si definisce *lavoro* della forza  $\mathbf{F}$  sullo spostamento  $\mathbf{u}$  il prodotto scalare dei due vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{u}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad \mathcal{L} = |\mathbf{F}||\mathbf{u}|\cos(\alpha)$$

- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche:  $[\mathcal{L}] = [FL]$ ;
- il lavoro è positivo se l'angolo convesso  $\alpha$  è acuto, negativo se è ottuso;
- il lavoro è nullo se  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{u}$  sono perpendicolari o se uno dei due vettori è nullo;
- se  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{u}$  sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi o discordi.



## Grandezza fisica ‘Lavoro’: lavoro di una coppia sulla rotazione

**Definizione.** Si consideri una coppia  $\mathbf{m}$  applicata su un corpo rigido; se il corpo compie una rotazione rigida di rappresentata dal vettore  $\boldsymbol{\theta}$ , si definisce *lavoro* della coppia  $\mathbf{m}$  sulla rotazione  $\boldsymbol{\theta}$  il prodotto scalare dei due vettori  $\mathbf{m}$  e  $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \mathcal{L} = |\mathbf{m}||\boldsymbol{\theta}|\cos(\alpha)$$

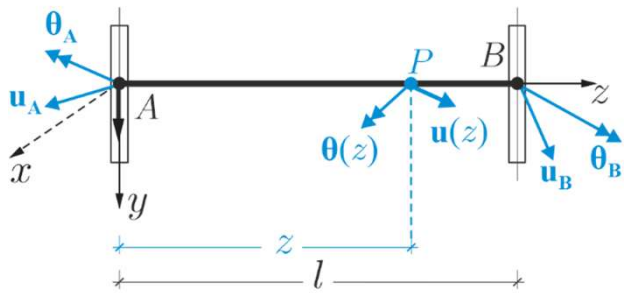
- grandezza fisica scalare avente le dimensioni fisiche:  $[\mathcal{L}] = [FL]$ ;
- se  $\mathbf{m}$  e  $\boldsymbol{\theta}$  sono paralleli, il lavoro è dato dal prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per +1 o per -1 a seconda che i vettori siano concordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione entrambe orarie o entrambe antiorarie) o discordi (nel piano perpendicolare alla loro comune direzione: coppia e rotazione una orario e l'altra antioraria).

## Grandezza fisica ‘Lavoro’: lavoro di un sistema di forze

**Definizione.** Si consideri una trave o un sistema di travi in cui siano assegnate  $n$  forze applicate in altrettanti punti della linea d’asse e  $r$  coppie applicate in altrettante sezioni rigide; se il sistema si sposta o si deforma si definisce lavoro del sistema di forze e coppie sul campo di spostamenti la seguente grandezza:

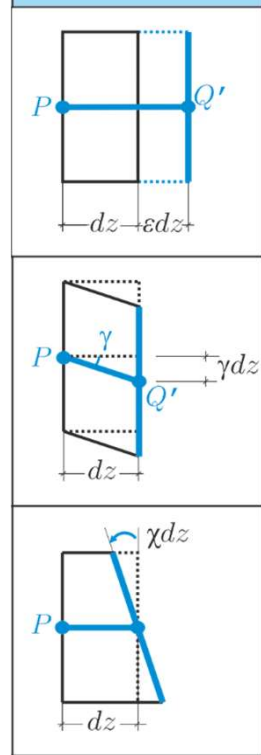
$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^r \mathbf{m}_j \cdot \boldsymbol{\theta}_j$$

