Facoltà di Architettura
Architettura C.U.

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

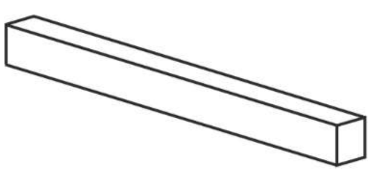
Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

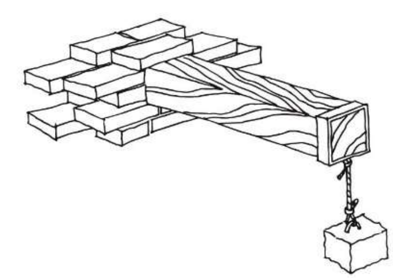
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico

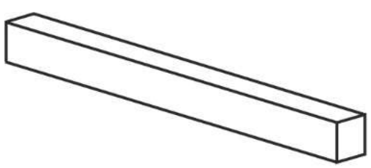


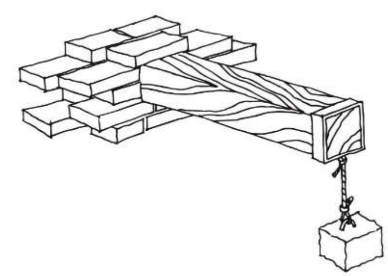



Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- **Obiettivi. Definizioni. Notazioni**

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



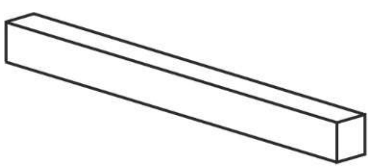


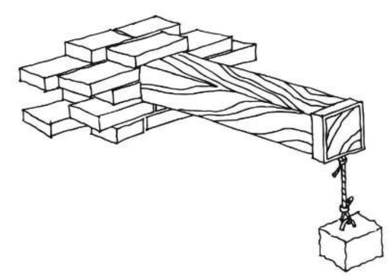
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- **Cinematica della trave**
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico

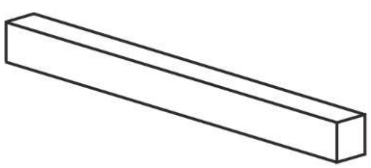


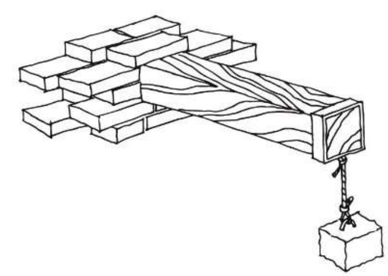



Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Parte II - Il modello di trave elastica 1D

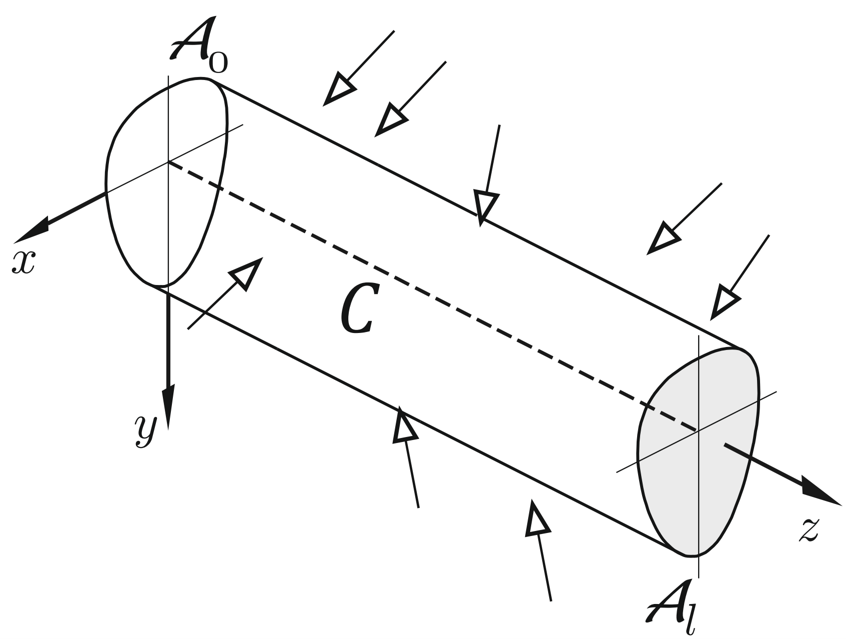
2. Statica della trave

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze interne**
  - definizioni
  - caratteristiche della sollecitazione (CdS)
  - convenzioni
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Problema statico**
- **Leggi e diagrammi delle CdS**
- **Esercizi** (sito: E10-E12, testo: §6.7-6.9)

2. Statica della trave: obiettivi

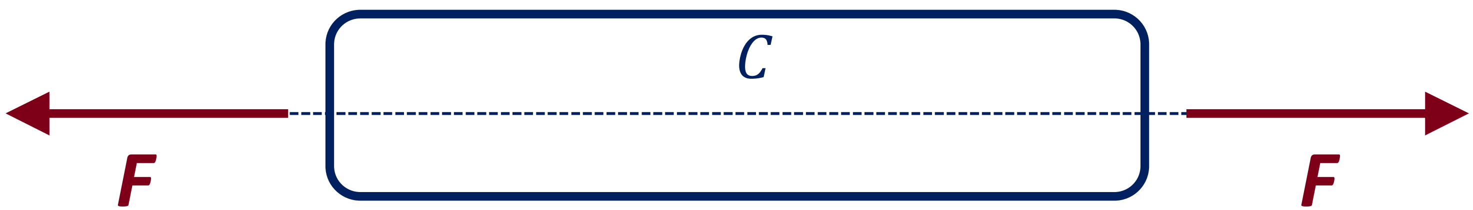
Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle forze esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

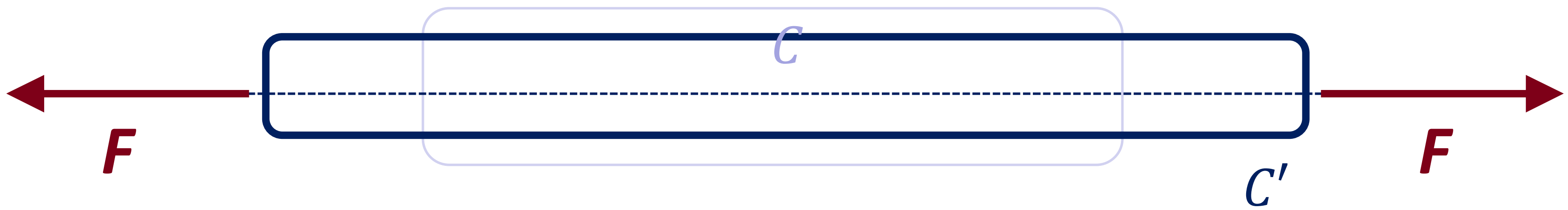
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

Osservazione

Se il corpo è deformabile la condizione che il sistema delle forze esterne sia nullo in genere è necessaria ma ***non sufficiente*** *per l'equilibrio del corpo*

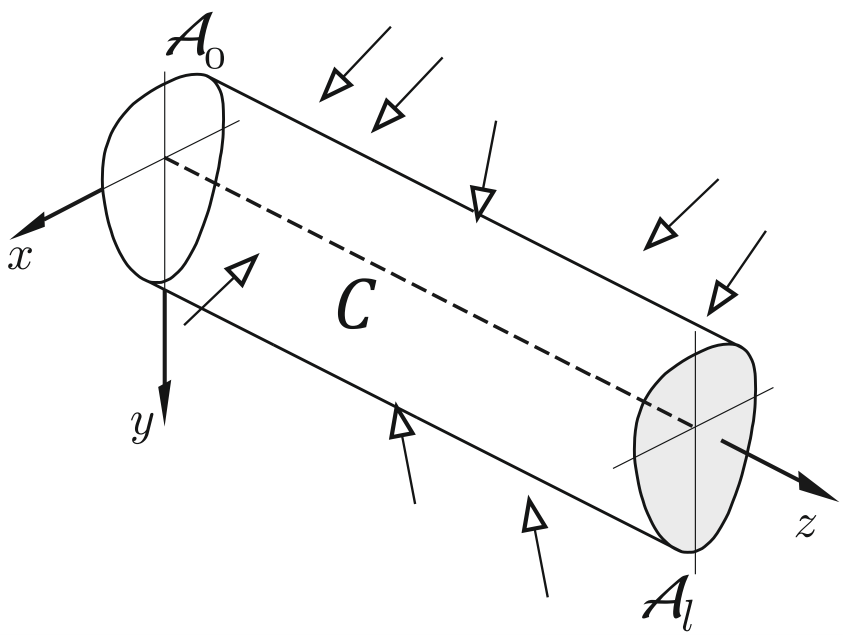


$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

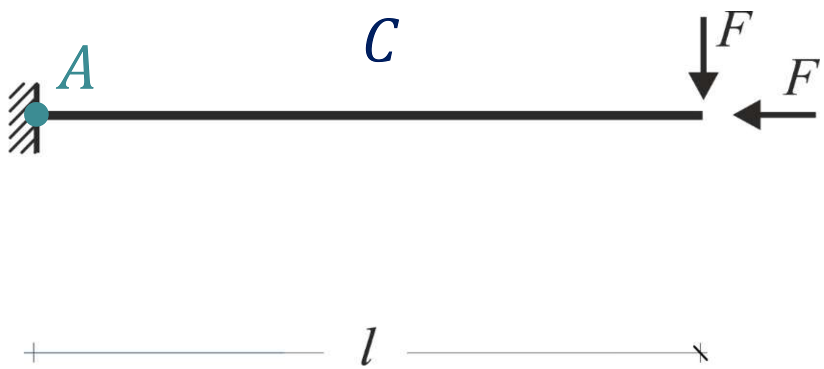
2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle azioni esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



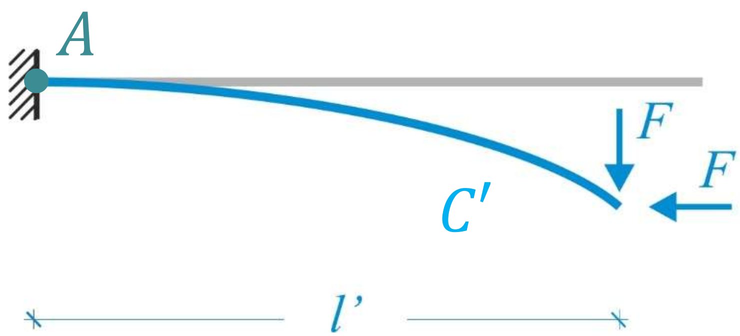
Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (***Postulato di Eulero***)


A
C
F
F
l

Osservazione

Se il corpo è deformabile le equazioni di equilibrio devono essere impostate con riferimento alla configurazione finale C'.

