

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



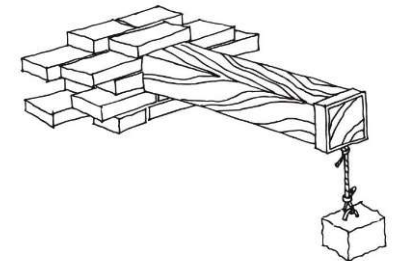
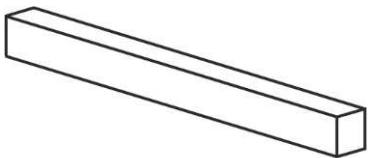
**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA



# Lezione

## Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo**
- Problema elastico



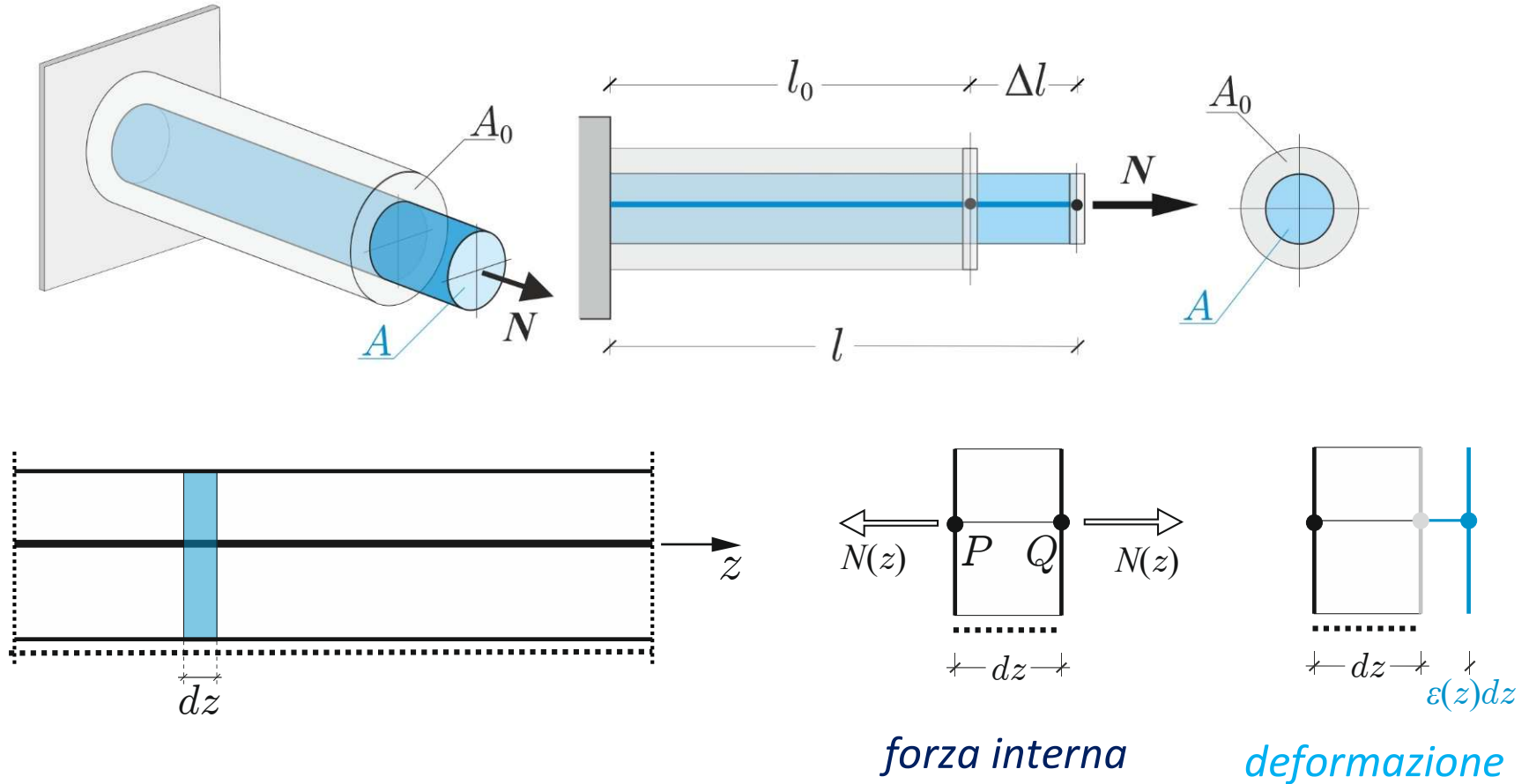


## Parte II - Il modello di trave elastica 1D

### 3. Materiale: legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
  - materiali duttili
  - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
  - Legge di Hooke
- **Equazioni di legame costitutivo per la trave**