## Spostamenti e deformazioni in un sistema congruente



*Sistema Congruente*

*Deformazioni  
(Sistema congruente)*



Sistemi congruenti

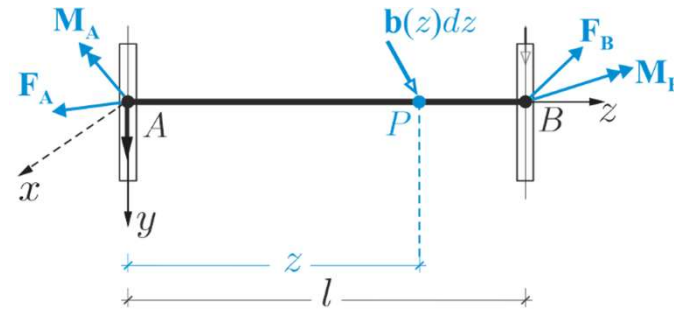


Sistemi **non** congruenti

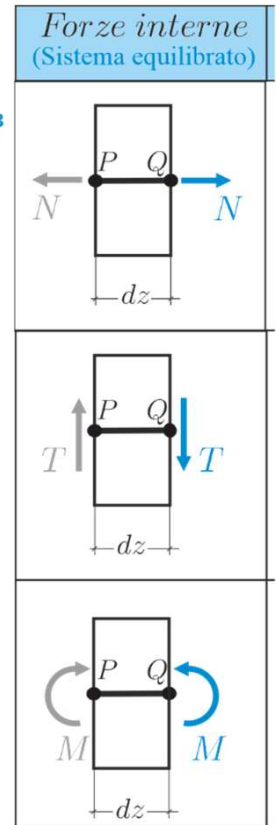
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

# Identità dei Lavori Virtuali: richiami

## Forze esterne e forze interne in un sistema equilibrato

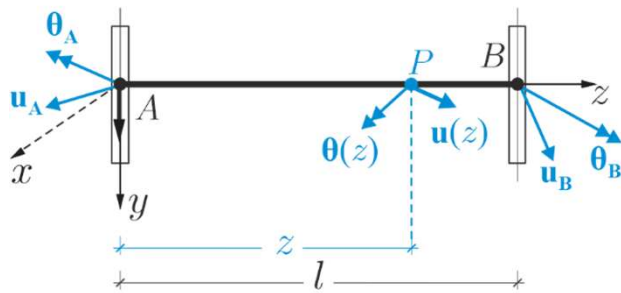


*Sistema Equilibrato*



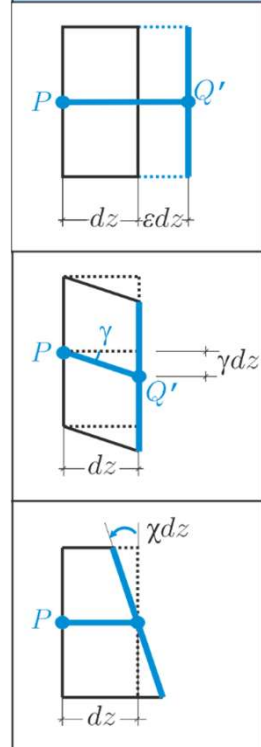
$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c. c.$$