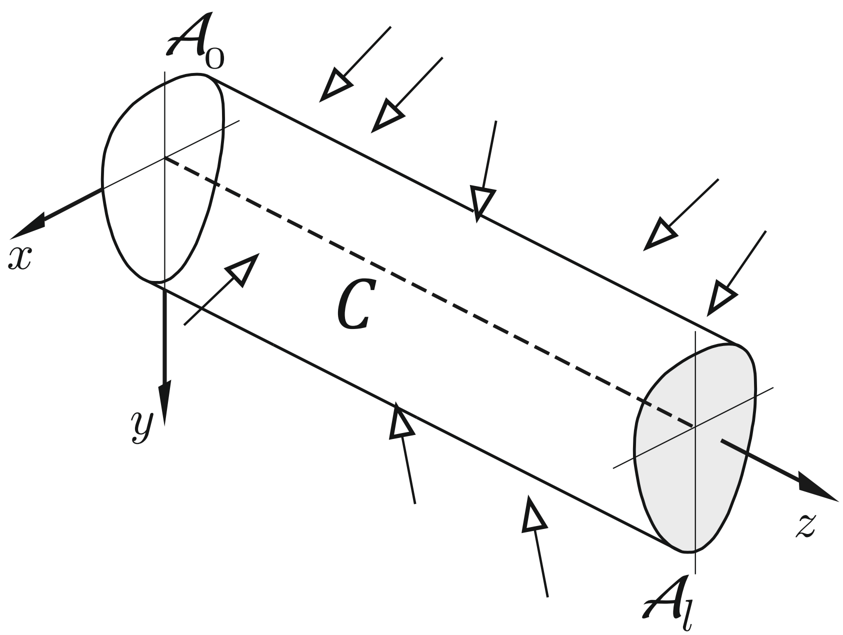
Nell'ipotesi dei piccoli spostamenti (cinematica) le configurazioni C e C' sono 'vicine': in numerose applicazioni strutturali, si possono impostare le equazioni di equilibrio con riferimento alla configurazione iniziale C, trascurando la deformabilità delle travi.



2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle azioni esterne (attive e reattive)

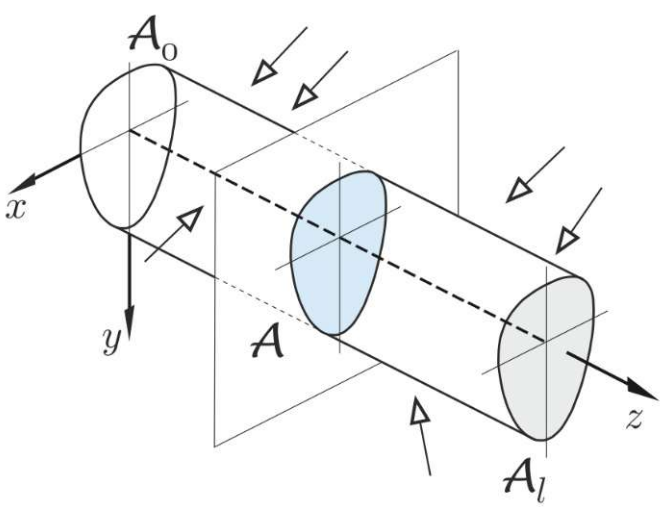
Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.

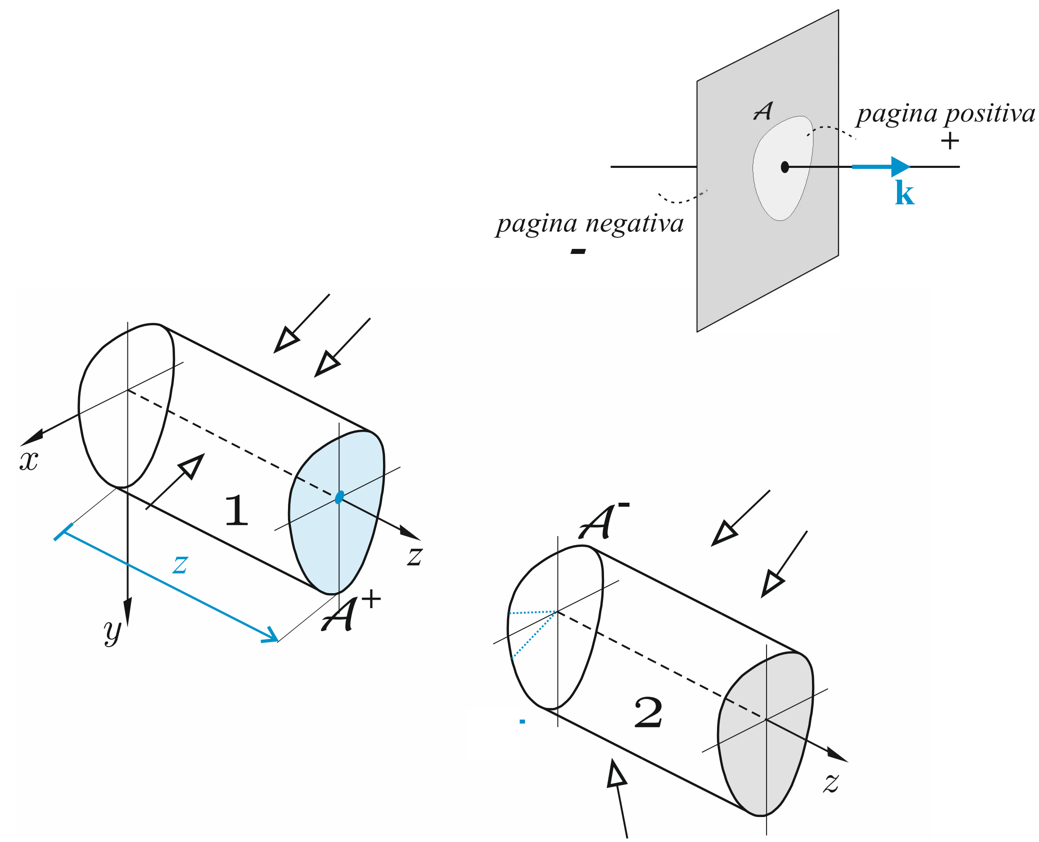


Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (***Postulato di Eulero***)

Ipotesi
Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata) C

Forze interne.



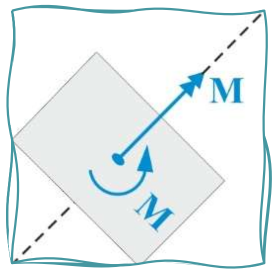


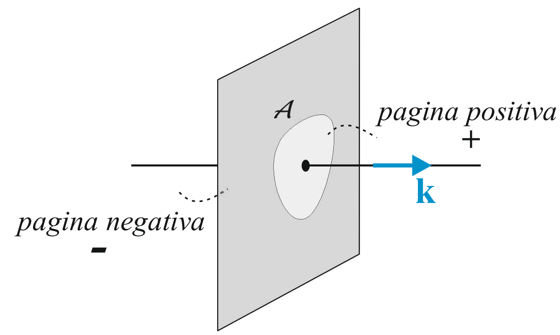
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

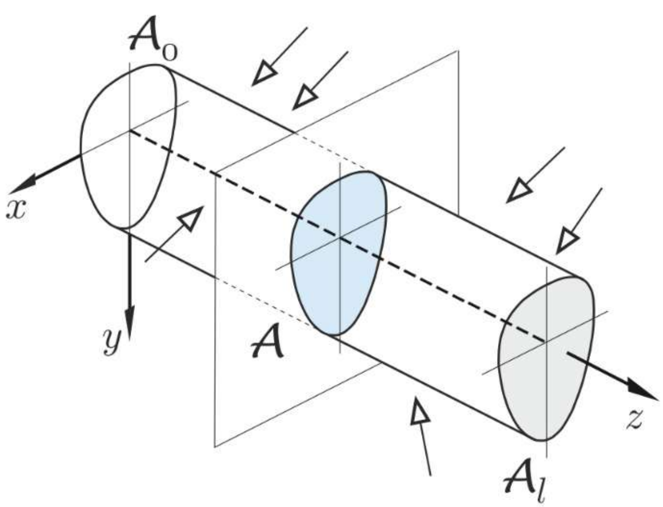
Forze interne.

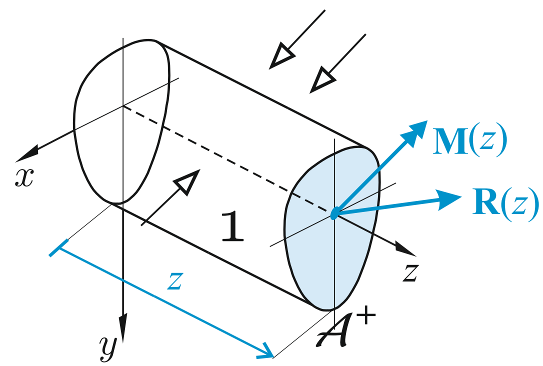
$\mathbf{R}(z) \;\rightarrow\;$ *Risultante delle forze interne* $[F]$

$\mathbf{M}(z) \;\rightarrow\;$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$









3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Forze interne: lemma di Cauchy

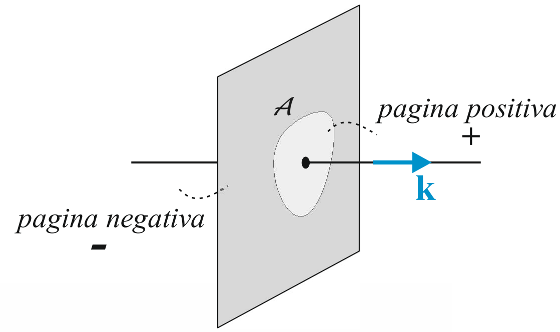
$\mathbf{R}(z) \;\rightarrow\;$ *Risultante delle forze interne* $[F]$