### 3. Legame costitutivo: obiettivi



$$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z) \quad ?$$

$$T(z) \leftrightarrow \gamma(z) \quad ?$$

$$M(z) \leftrightarrow \chi(z) \quad ?$$

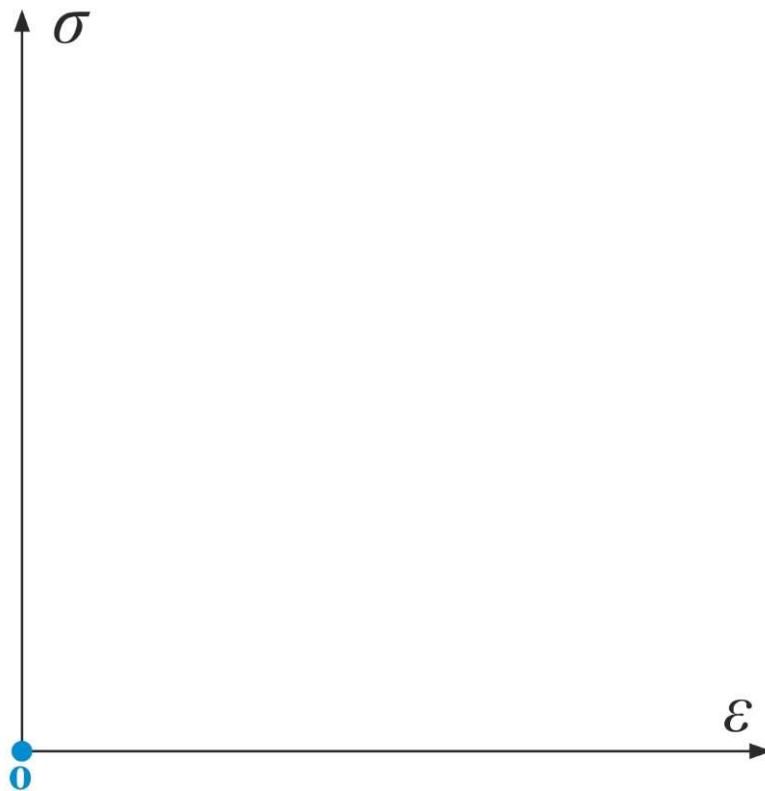
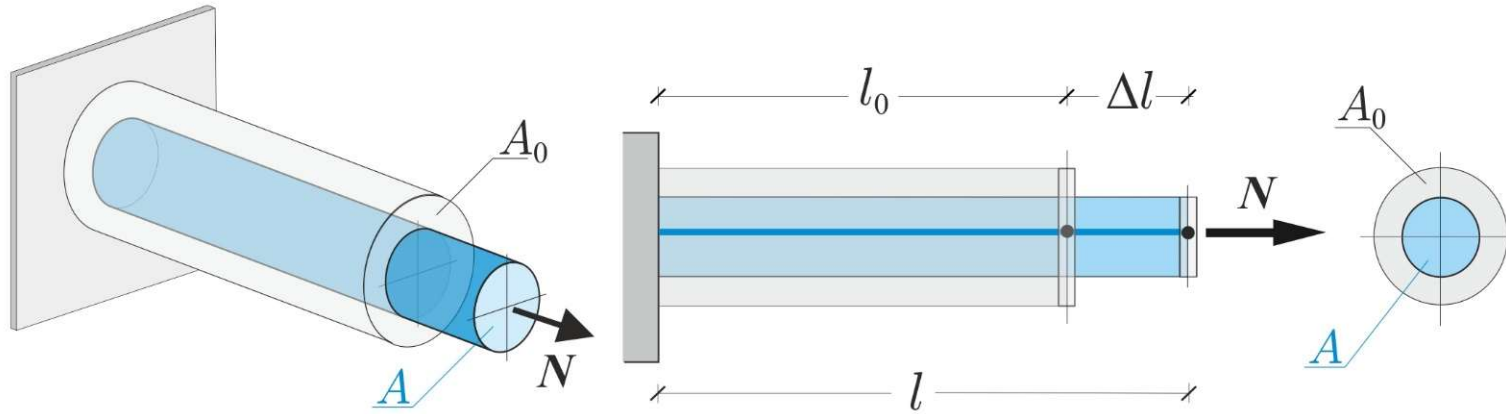
**Materiale?**

*Indagini sperimentali:*

- prova uniassiale
- prova a torsione



### 3. Legge costitutivo: prova uniassiale



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

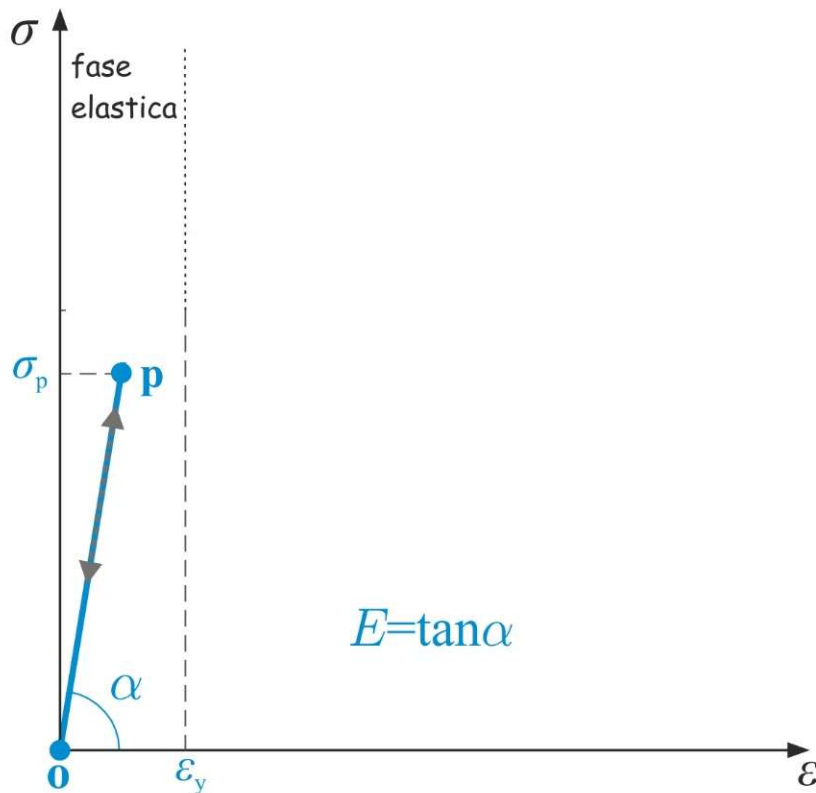
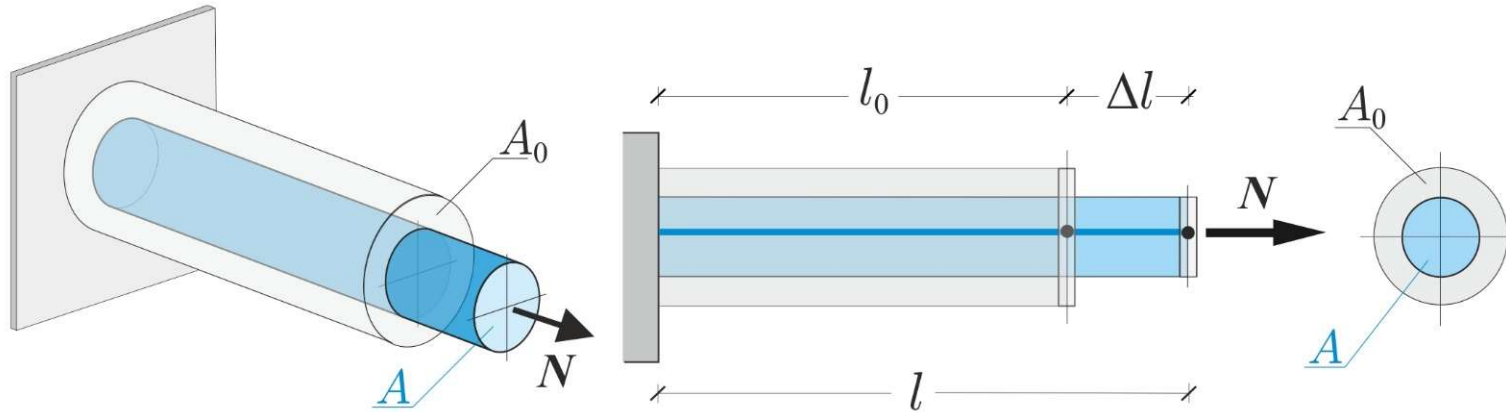
$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$



### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



#### FASE ELASTICA

*o-p* → *comportamento elastico lineare*

*o* → *stato iniziale*

*p* → *limite di proporzionalità*

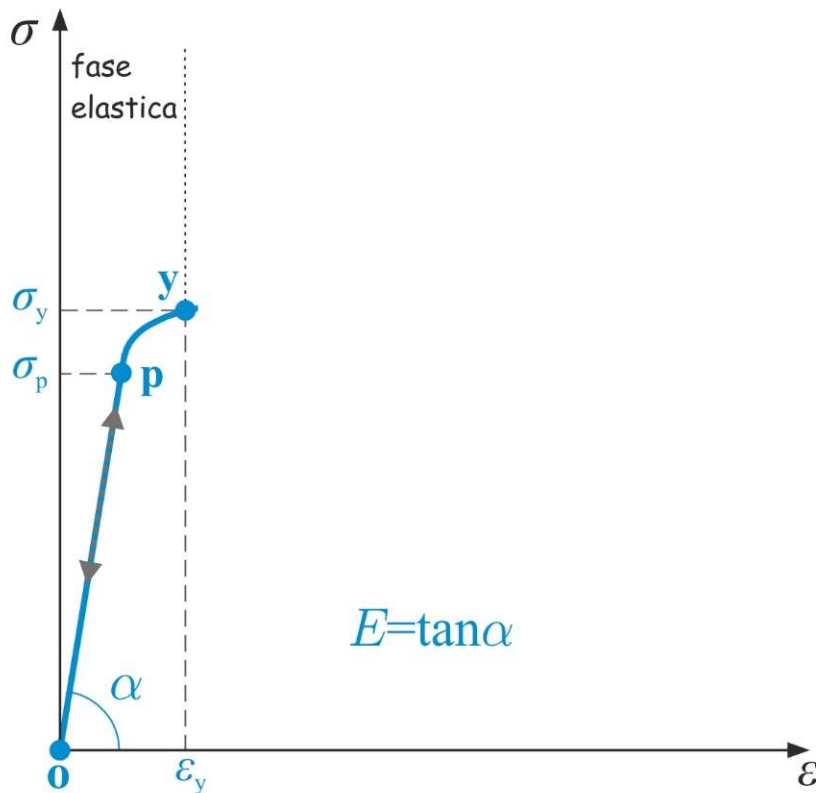
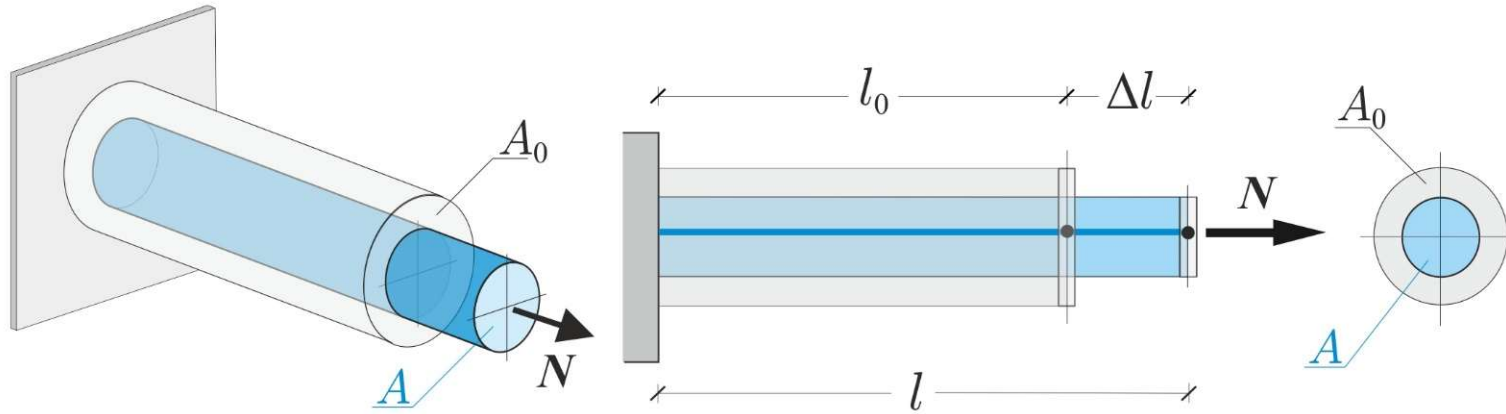
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



