

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



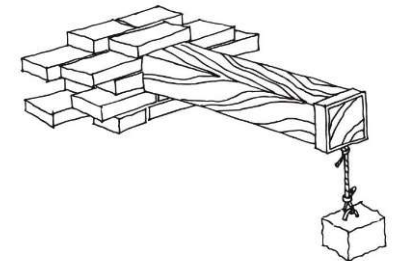
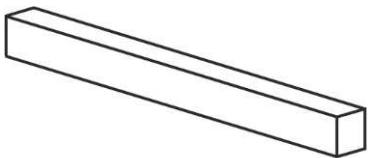
**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA



# Lezione

## Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





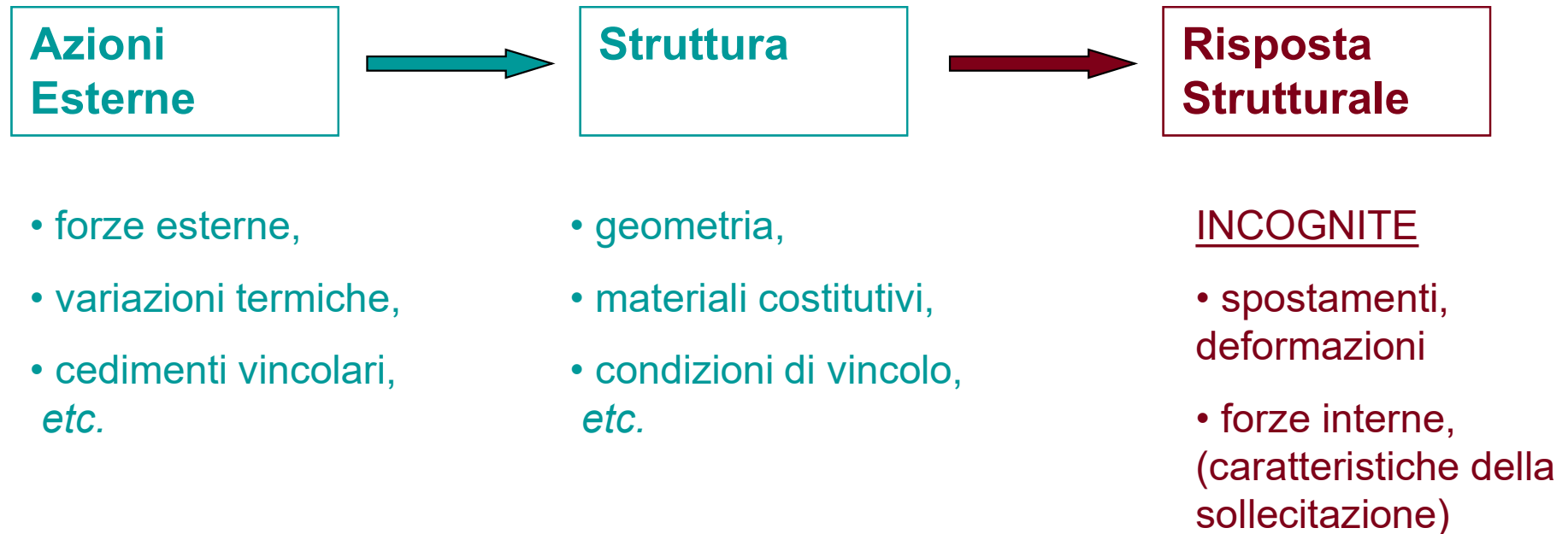
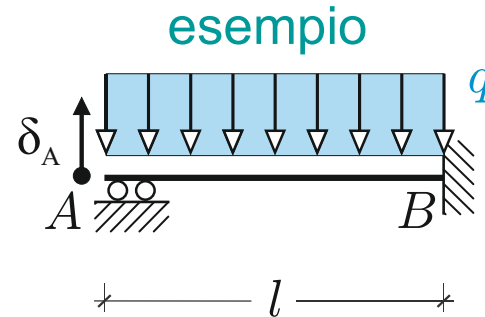
# Parte II - Il modello di trave elastica 1D

## 4. Il problema elastico

- **Obiettivi**
- **Posizione del problema**
  - Ipotesi del modello
  - Dati del problema
  - Incognite
- **Formulazione analitica**
- **Esistenza della soluzione**
- **Metodi di soluzione**

## 4. Problema elastico (elastostatico)

Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.