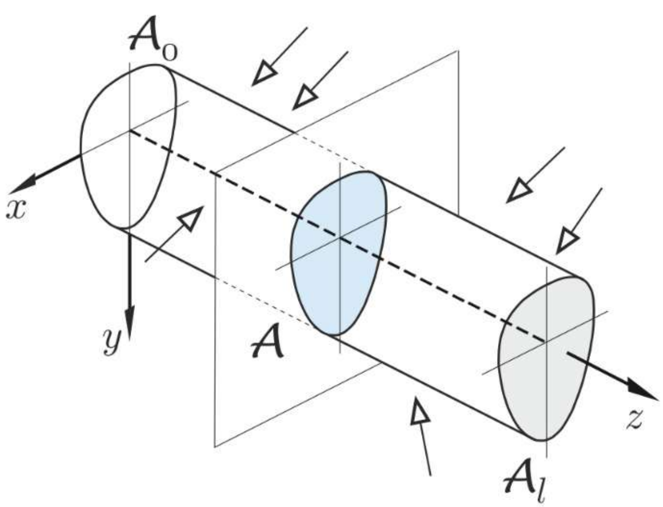
$\mathbf{M}(z) \;\rightarrow\;$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

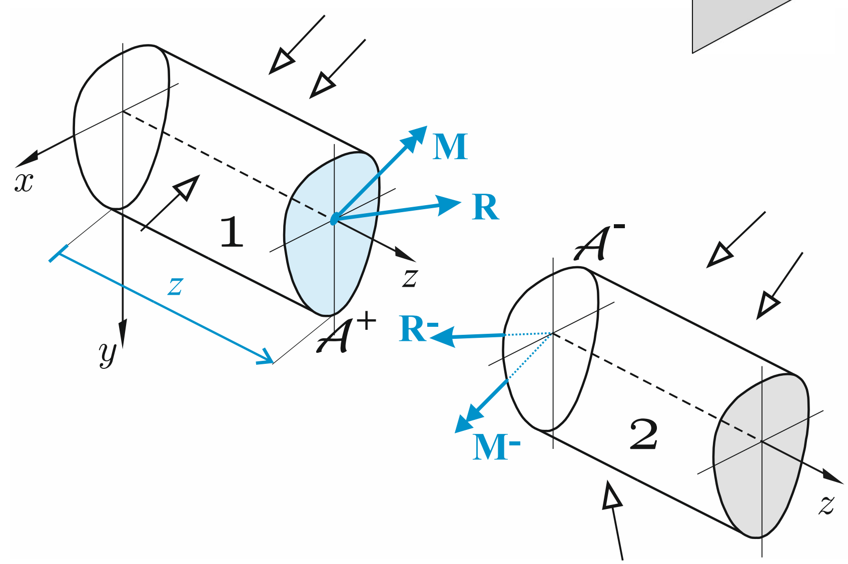
Lemma di Cauchy

$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$
$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

$$0 \le z \le l$$
$$z = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_0^-,\ \mathbf{R}^-(0)\ \mathbf{M}^-(0)$$
$$z = l \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_l^+,\ \mathbf{R}(l) \quad \mathbf{M}(l)$$







3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione. Le CdS sono le componenti scalari dei vettori **R** e **M** rispetto al sistema di riferimento locale

$$\boxed{\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T_x(z)\mathbf{i} + T_y(z)\mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \textit{Risultante delle forze interne } [F]}$$

$N(z) \rightarrow$ *Forza normale* $[F]$ *(agisce perpendicolarmente alla sezione)*

$T_x(z) \rightarrow$ *Forza di taglio* x $[F]$ *(agisce parallelamente alla sezione)*

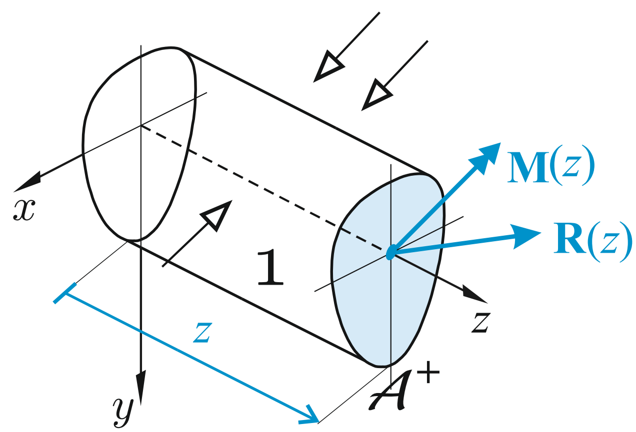
$T_y(z) \rightarrow$ *Forza di taglio* y $[F]$ *(agisce parallelamente alla sezione)*

$$\boxed{\mathbf{M}(z) = M_t(z)\mathbf{k} + M_x(z)\mathbf{i} + M_y(z)\mathbf{j} \rightarrow \textit{Momento risultante delle forze interne } [FL]}$$

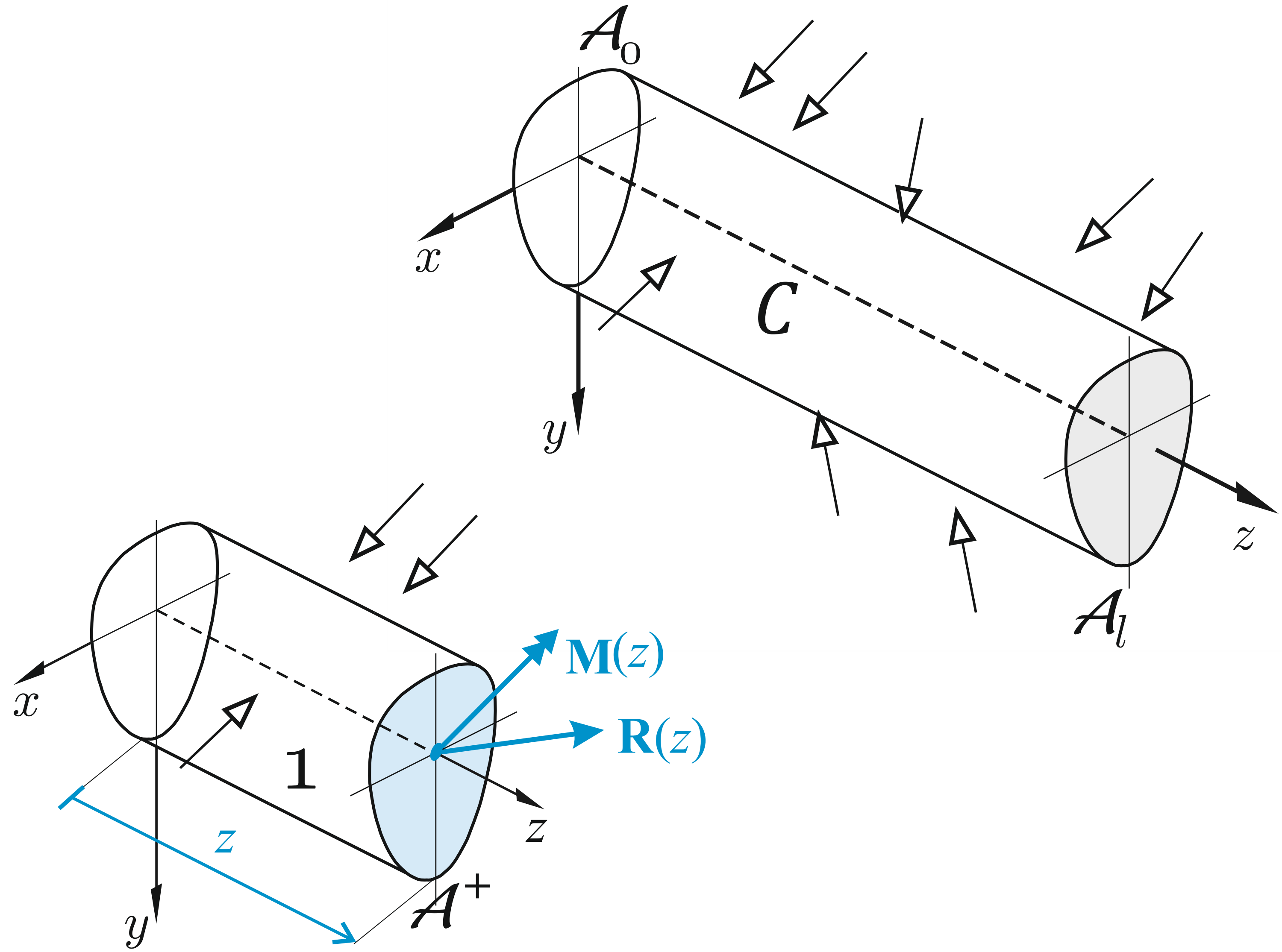
$M_t(z) \rightarrow$ *Momento torcente* $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano della sezione)*

$M_x(z) \rightarrow$ *Momento flettente* x $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano verticale* zy*)*

$M_y(z) \rightarrow$ *Momento flettente* y $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano orizzontale* zx*)*