#### FASE ELASTICA

$o-p \rightarrow$  comportamento elastico lineare

$o \rightarrow$  stato iniziale

$p \rightarrow$  limite di proporzionalità

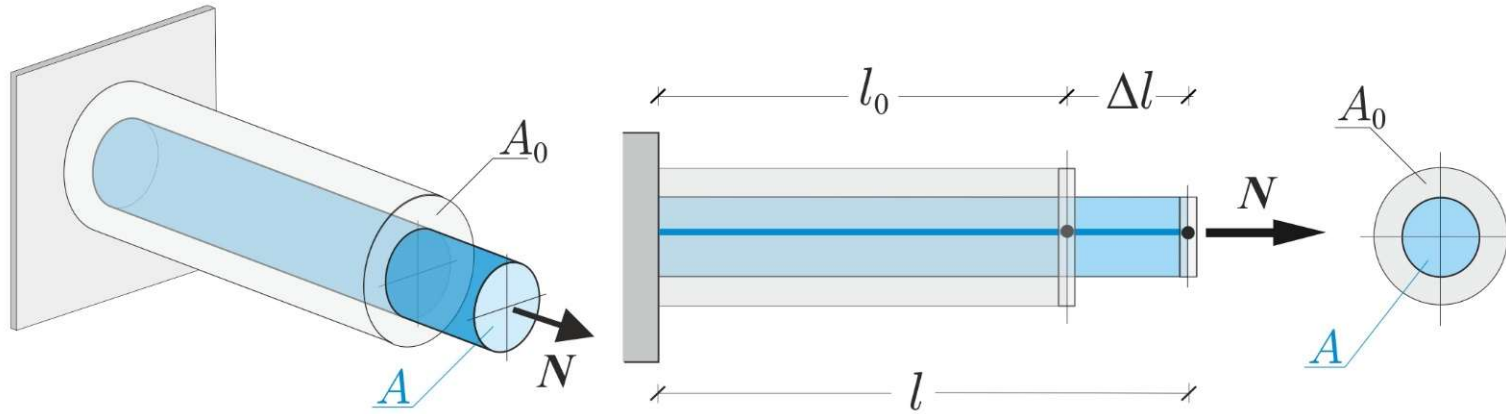
$p-y \rightarrow$  comportamento elast. non lineare

