Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

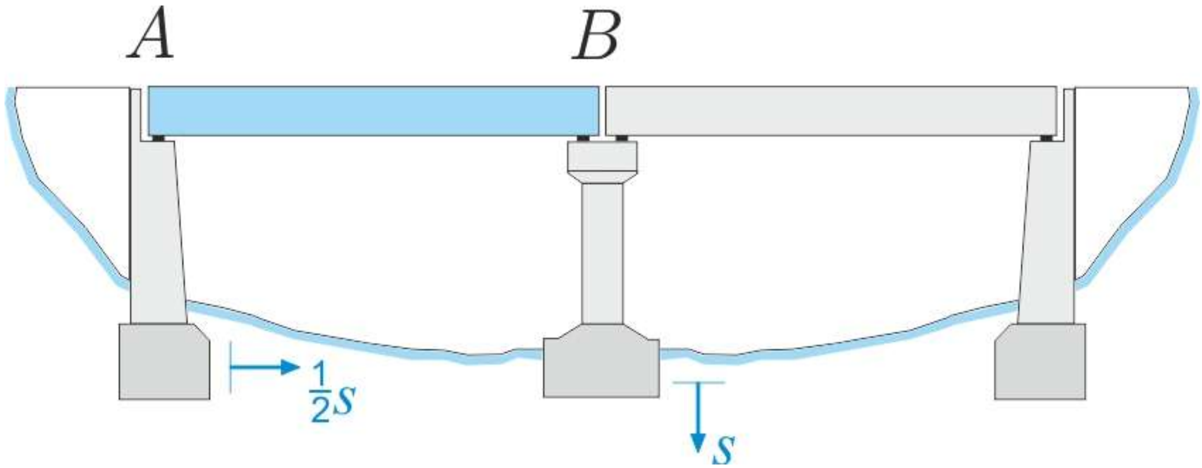
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte I - Il modello di corpo rigido
2. Statica del corpo rigido

- Obiettivi
- Modello delle forze esterne
  - forza concentrata, momento di una forza
  - sistemi di forze
  - forze distribuite
- I vincoli: prestazioni statiche
- Equazioni cardinali della statica
- **Il problema statico**
- **Classificazione statica**
- **Esercizi** (sito: E01-E03, testo: §2.7-2.8)

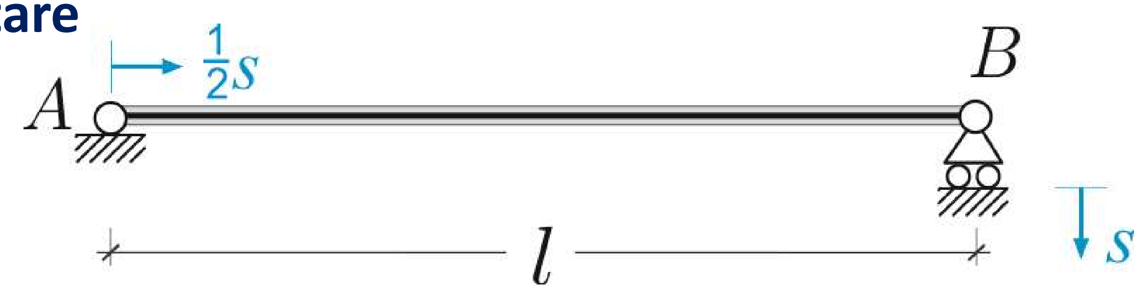
1. Cinematica del corpo rigido: problema cinematico

Esempio



Come si sposta la trave AB a seguito dei cedimenti del terreno?

Modello elementare



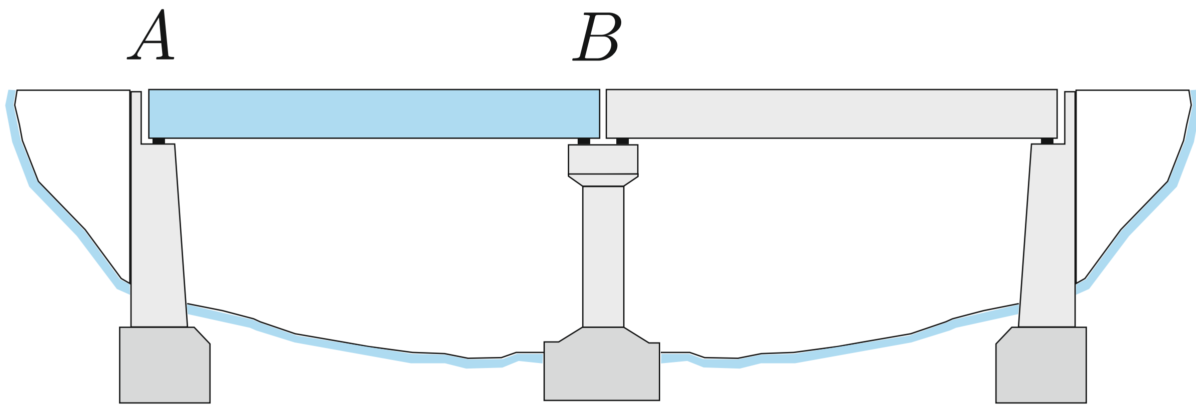
NB. I cedimenti s non sono forze ma spostamenti noti, dim [L]

Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di n_C ($n_C \geq 1$) corpi rigidi vincolati e sia C la configurazione occupata dal sistema. Supponiamo che uno o più vincoli subiscano un cedimento assegnato, il problema cinematico consiste nel determinare, *se esiste*, la nuova configurazione C' occupata dal sistema a seguito dei cedimenti

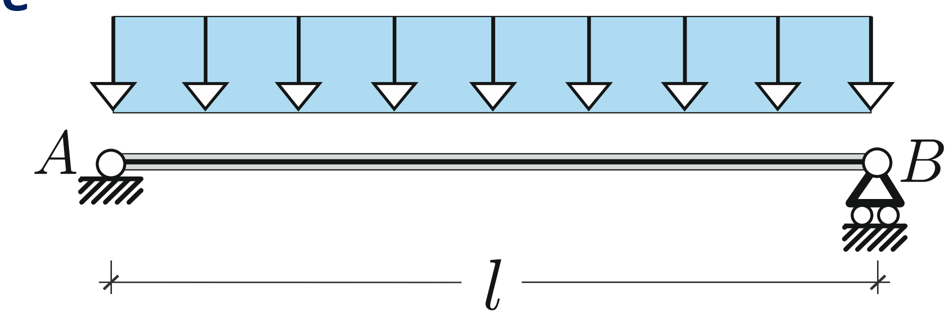
2. Statica del corpo rigido: problema statico

Esempio



Che reazioni devono erogare i vincoli affinché la trave AB sia in equilibrio?

Modello elementare

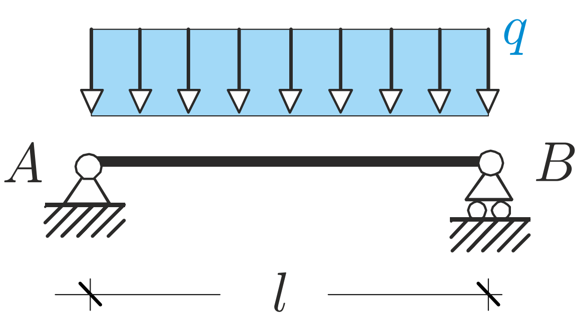


Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di n_C ($n_C \geq 1$) corpi rigidi vincolati soggetto ad assegnate forze esterne attive e sia C la configurazione occupata dal sistema. Il problema statico consiste nel determinare, *se esistono*, le forze esterne reattive (*reazioni vincolari*) che devono erogare i vincoli affinché il sistema sia in equilibrio.

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica



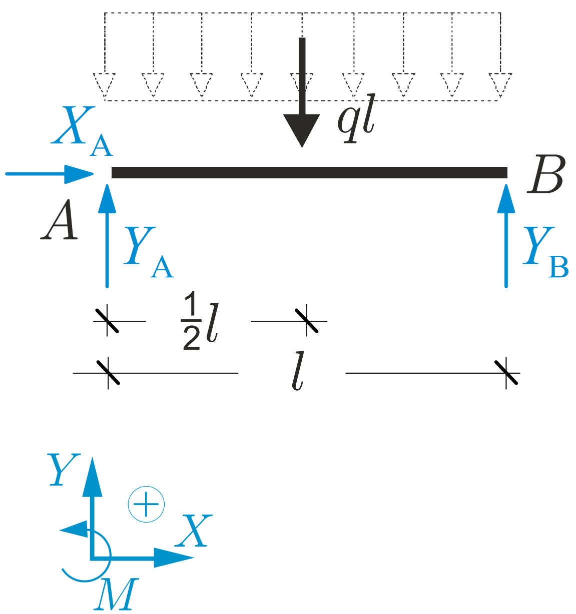
Numero di g.d.l
$n = 3n_C = 3$

Vilncoli semplici
$m = 2 + 1 = 3$

Esempio

La trave in figura è in equilibrio sotto un carico distribuito costante q noto, diretto come in figura. Determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli. Discutere l'esistenza della soluzione e il numero di soluzioni.