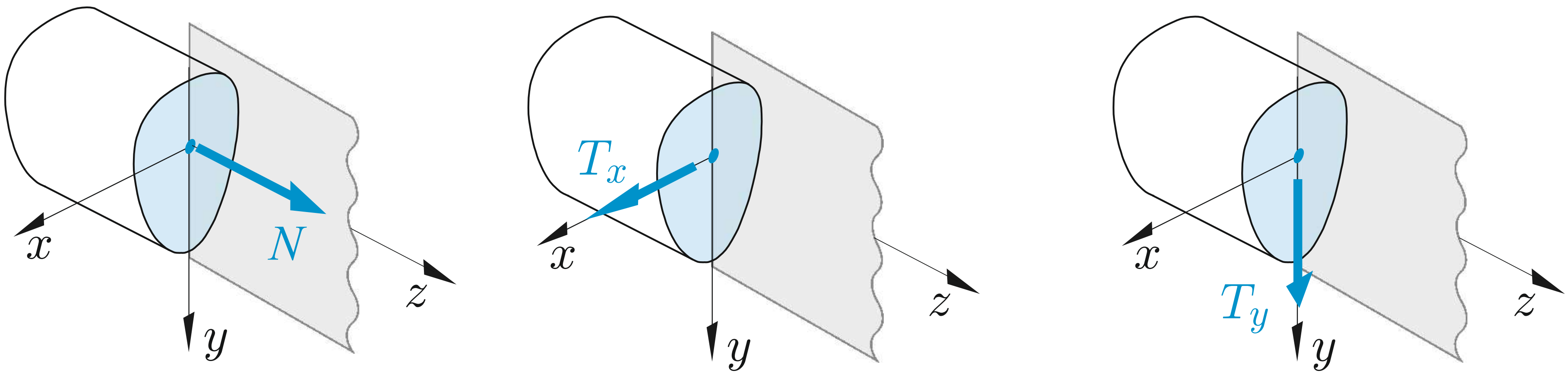


2. Statica della trave

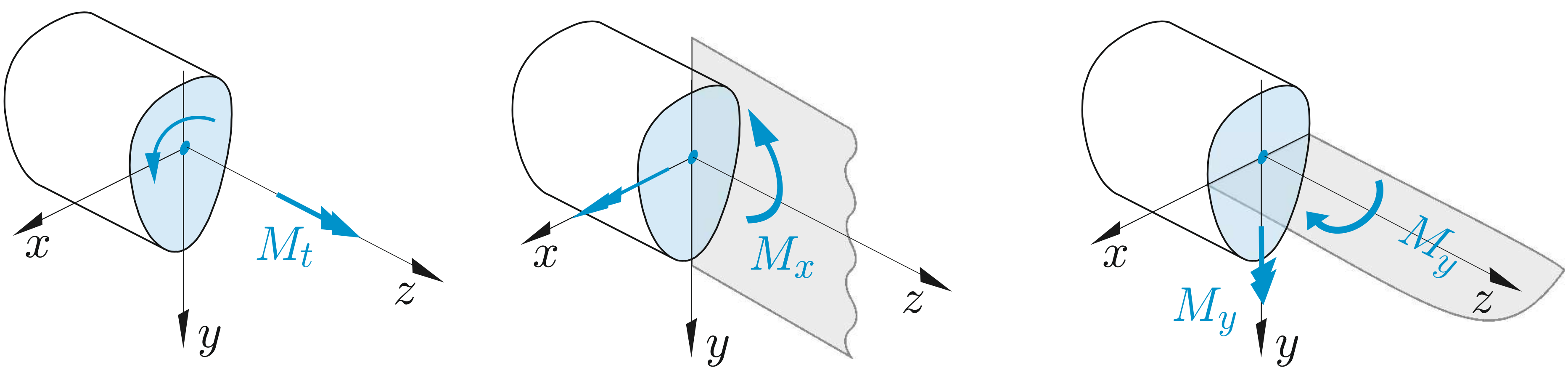


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $\mathbf{R}(z)$ $[F]$

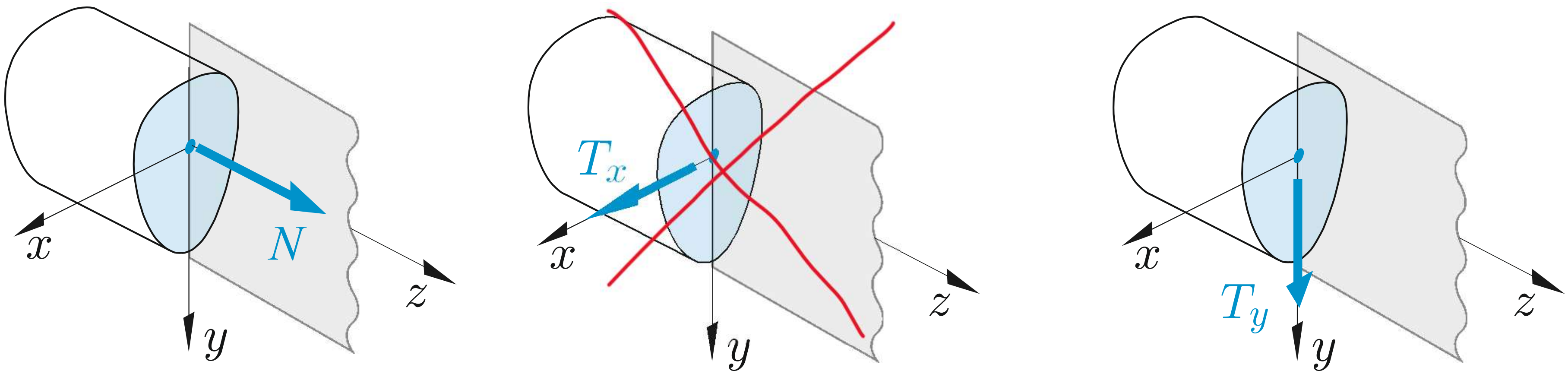


Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $\mathbf{M}(z)$ $[FL]$

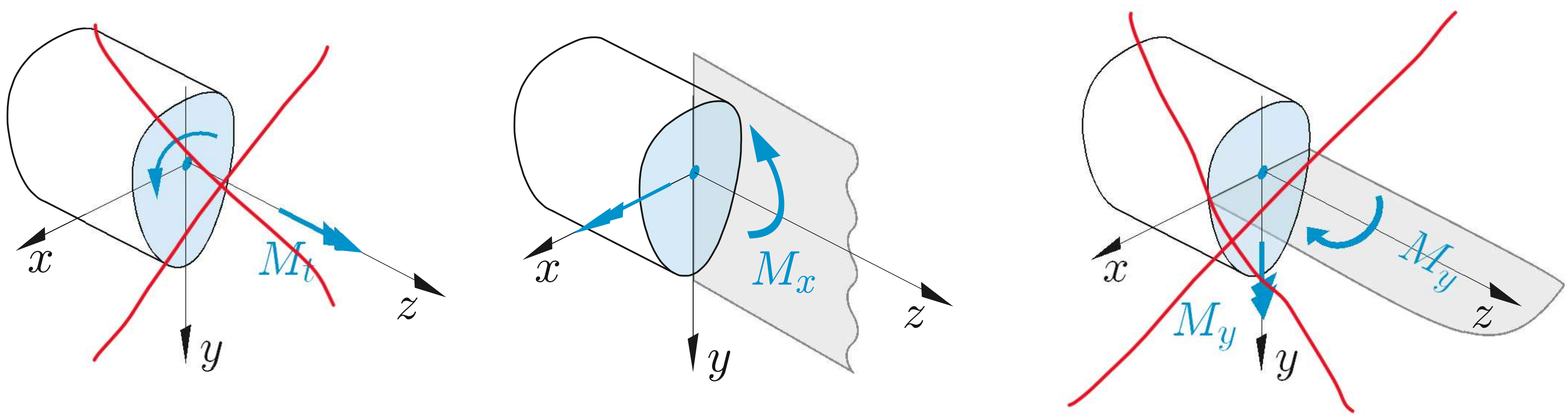


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione, caso piano (zy): componenti di $\mathbf{R}(z)$ $[F]$



Caratteristiche della sollecitazione, caso piano (zy): componenti di $\mathbf{M}(z)$ $[FL]$



3. Statica della trave: le forze interne in sezione

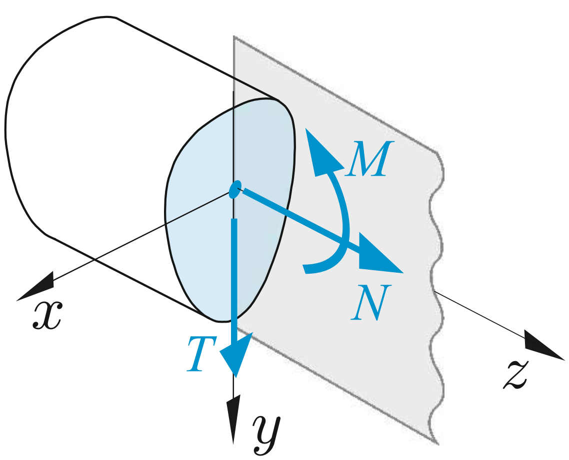
Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$T_x(z) = 0, M_y(z) = 0, M_t(z) = 0 \qquad T_y(z) = T(z), \quad M_x(z) = M(z)$

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \quad \rightarrow$ *Risultante delle forze interne* $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

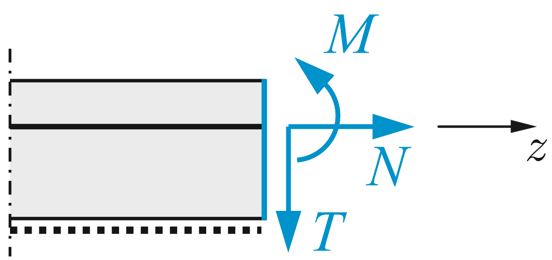
$N(z), \quad T(z), \quad M(z) \quad \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*



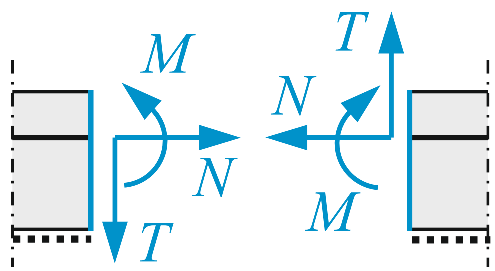
Faccia di normale positiva

3. Statica della trave: le forze interne in sezione

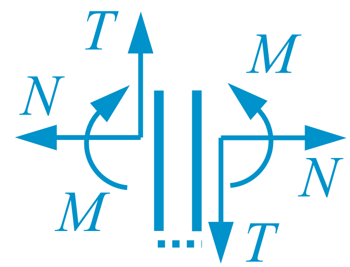
Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni



Faccia di normale positiva azioni interne positive

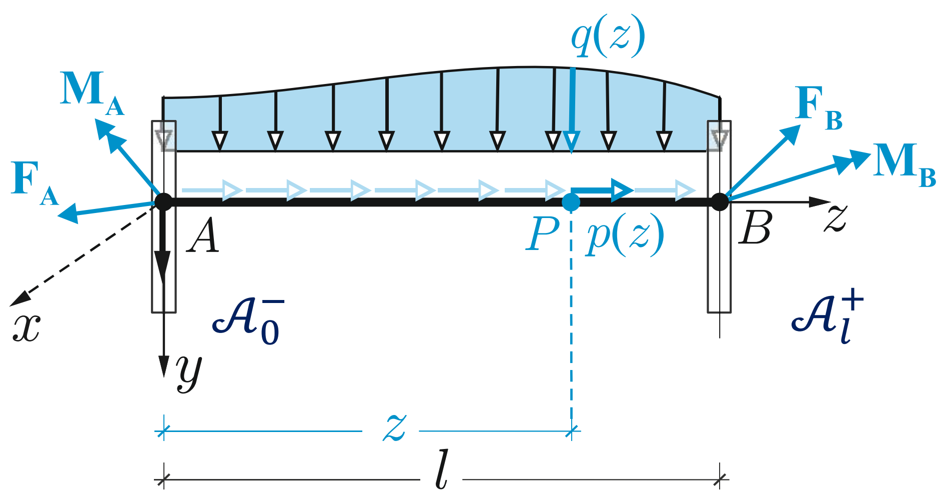


Azioni interne sulle due facce

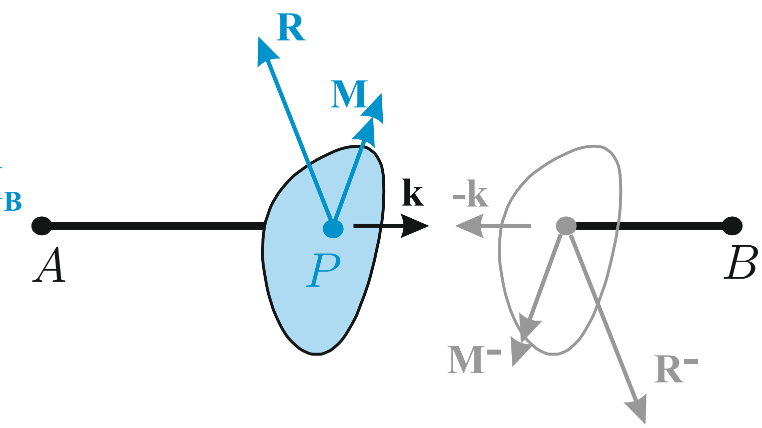


Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni

Equazioni indefinite di equilibrio



Forze esterne



Forze interne

$$\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j} \ [F/L]$$

$p(z) \rightarrow$ *Carico distribuito assiale* $[F/L]$

$q(z) \rightarrow$ *Carico distribuito trasversale* $[F/L]$

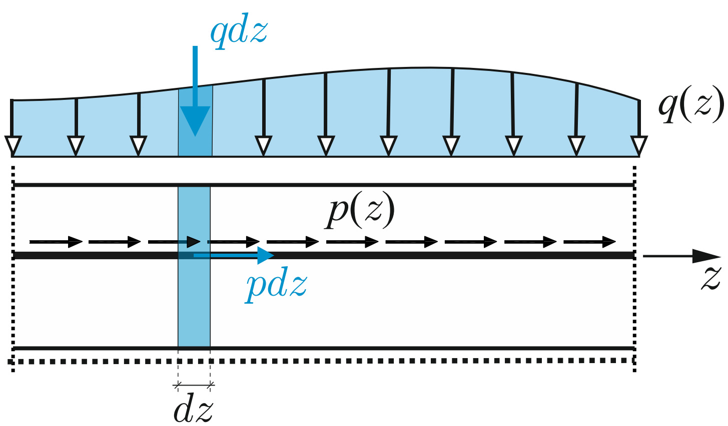
$\mathbf{F}_A, \mathbf{M}_A \rightarrow$ forze e coppie concentrate *esterne* agenti su $\mathcal{A}_0^-$

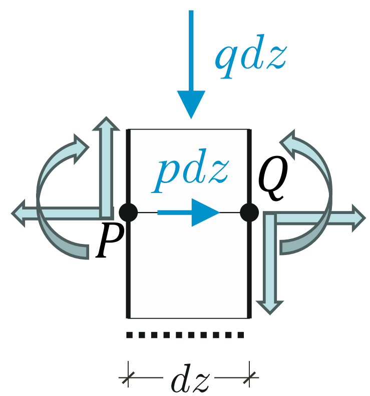
$\mathbf{F}_B, \mathbf{M}_B \rightarrow$ forze e coppie concentrate *esterne* agenti su $\mathcal{A}_l^+$

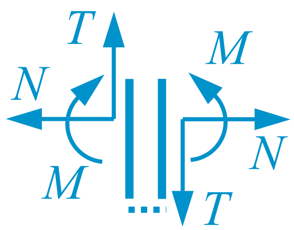
$$\mathbf{R}^-(0) = \mathbf{F}_A \qquad \mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B$$
$$\mathbf{M}^-(0) = \mathbf{M}_A \qquad \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

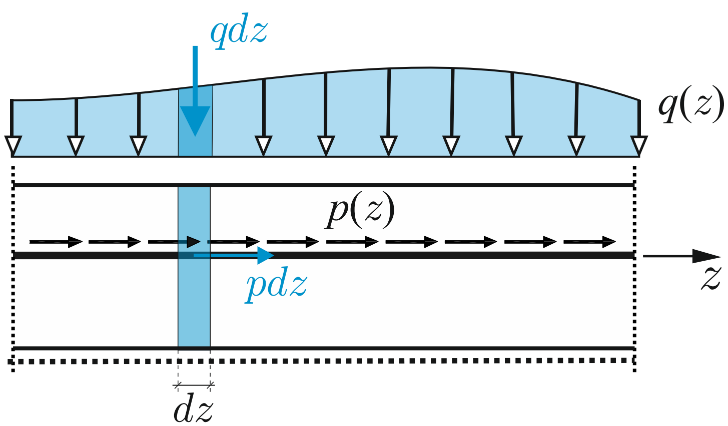


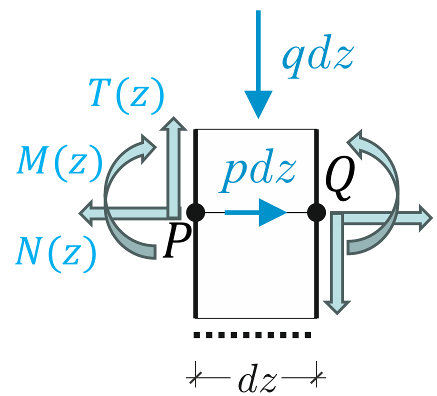


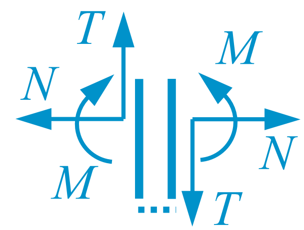


Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

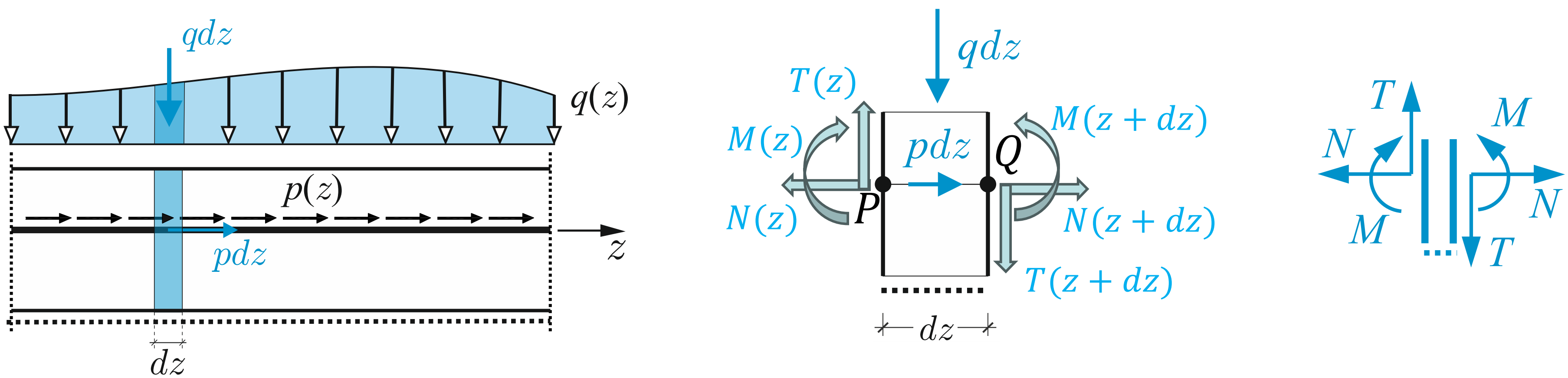






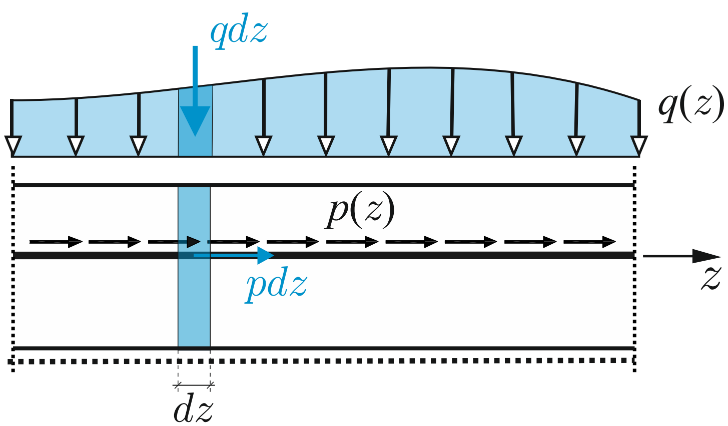
Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

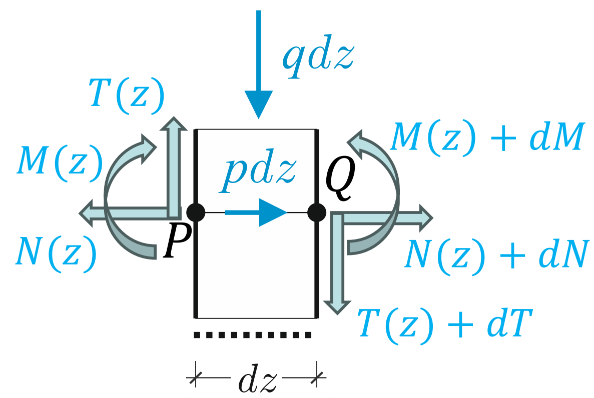
Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