$y \rightarrow$  limite di elasticità

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

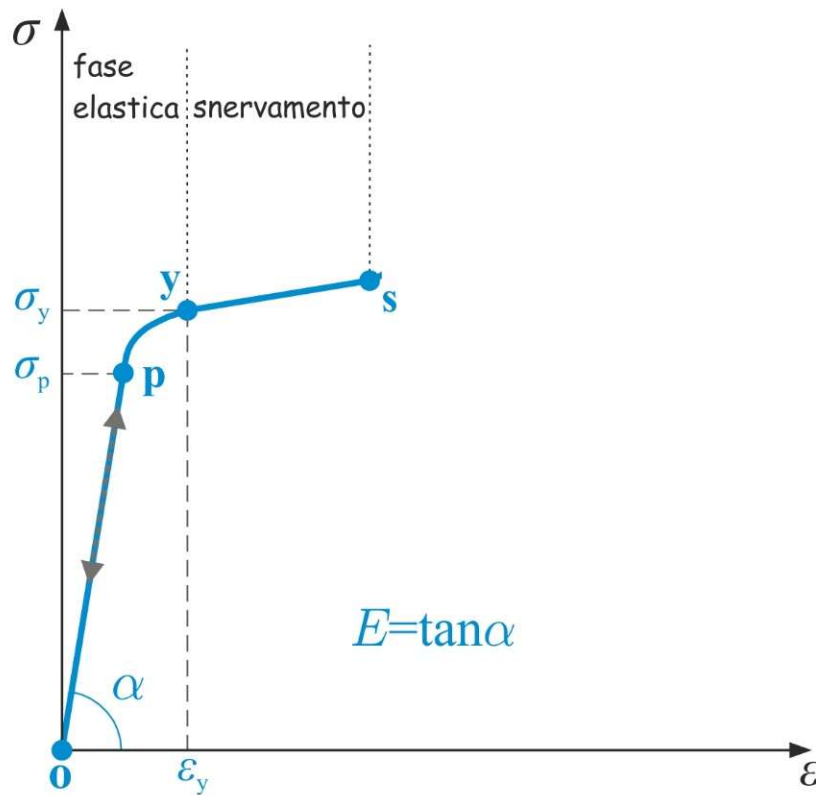
$[FL^{-2}]$   $[0]$

### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

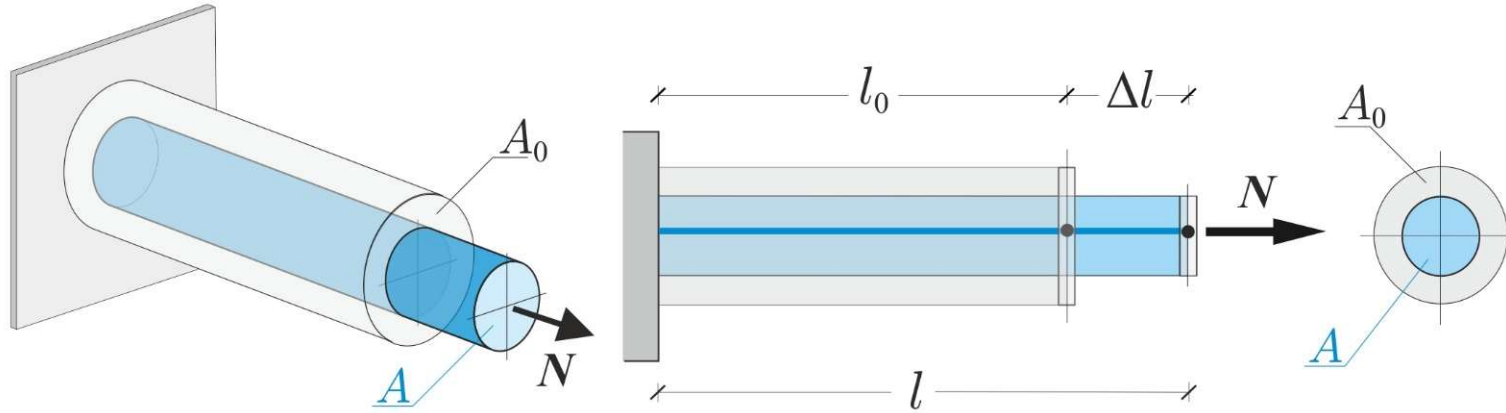
$y-s \rightarrow$  snervamento



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad [FL^{-2}]$$

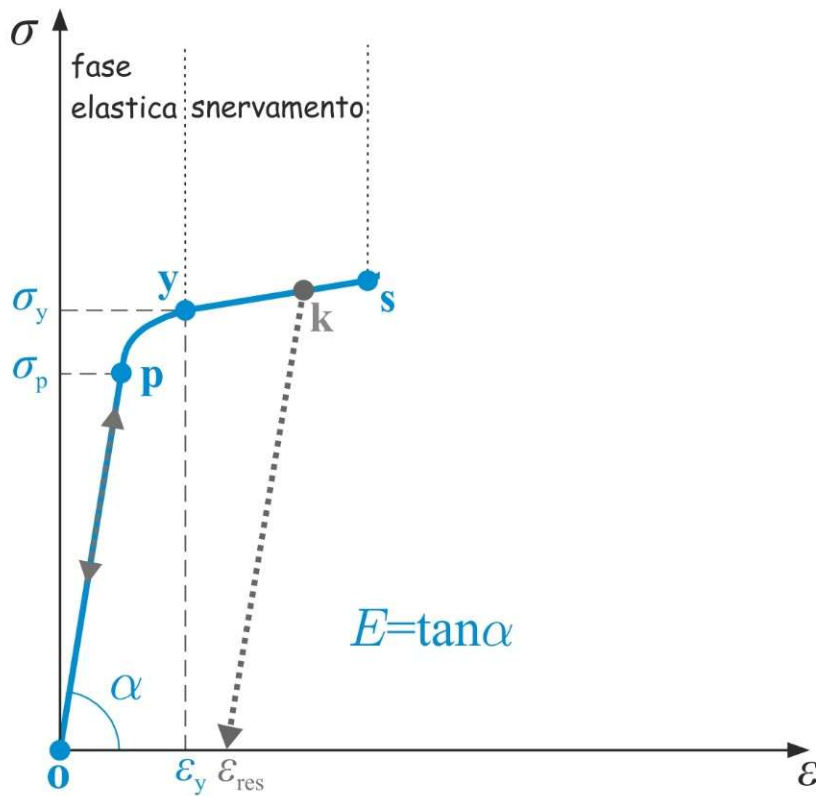
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad [0]$$

### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$  snervamento



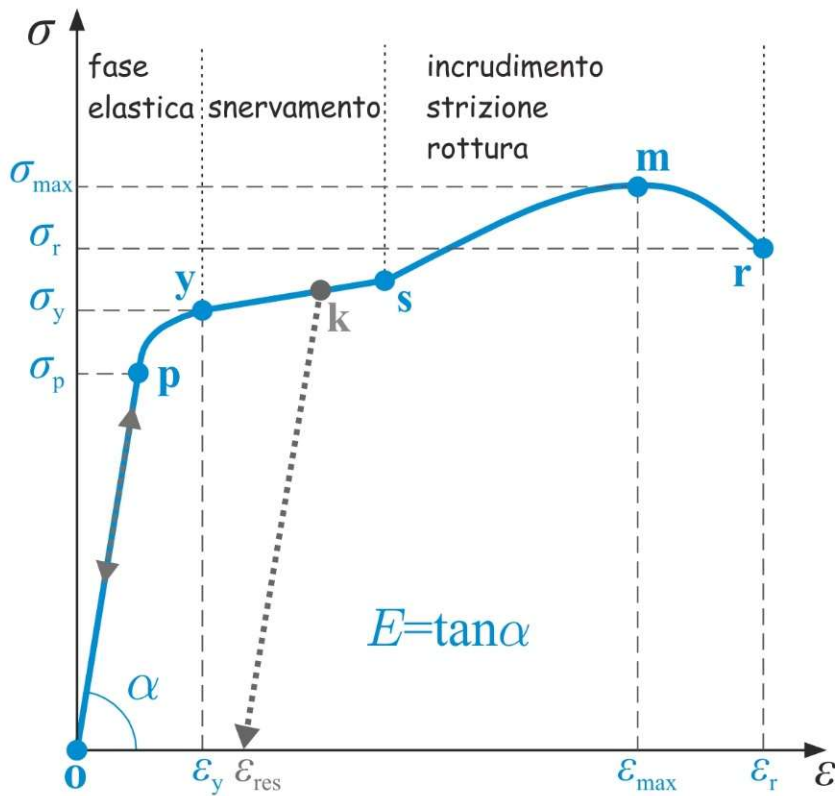
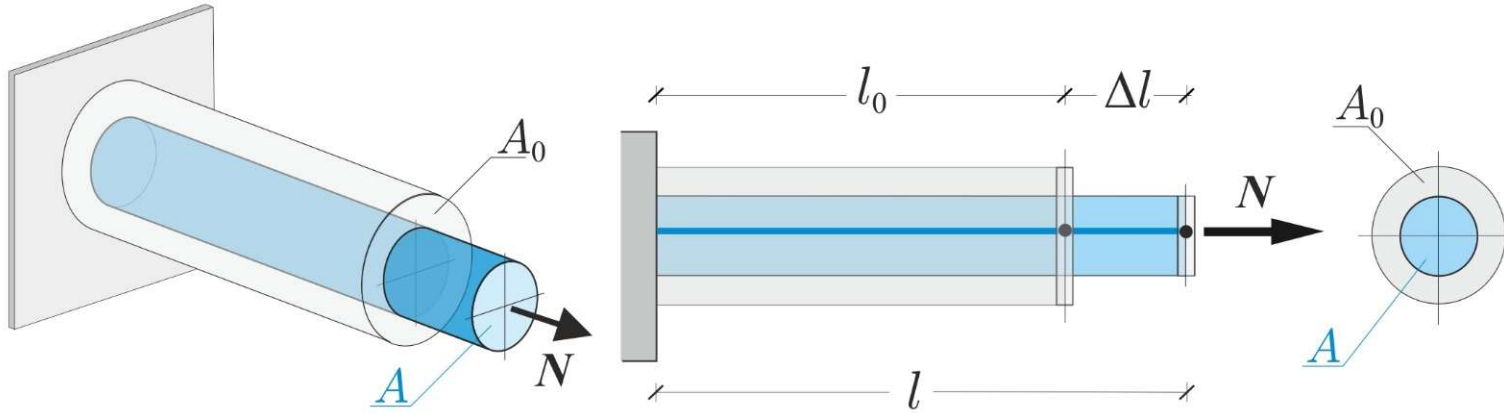
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

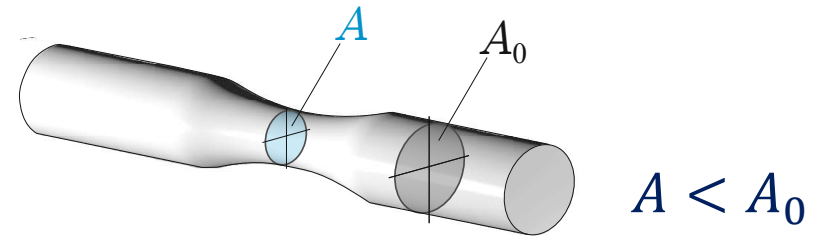
### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