## Il 'Lavoro Virtuale'

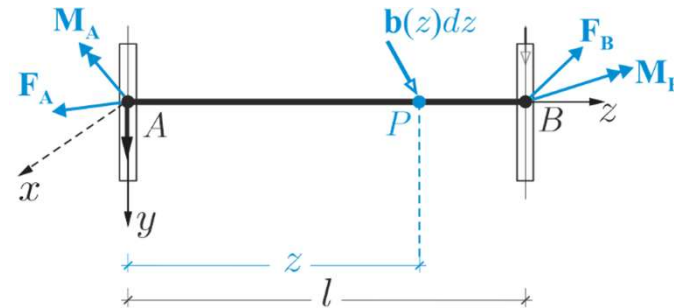


*Sistema Congruente*

*Deformazioni  
(Sistema congruente)*

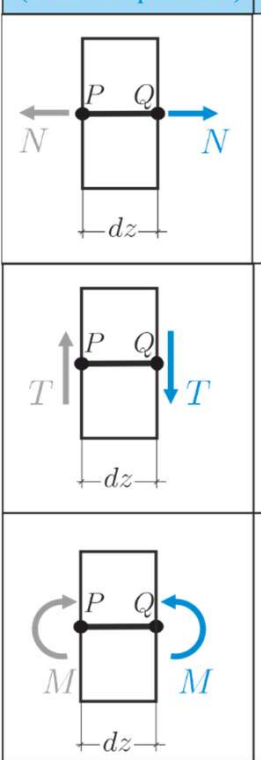


$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$



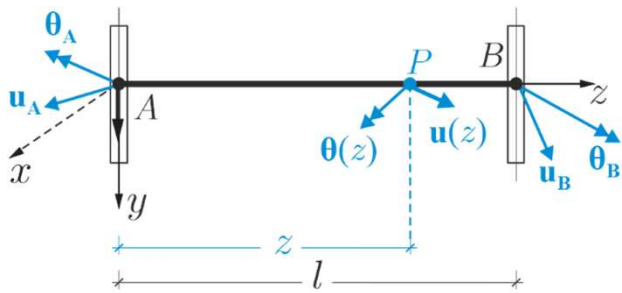
*Sistema Equilibrato*

*Forze interne  
(Sistema equilibrato)*

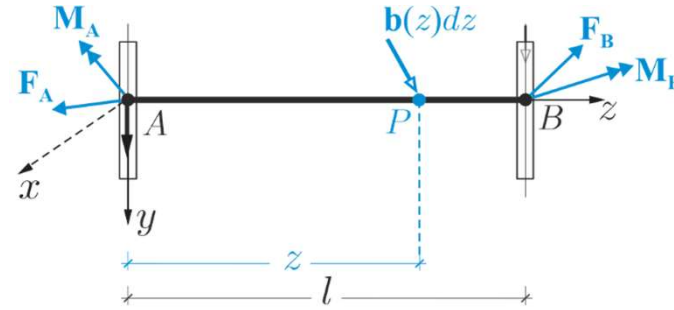


$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

## Il 'Lavoro Virtuale Esterno'

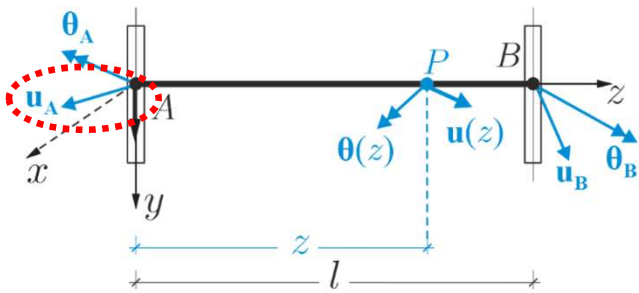


*Sistema Congruente*

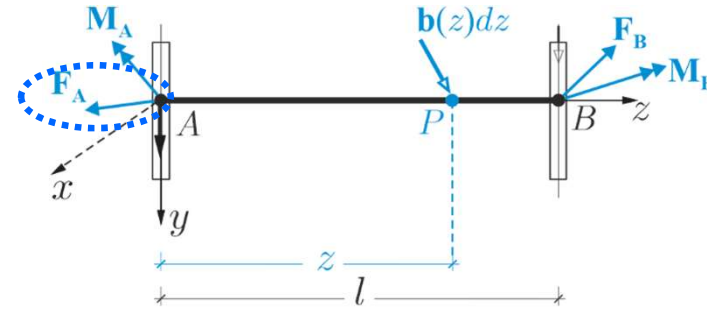


*Sistema Equilibrato*

## Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



*Sistema Congruente*

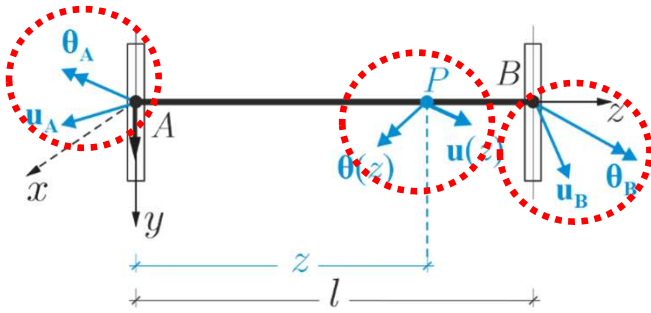


*Sistema Equilibrato*