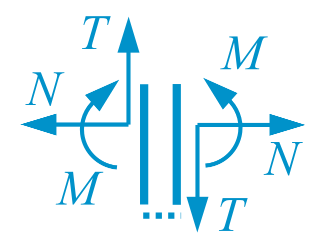


Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

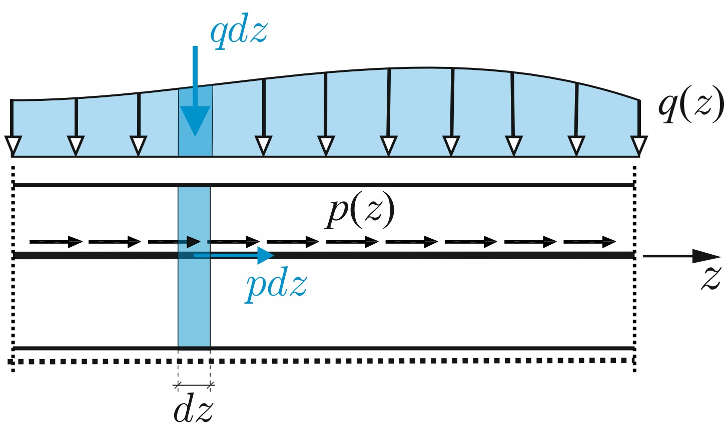


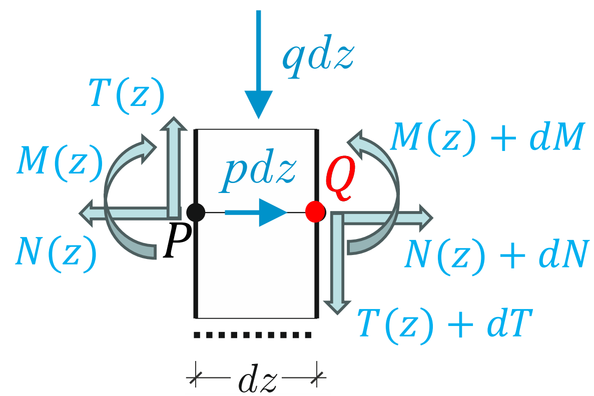


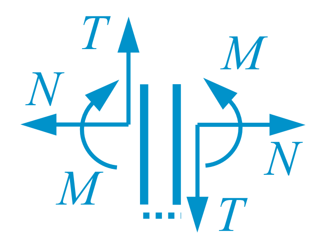


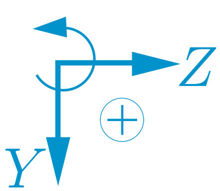
Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*







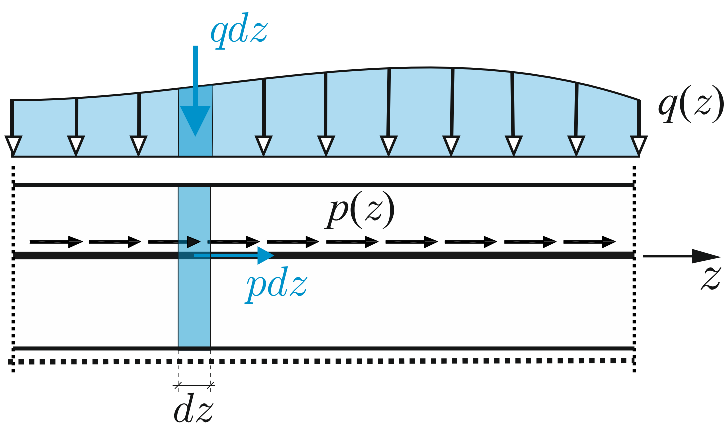


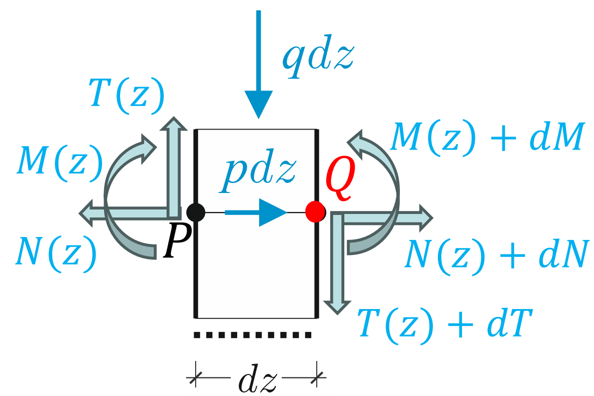
$$
\begin{cases}
\sum Z = 0 & \quad -N + (N + dN) + pdz = 0 \\
\sum Y = 0 & \quad -T + (T + dT) + qdz = 0 \\
\sum M_Q = 0 & \quad -M + (M + dM) - Tdz + qdz\frac{dz}{2} = 0
\end{cases}
$$

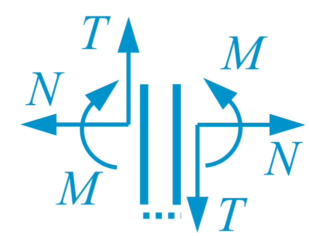
3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

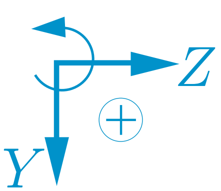
Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*









$$\begin{cases} \sum Z = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_Q = 0 \end{cases}$$

$$-\cancel{N} + (\cancel{N} + dN) + pdz = 0$$

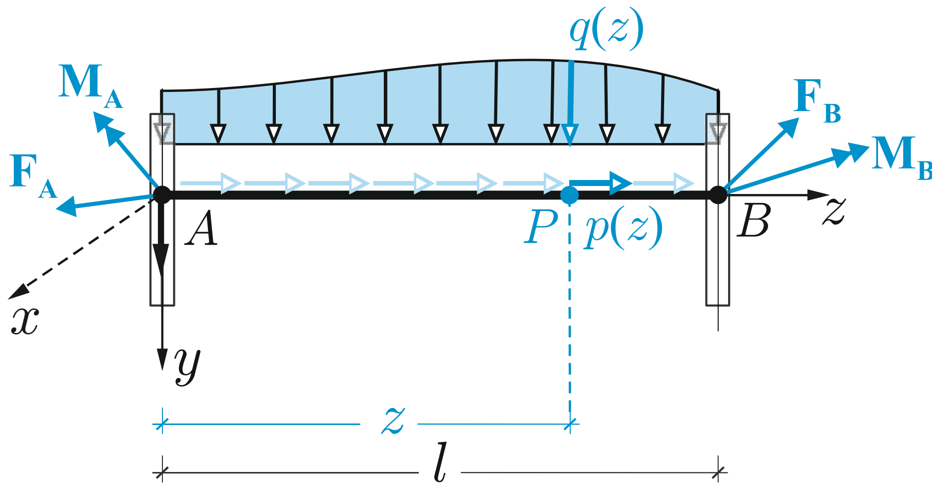
$$-\cancel{T} + (\cancel{T} + dT) + qdz = 0$$

$$-\cancel{M} + (\cancel{M} + dM) - Tdz + \cancel{qdz\frac{dz}{2}} = 0$$

$\approx \emptyset$

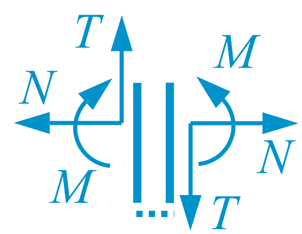
$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{dN}{dz} + p(z) = 0 \\ \dfrac{dT}{dz} + q(z) = 0 \\ \dfrac{dM}{dz} - T = 0 \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare



$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \quad + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

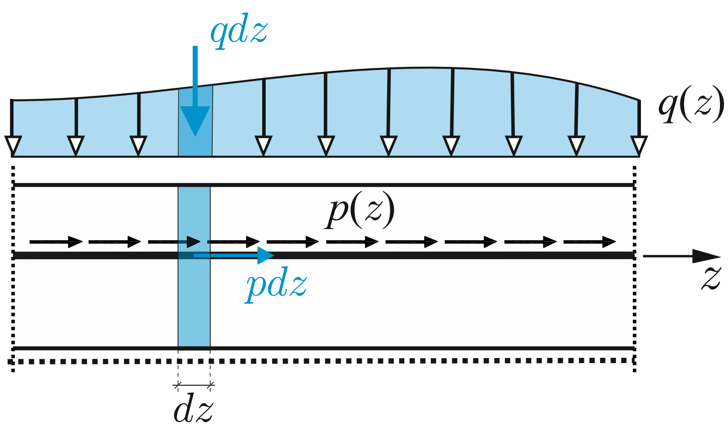
$N(z),\ \ T(z),\ \ M(z)\ \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*

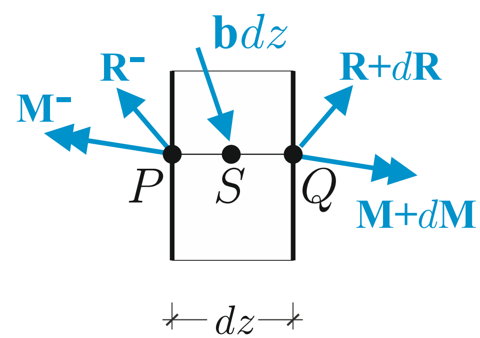


3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*





$$\mathbf{PQ} = dz\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2}\,\mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

$$\mathbf{R}^{-} + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

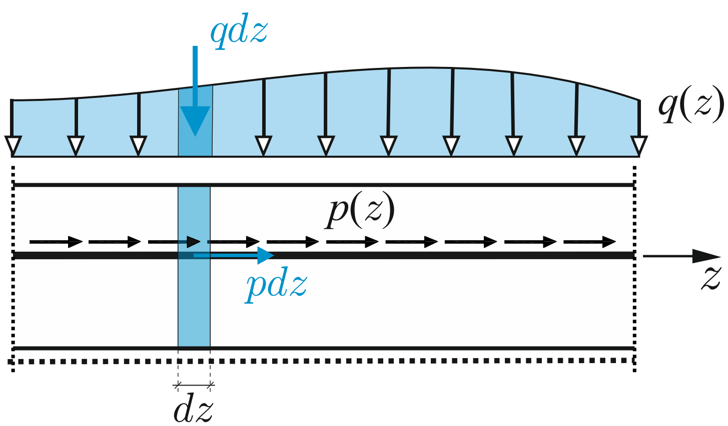
$$\mathbf{M}^{-} + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

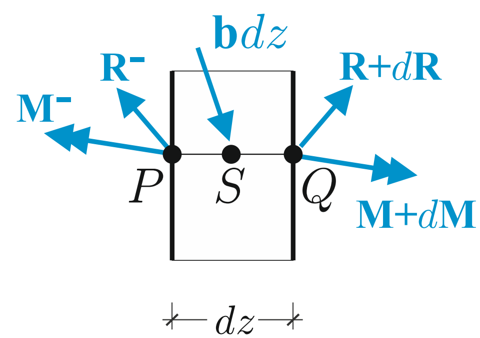
Sapienza Università di Roma

3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*





$$\mathbf{PQ} = dz\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2}\,\mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

$$\cancel{\mathbf{R}^-} + (\cancel{\mathbf{R}} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b}\,dz = \mathbf{0}$$

$$\cancel{\mathbf{M}^-} + \mathbf{PQ}\times(\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\cancel{\mathbf{M}} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS}\times\mathbf{b}\,dz = \mathbf{0}$$