#### FASE PLASTICA

$s-m \rightarrow$  *incrudimento*

$r \rightarrow$  *punto di rottura*



$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

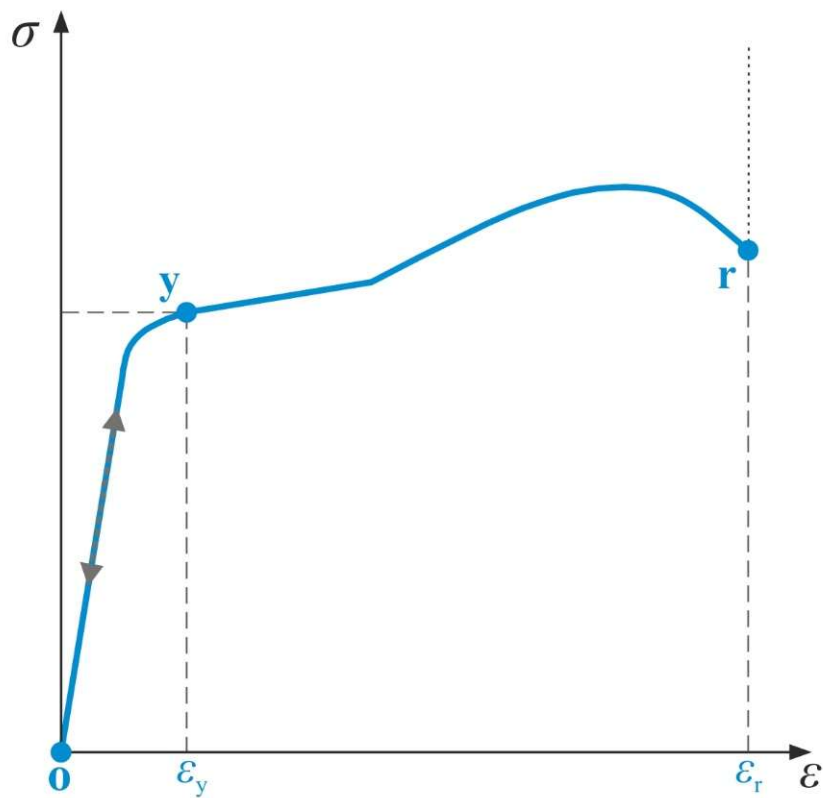
$[0]$



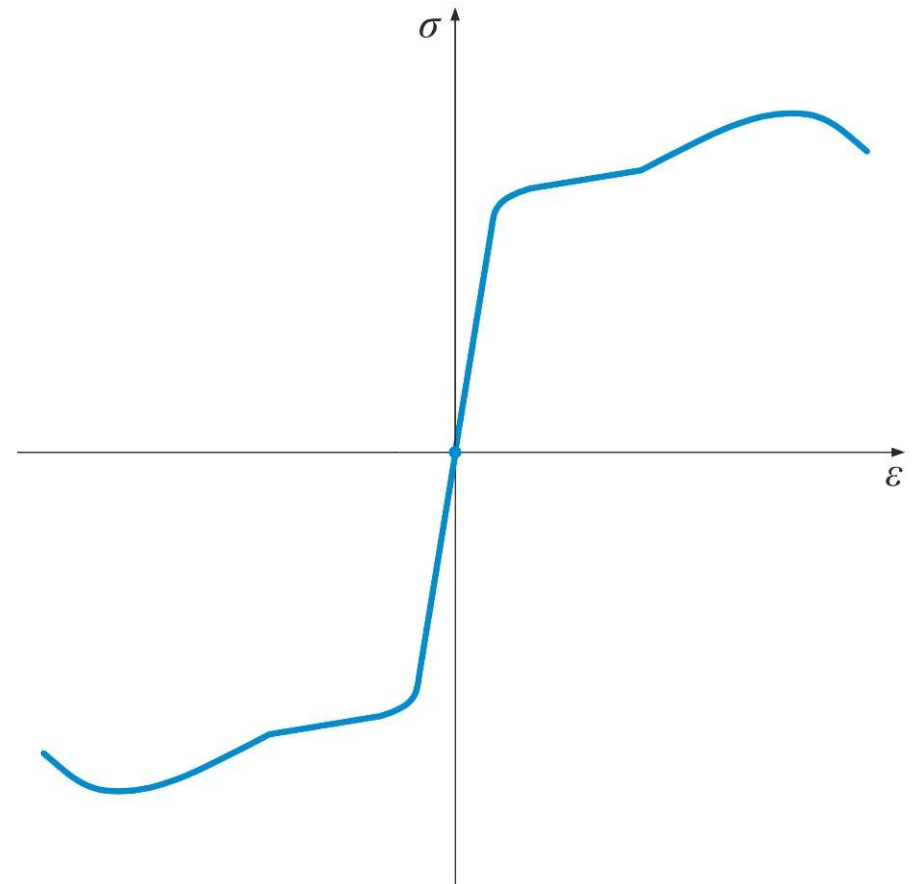
### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

*DUTTILITA'*

$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$

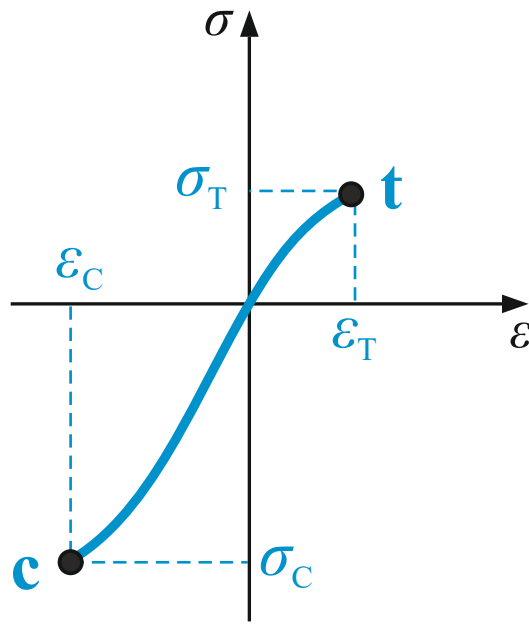
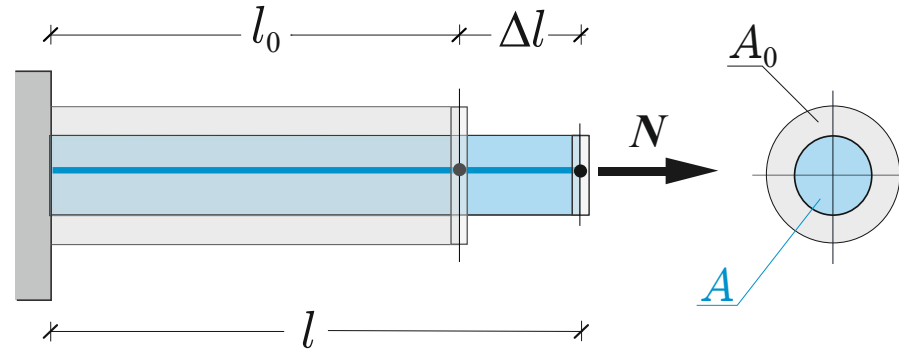
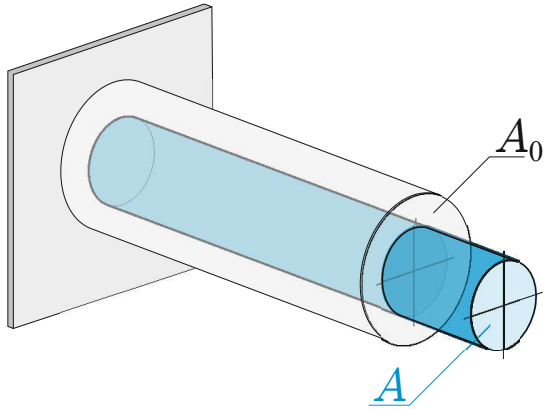