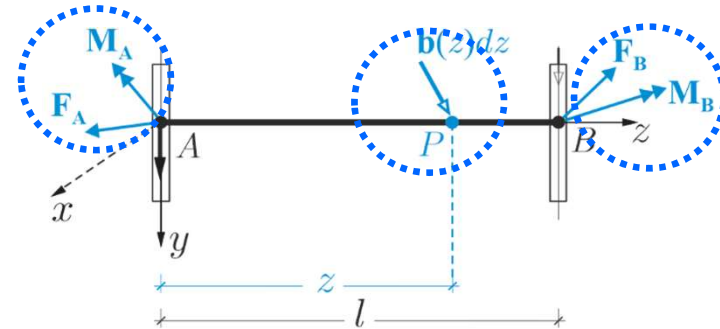
**Definizione.** Lavoro che le forze *esterne* (forze attive e reazioni vincolari) del **Sistema Equilibrato** compiono sugli spostamenti del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^e = F_A \cdot u_A + \dots$$

## Il 'Lavoro Virtuale Esterno'



*Sistema Congruente*



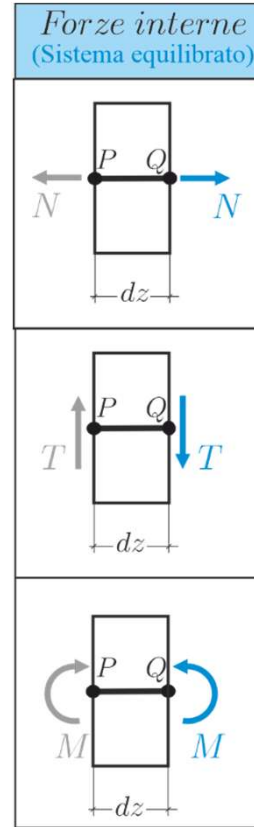
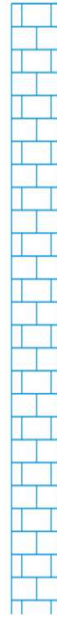
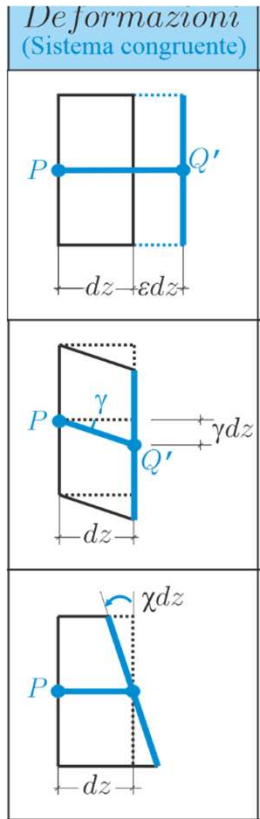
*Sistema Equilibrato*

**Definizione.** Lavoro che le forze *esterne* (forze attive e reazioni vincolari) del **Sistema Equilibrato** compiono sugli spostamenti del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^e = F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l b dz \cdot u$$