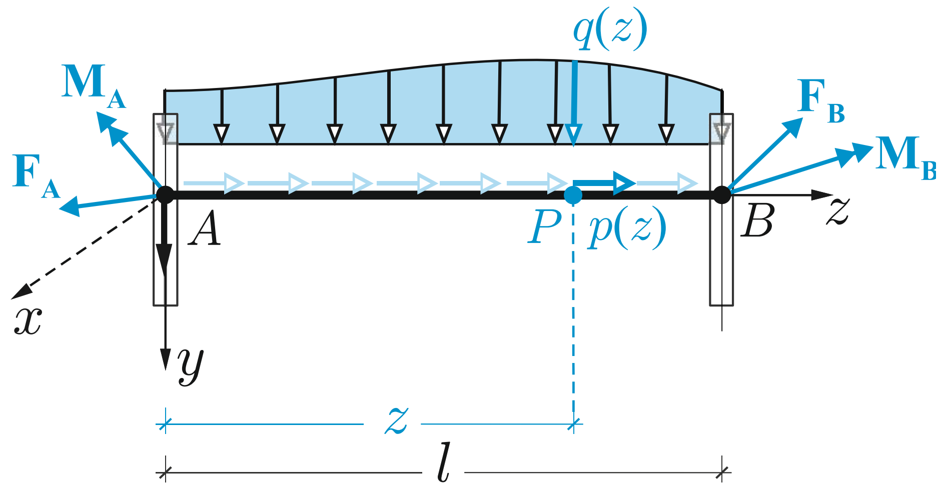
Lemma di Cauchy

$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

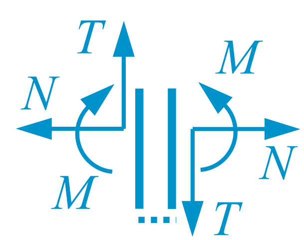


$$\begin{cases} \mathbf{R}'(z) + \mathbf{b}(z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}'(z) + \mathbf{k} \times \mathbf{R}(z) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^-(0) = \mathbf{F}_A \qquad \mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B$$
$$\mathbf{M}^-(0) = \mathbf{M}_A \qquad \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

$N(z), \quad T(z), \quad M(z) \quad \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*

$$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i}$$



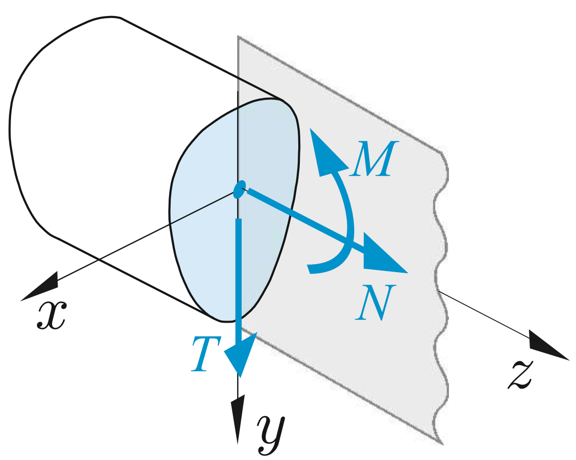
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$ → *Risultante delle forze interne* $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i}$ → *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

$N(z),\ \ T(z),\ \ M(z)$ → *Caratteristiche della sollecitazione* (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

(obiettivo 2)

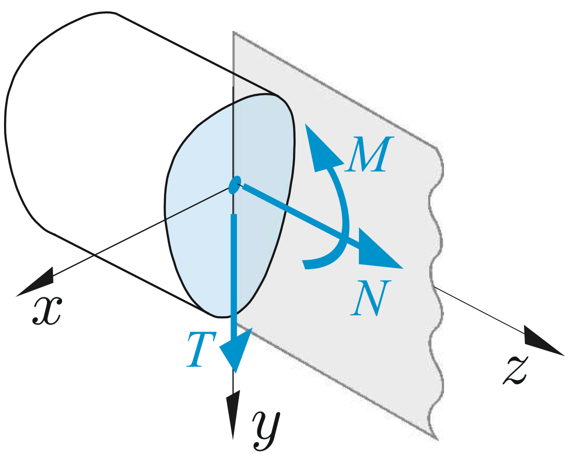
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$ → *Risultante delle forze interne* $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i}$ → *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

$N(z), \;\; T(z), \;\; M(z)$ → *Caratteristiche della sollecitazione* (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

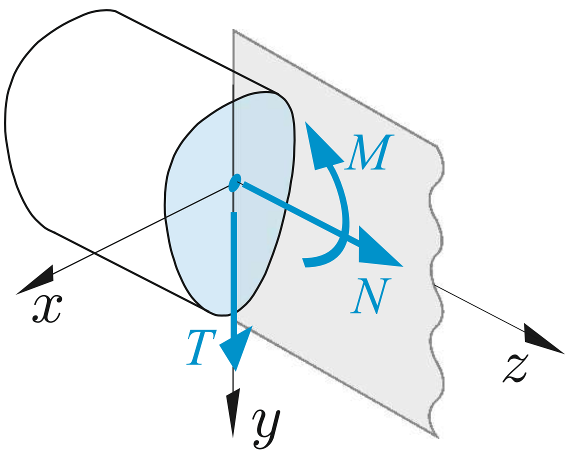
$$\begin{cases} \mathbf{R}'(z) + \mathbf{b}(z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}'(z) + \mathbf{k} \times \mathbf{R}(z) = \mathbf{0} \end{cases}$$

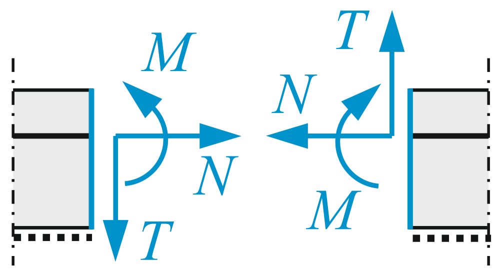
$$\mathbf{R}^{-}(0) = \mathbf{F}_A \qquad \mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B$$
$$\mathbf{M}^{-}(0) = \mathbf{M}_A \qquad \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

(obiettivo 2)

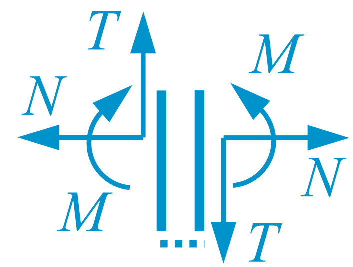
3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z: $N(z), T(z), M(z)$





Azioni interne sulle due facce

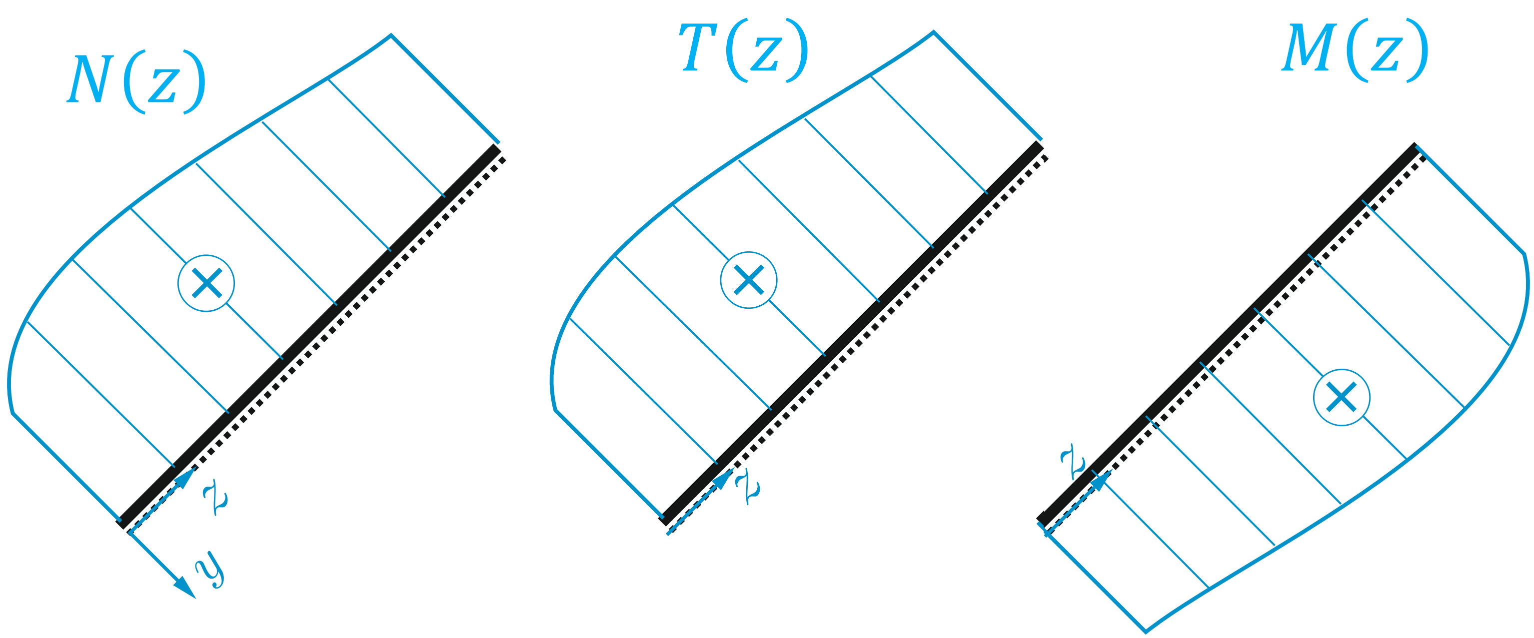


Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni

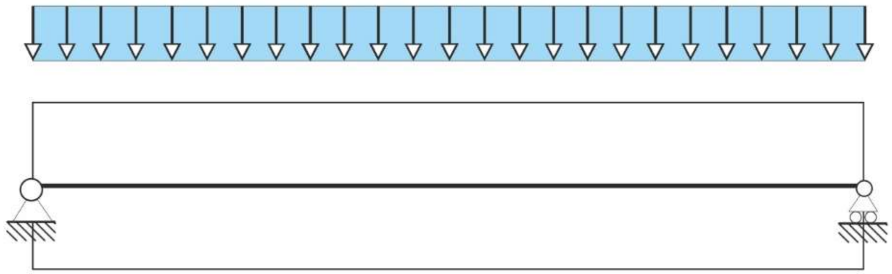
3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