## 4. Problema elastico: posizione del problema

### Ipotesi del modello.

**Ipotesi 1 (cinematica):** ‘piccoli spostamenti’. **1a:**  $\forall z \in [0, l], \quad |\mathbf{u}(z)| \ll l$   
**1b:**  $\forall z \in [0, l], \quad |\boldsymbol{\theta}(z)| \ll 1 \text{ rad}$

**Ipotesi 2 (statica):** le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) della trave.

**Ipotesi 3 (materiale):** si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*. Nel seguito, per semplicità, il materiale sarà considerato anche *omogeneo* (moduli elastici costanti in ogni punto della trave)

## 4. Problema elastico: posizione del problema

### Dati del problema (problema piano)

#### Azioni esterne

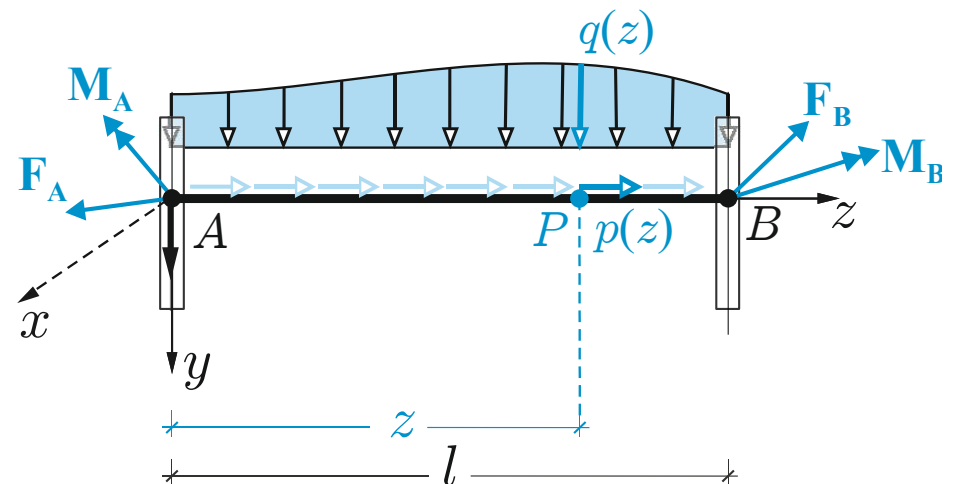
- Forze esterne attive distribuite  $\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j}$
- Forze e coppie esterne concentrate alle estremità
- Spostamenti imposti, cedimenti vincolari
- Variazioni di temperatura
- Ecc.

#### Schema statico

- Geometria della linea d'asse e della sezione (baricentro, area, momenti d'inerzia)
- Disposizione/tipologia dei vincoli

#### Materiale

- Moduli elastici  $E, G$



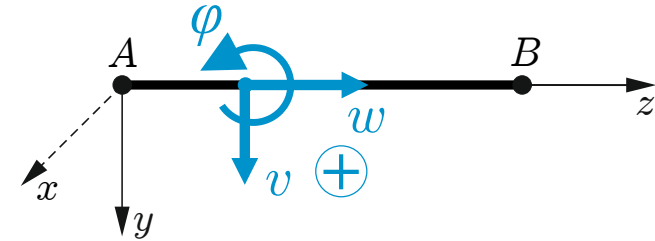


## 4. Problema elastico: posizione del problema

### Incognite del problema

### Cinematica

$w(z)$   $v(z)$   $\varphi(z)$  → Spostamenti e rotazioni



## 4. Problema elastico: posizione del problema

### Incognite del problema

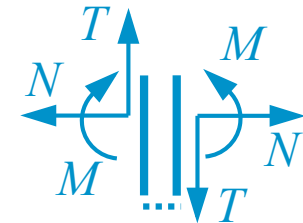
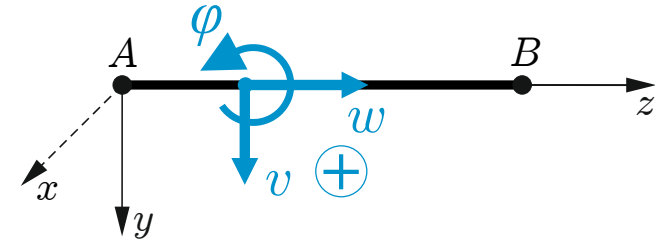
#### Cinematica