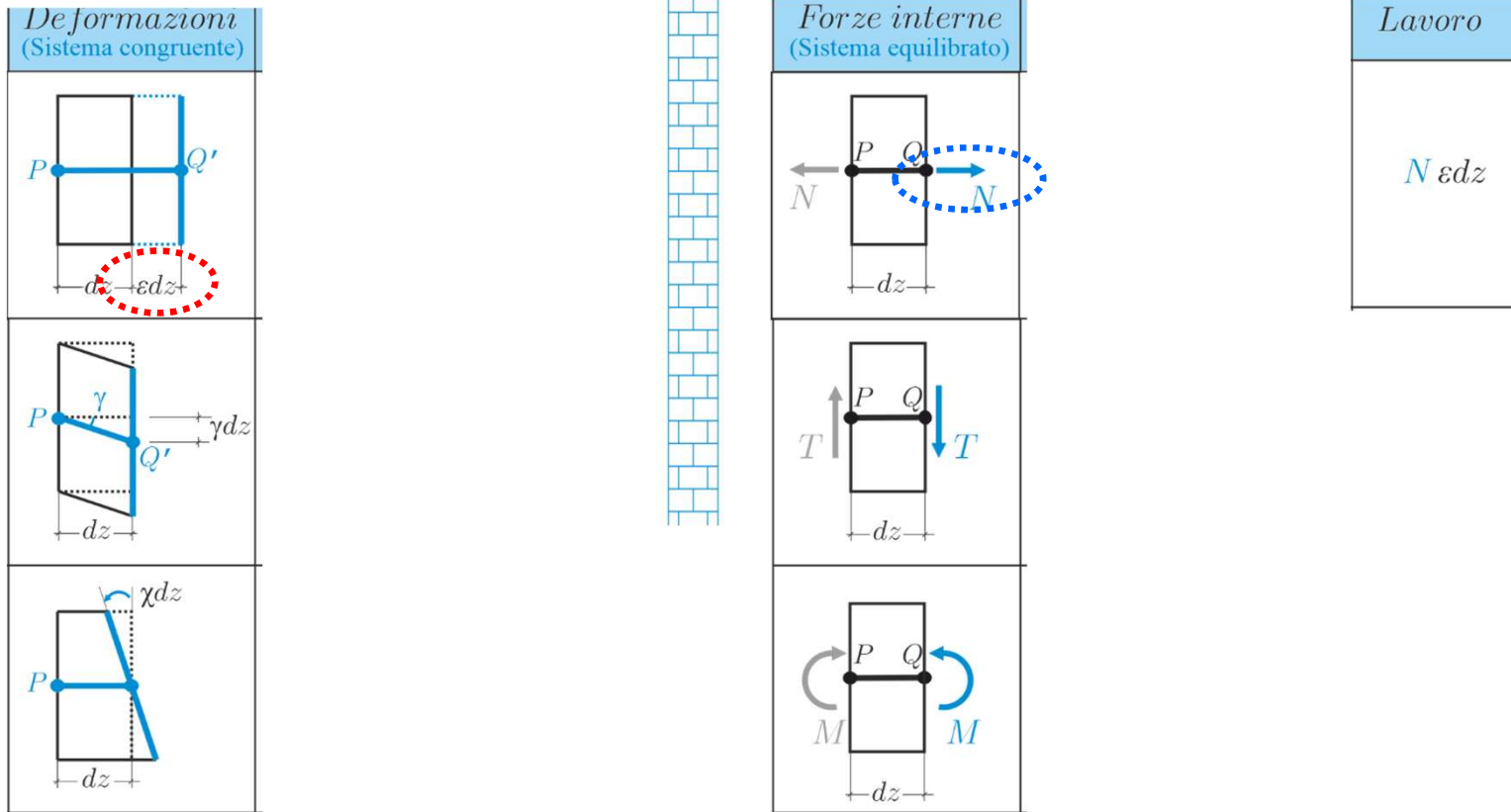


## Il 'Lavoro Virtuale Interno'