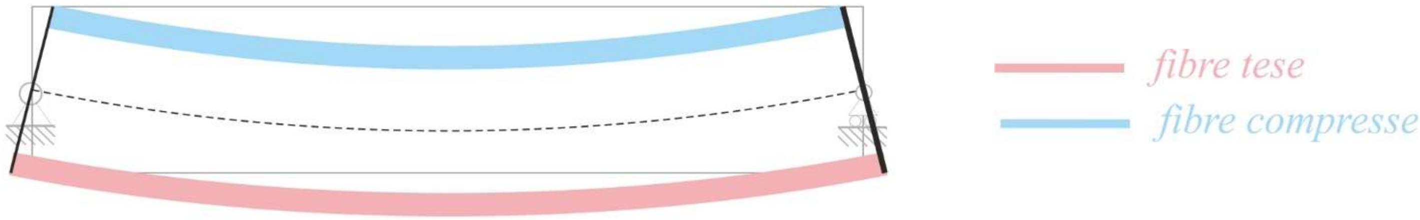
Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z: $N(z), T(z), M(z)$

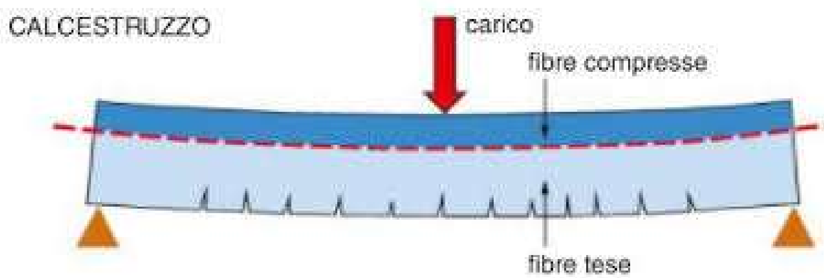
Diagrammi delle CdS: grafici delle funzioni definite al punto precedente, rappresentate nel sistema di riferimento della trave secondo prefissate convenzioni.



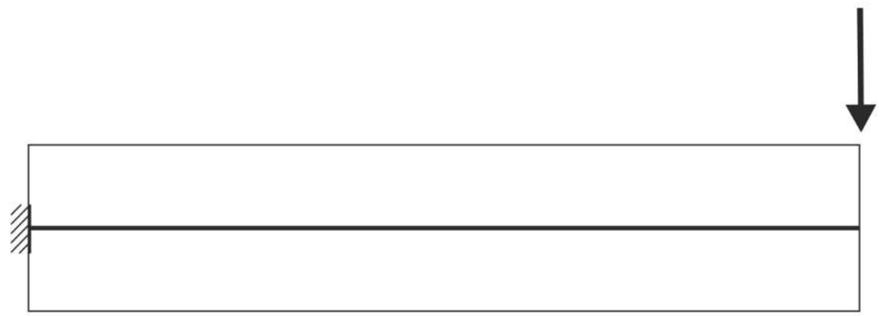
FIBRE TESE



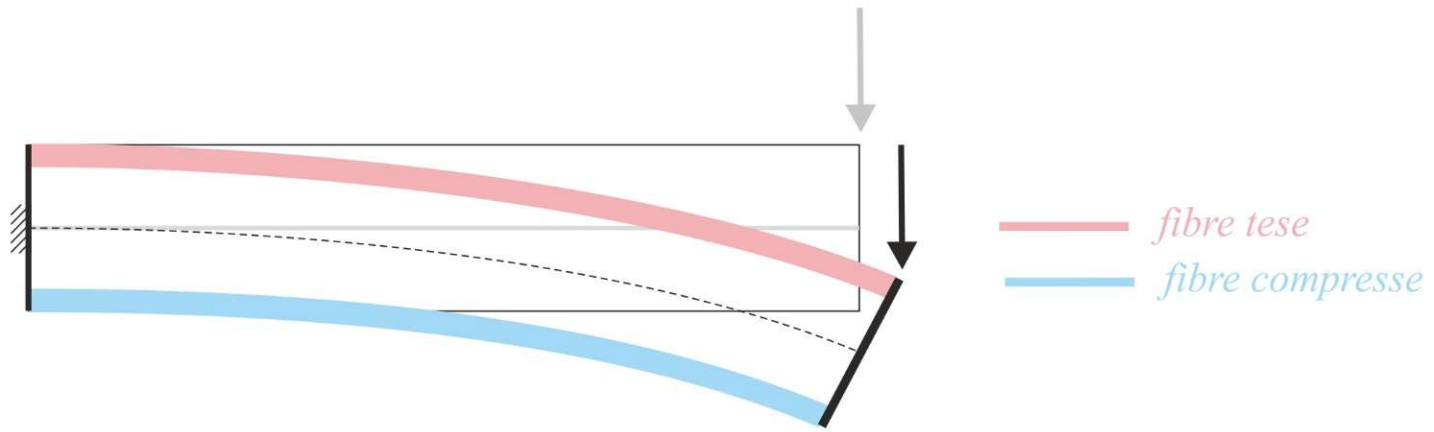

fibre tese
fibre compresse


CALCESTRUZZO
carico
fibre compresse
fibre tese

FIBRE TESE



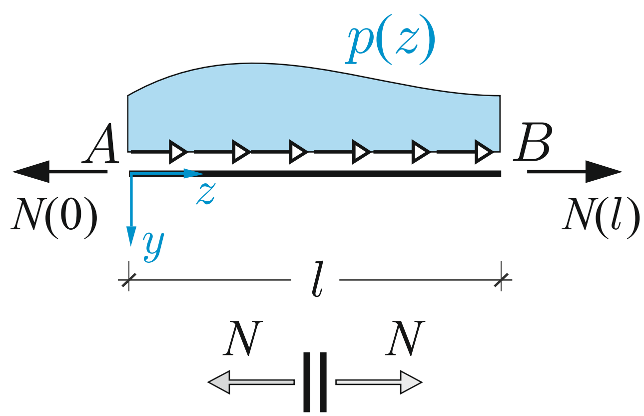
FIBRE TESE



3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito assiale ovunque nullo $p(z) = 0$	carico distribuito assiale legge uniforme $p(z) = \bar{p}$	carico distribuito assiale legge lineare $p(z) = p_1 z + p_2$
$N(z)$ legge uniforme	$N(z)$ legge lineare	$N(z)$ legge quadratica



$$N'(z) = -p(z)$$

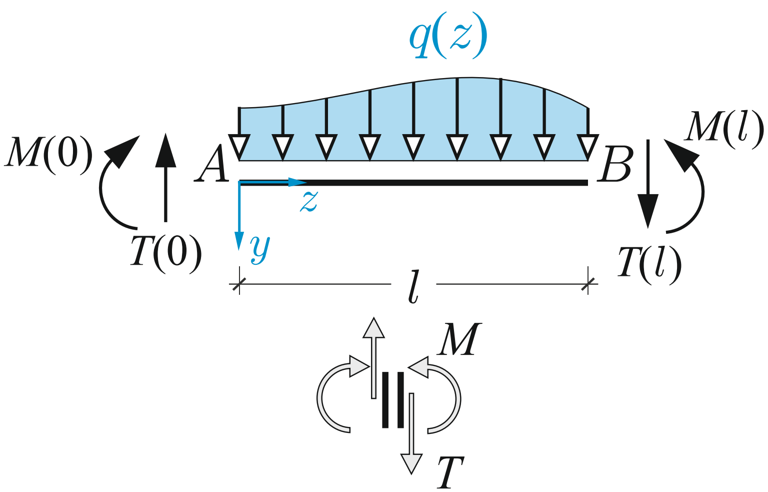
$$N(z) = -\int p(z)dz$$

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito trasversale ovunque nullo $q(z) = 0$	carico distribuito trasversale legge uniforme $q(z) = \overline{p}$	carico distribuito trasversale legge lineare $q(z) = q_1 z + q_2$
$\boldsymbol{T(z)}$ legge uniforme	$\boldsymbol{T(z)}$ legge lineare	$\boldsymbol{T(z)}$ legge quadratica

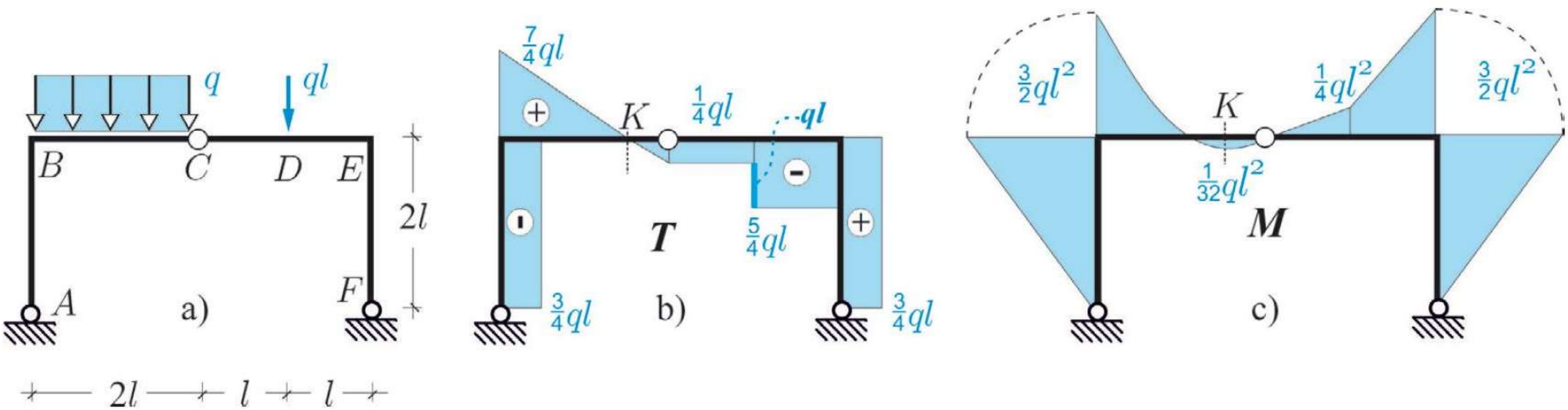
Taglio ovunque nullo	Taglio uniforme	Taglio lineare	Taglio quadratico
$\boldsymbol{M(z)}$ legge uniforme	$\boldsymbol{M(z)}$ legge lineare	$\boldsymbol{M(z)}$ legge quadratica	$\boldsymbol{M(z)}$ legge cubica



$$T'(z) = -q(z)$$
$$M'(z) = T(z)$$

$$T(z) = -\int q(z)dz \qquad M(z) = \int T(z)dz$$

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico



3. Statica della trave: esercizi (lavagna)

Esercizi Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l’isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera; c) determinare le leggi di variazione delle CdS disegnando i relativi diagrammi.