$w(z)$     $v(z)$     $\varphi(z)$     $\rightarrow$  Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$     $\gamma(z)$     $\chi(z)$     $\rightarrow$  Misure di deformazione

#### Statica

$N(z)$     $T(z)$     $M(z)$     $\rightarrow$  CdS





# 4. Problema elastico: posizione del problema

## Incognite del problema

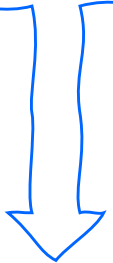
### Cinematica

$w(z)$   $v(z)$   $\varphi(z)$  → Spostamenti e rotazioni

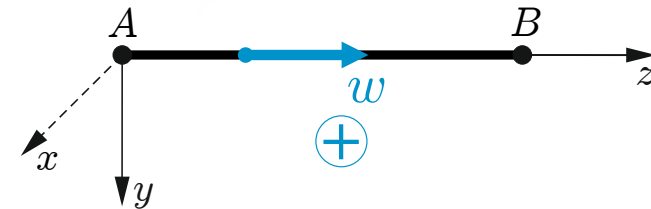
$\varepsilon(z)$   $\gamma(z)$   $\chi(z)$  → Misure di deformazione

### Statica

$N(z)$   $T(z)$   $M(z)$  → CdS



## Problema assiale



## 4. Problema elastico: posizione del problema

### Incognite del problema

#### Cinematica

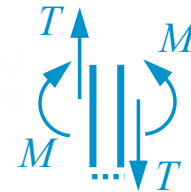
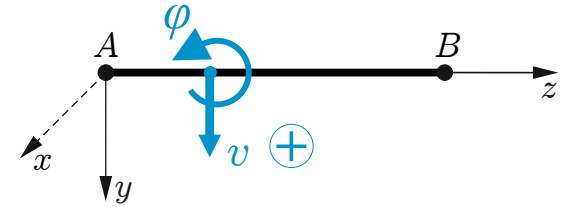
$w(z)$   $v(z)$   $\varphi(z)$  → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$   $\gamma(z)$   $\chi(z)$  → Misure di deformazione

#### Statica

$N(z)$   $T(z)$   $M(z)$  → CdS

**Problema  
flessionale**



## 4. Problema elastico: formulazione analitica

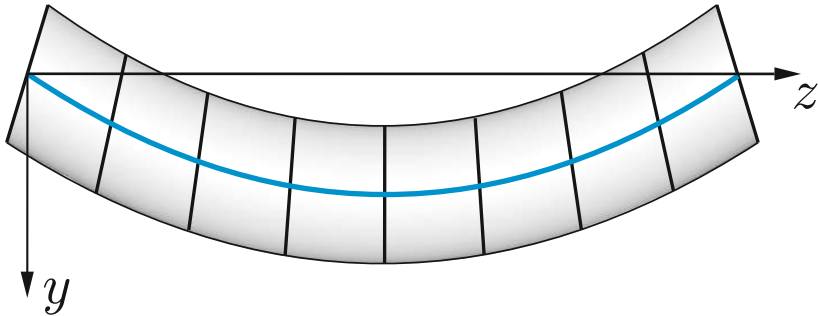
### Equazioni risolventi

#### Incognite cinematiche

$$\begin{array}{ccc} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{array}$$

#### Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



$$\gamma(z) \neq 0$$

Modello di Timoshenko

### Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

### Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

### Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \quad (\text{Hooke}) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases}$$

## 4. Problema elastico: formulazione analitica

### Problema assiale

#### Incognite cinematiche

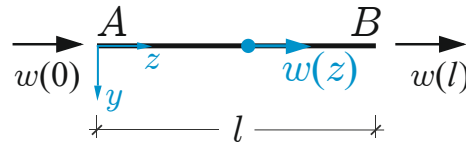
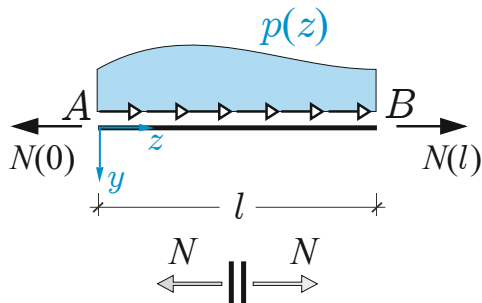
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

#### Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



### Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \quad (\text{Hooke}) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases}$$



## 4. Problema elastico: formulazione analitica

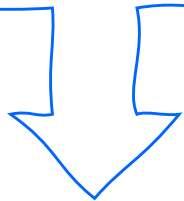
### Problema flessionale

#### Incognite cinematiche

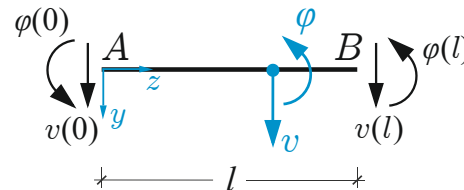
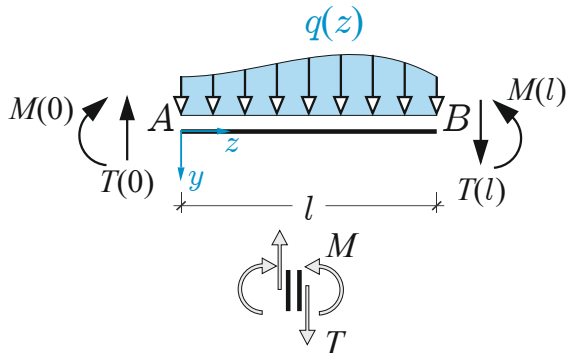
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

#### Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



### Problema flessionale (Timoshenko)



### Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

### Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

### Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \quad (\text{Hooke}) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases}$$



## 4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

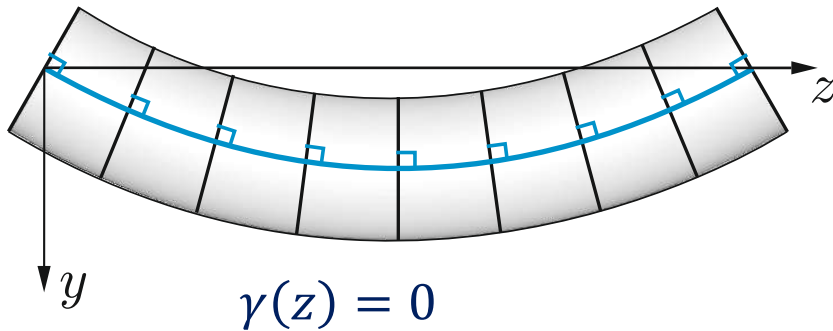
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

### Incognite cinematiche

$$\begin{array}{ccc} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{array}$$

### Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \quad (\text{Hooke}) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases}$$



## 4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

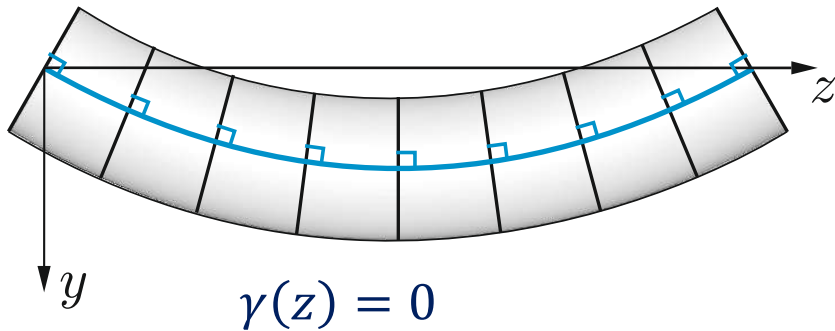
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

### Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{matrix}$$

### Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

## 4. Problema elastico: soluzione

### Esistenza e unicità per sistemi determinati e iperstatici (Kirchhoff)

### Principio di sovrapposizione degli effetti

*La soluzione del problema elastico relativa ad una qualsiasi combinazione di azioni esterne agenti simultaneamente si ottiene sovrapponendo le soluzioni relative alle singole azioni esterne pensate agire separatamente*

### Metodi di soluzione

- *Metodo degli spostamenti*
- *Metodo delle forze*