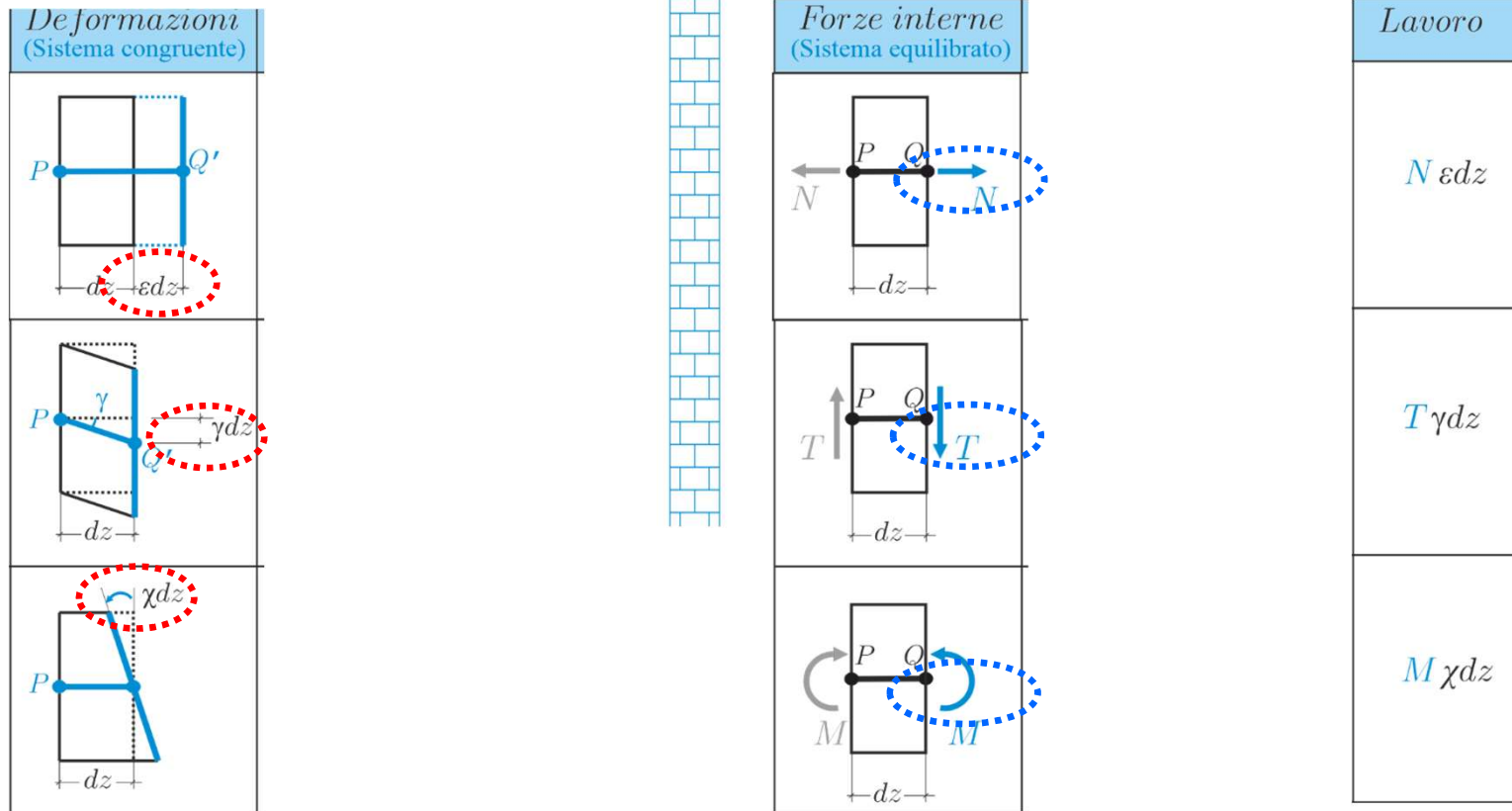
## Il 'Lavoro Virtuale Interno'