*SIMMETRIA*





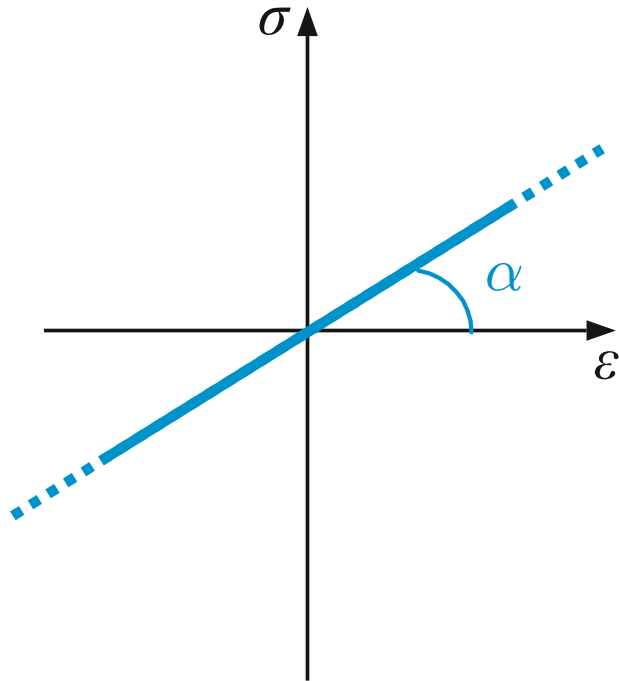
### 3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili



*t* → punto di rottura a trazione

*c* → punto di rottura a compressione

### 3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



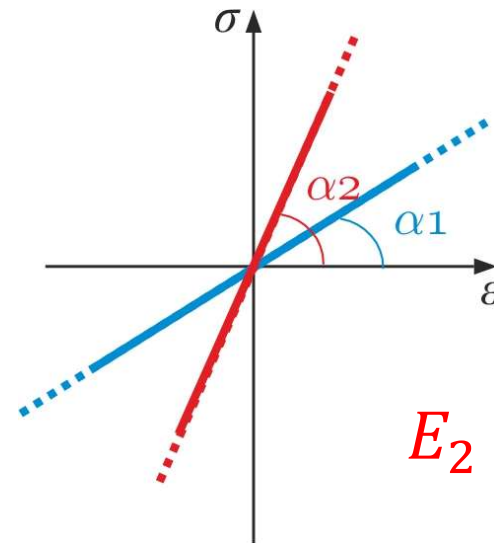
$$E = \tan \alpha \rightarrow \text{Modulo di Young } [FL^{-2}]$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

→ Legge di Hooke

$\sigma = m \varepsilon = \tan \alpha \varepsilon$   
(equazione cartesiana della retta passante per l'origine di coefficiente angolare  $m$ )





### 3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

<b>Materiale</b>	<b><math>\rho</math> [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b><math>E</math> [GPa]</b>	<b><math>\nu</math></b>	<b><math>\alpha</math> [°C<sup>-1</sup>]</b>
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

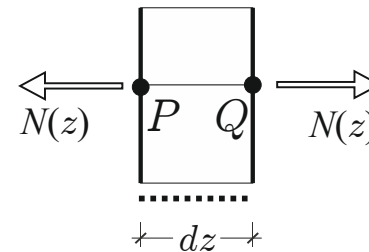
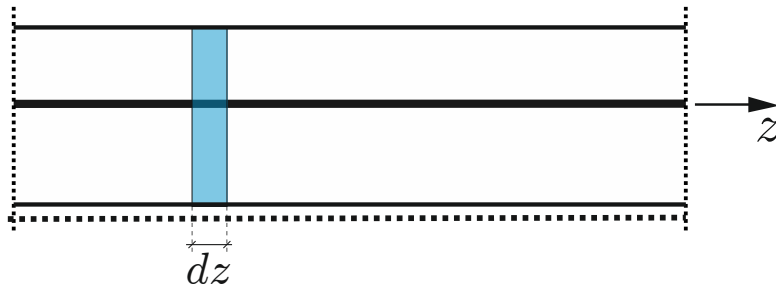
### 3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

provino

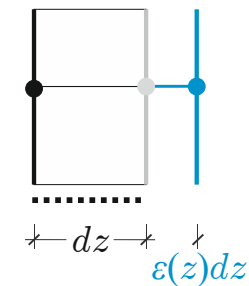
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Elemento infinitesimo

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$



*forza interna*



*deformazione*



### 3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

#### **Caratteristiche del materiale**

$E$  → Modulo di Young [ $FL^{-2}$ ]

$G$  → Modulo di rigidezza tangenziale [ $FL^{-2}$ ]

#### **Caratteristiche della sezione retta**

$A$  → Area [ $L^2$ ]

$A_t$  → Area di taglio [ $L^2$ ]

$I = I_x$  → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale  $x$  [ $L^4$ ]

#### **Rigidezze della trave**

$EA$  → Rigidezza assiale [ $F$ ]

$GA_t$  → Rigidezza di taglio [ $F$ ]

$EI$  → Rigidezza flessionale [ $FL^2$ ]

$EA \rightarrow \infty$  Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \rightarrow \infty$  Trave indeformabile a taglio  
(Eulero-Bernouilli)



### 3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

**Esempio: variazione di temperatura uniforme**

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

**Caratteristiche del materiale**

$E$  → Modulo di Young [ $FL^{-2}$ ]

$\alpha$  → coeff. di dilatazione termica [ $T^{-1}$ ]



### 3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha\Delta T$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

**Esempio: variazione di temperatura uniforme**

$$\varepsilon_t(z) = \alpha\Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

**Caratteristiche del materiale**

$E$  → Modulo di Young [ $FL^{-2}$ ]

$\alpha$  → coeff. di dilatazione termica [ $T^{-1}$ ]



### 3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

**Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza  $h$  della sezione da  $T_1$  a  $T_2 > T_1$**

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$



### 3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$
$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$
$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$

**Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza  $h$  della sezione da  $T_1$  a  $T_2 > T_1$**

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$