**Definizione.** Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l N \epsilon dz + \dots$$

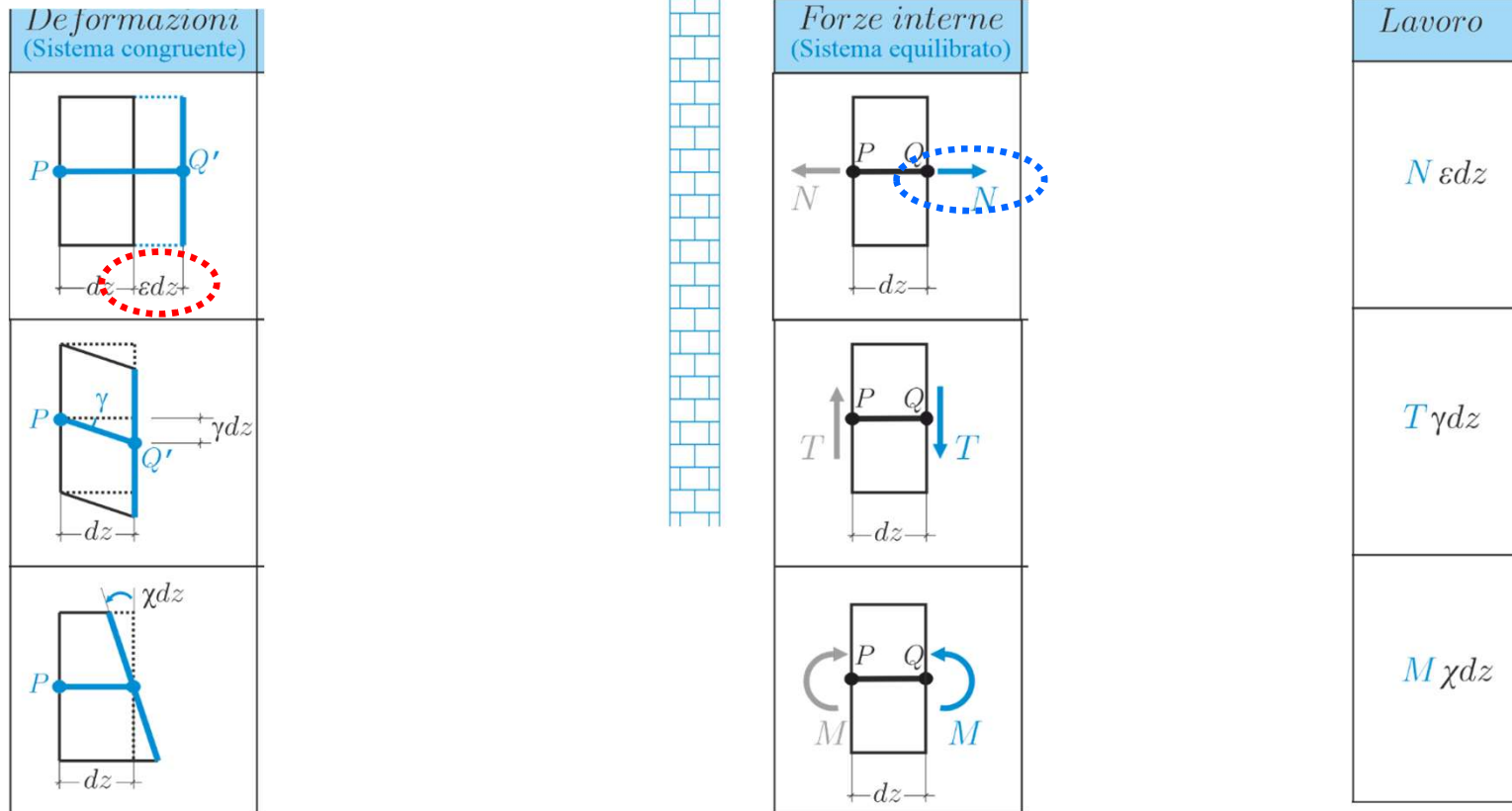
## Il 'Lavoro Virtuale Interno'



**Definizione.** Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N \varepsilon dz + T \gamma dz + M \chi dz]$$

## Il 'Lavoro Virtuale Interno'



**Definizione.** Lavoro che le forze *interne* (caratteristiche della sollecitazione) del **Sistema Equilibrato** compiono sulle deformazioni del **Sistema Congruente**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

**IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)**

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:


$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

$$F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

## IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

$$F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$


Sistema Congruente (grandezze cinematiche)

## IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV)

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Sistema Equilibrato (grandezze statiche)} \\
 \hline
 F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz \\
 \hline
 \text{Sistema Congruente (grandezze cinematiche)}
 \end{array}$$

L'identità dei LV ha valenza del tutto generale: infatti è indipendente dal materiale costitutivo e sussiste anche nel caso in cui il **Sistema Congruente** e il **Sistema Equilibrato** siano due strutture distinte, ad esempio due travi realizzate in materiale diverso.

## TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI (TLV)

### Enunciato

Assegnato un sistema congruente (cfr. § 10.2.2) e, *indipendentemente* da esso, un sistema equilibrato (cfr. § 10.2.3), il lavoro virtuale esterno, Eq. (10.9), eguaglia il lavoro virtuale interno, Eq. (10.10):

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

### Dimostrazione

*Cfr.* Libro §10.3

## COROLLARI DEL TLV

- CONGRUENZA + EQUILIBRIO  $\Rightarrow$  IDENTITÀ LV
- CONGRUENZA + IDENTITÀ LV  $\Rightarrow$  EQUILIBRIO
- EQUILIBRIO + IDENTITÀ LV  $\Rightarrow$  CONGRUENZA

In particolare, dagli ultimi due punti, si possono ricavare i seguenti due corollari.

### Corollario degli spostamenti virtuali:

condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di forze esterne e interne sia equilibrato è che sia soddisfatta l'identità dei lavori virtuali Eq. (10.15) per ogni campo di spostamenti e deformazioni congruenti.

### Corollario delle forze virtuali:

condizione necessaria e sufficiente affinché un campo di spostamenti e deformazioni sia congruente è che sia soddisfatta l'identità dei lavori virtuali Eq. (10.15) per ogni sistema di forze esterne e interne equilibrato. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, da questo corollario si deduce una semplice procedura operativa per il calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture isostatiche o iperstatiche.

**IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE INDEFORMABILE A TAGLIO (Eulero-Bernouilli)**

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

Se la **trave è indeformabile a taglio**, lo scorrimento angolare è identicamente nullo:

$$\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è indeformabile a taglio**:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

## IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE INDEFORMABILE A TAGLIO (Eulero-Bernouilli)

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:

Assegnato un **Sistema rigido Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema rigido Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

**Trave indeformabile a taglio**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

**IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE PURAMENTE FLESSIBILE**

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

Se la **trave è puramente flessibile**, la deformazione assiale e lo scorrimento angolare sono identicamente nulli:

$$\varepsilon(z) = 0, \gamma(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è puramente flessibile**:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l M(z) \chi(z) dz$$

## IDENTITA' DEI LV PER LA TRAVE PURAMENTE FLESSIBILE

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:

Assegnato un **Sistema rigido Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema rigido Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

**Trave puramente flessibile**

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l M(z) \chi(z) dz$$

**IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV) PER LA TRAVE RIGIDA**

Assegnato un **Sistema Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = \mathcal{L}_v^i$$

dove:

$$\mathcal{L}_v^i = \int_0^l [N(z) \varepsilon(z) + T(z) \gamma(z) + M(z) \chi(z)] dz$$

Se la **trave è rigida**, le misure di deformazione sono identicamente nulle:

$$\varepsilon(z) = 0, \gamma(z) = 0, \chi(z) = 0 \quad \forall z \in [0, l]$$

Pertanto, se la **trave è rigida**:

$$\mathcal{L}_v^i = 0$$

**IDENTITA' DEI LAVORI VIRTUALI (LV) PER LA TRAVE RIGIDA**

Sulla base della slide precedente, si può affermare che:

Assegnato un **Sistema rigido Equilibrato** e indipendentemente da esso un **Sistema rigido Congruente** sussiste la seguente identità:

$$\mathcal{L}_v^e = 0$$

$$F_A \cdot u_A + M_A \cdot \theta_A + F_B \cdot u_B + M_B \cdot \theta_B + \int_0^l \mathbf{b} dz \cdot \mathbf{u} = 0$$