Dati: luce l, carico q (Ad es. $l = 2\text{m}$, $q = 1\ \text{kN/m}$)

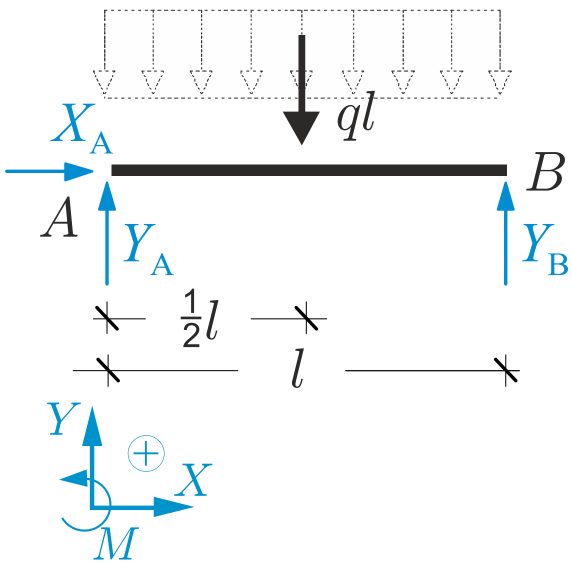


Procedura operativa

1. *Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.*
2. *Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito dalla sola risultante*

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica



$$\mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{bmatrix}$$

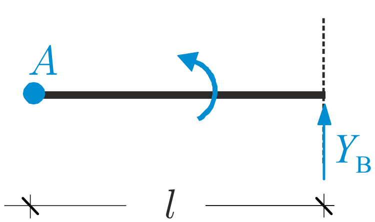
Procedura operativa

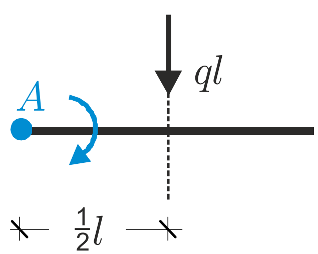
3. *Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore* $\mathbf{f}_r$
4. *Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.*

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Procedura operativa

5. *Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte*





2. Statica del corpo rigido: problema statico

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - \frac{1}{2}ql^2 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_r} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{1}{2}ql^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

Procedura operativa

6. *Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)*

Numero di g.d.l $n = 3n_C = 3$

Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$

Numero di equazioni $n = 3$

Numero di incognite $m = 3$

$$\boxed{\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}}$$

Problema cinematico sulla stessa struttura

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ 0 \\ -s \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}^T}$$

Numero di g.d.l $n = 3n_C = 3$

Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$

Numero di equazioni $m = 3$

Numero di incognite $n = 3$

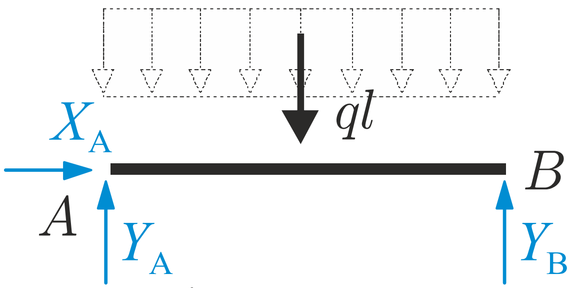
$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{s}}$$

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Soluzione

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - ql \cdot \frac{1}{2} l = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_B &= \tfrac{1}{2}ql \\ Y_A &= \tfrac{1}{2}ql \end{aligned}}$$



Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.

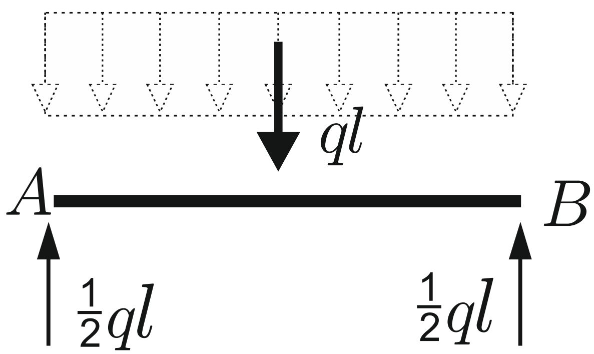


Diagramma di struttura libera

Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il ***diagramma di struttura libera***

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Formulazione analitica: caso generale

$$\boxed{\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}}$$

*Anche nei casi generali ci si riconduce ad un sistema algebrico costituito da **n equazioni lineari** in **m incognite**, dove m è il numero dei vincoli semplici (esterni e interni) e n il numero di gradi di libertà del sistema.*

$\mathbf{f}_r$: $(m \times 1)$ vettore colonna delle reazioni vincolari (**incognito**)

$\mathbf{B}$: $(n \times m)$ matrice dei coefficienti del sistema detta **Matrice Statica** (nota)

$\mathbf{f}_a$: $(n \times 1)$ vettore dei termini noti detto **vettore delle forze attive** (noto)

Numero di g.d.l: $n = 3n_C$

Numero di vincoli semplici: m

Esistenza della soluzione $\mathbf{f}_r$?
Numero di soluzioni?

Classificazione Statica

2. Statica del corpo rigido: problema statico

DUALITA' STATICO-CINEMATICA

I due problemi cinematico e statico sono, dal punto di vista meccanico, completamente diversi. Dal punto di vista analitico sono ricondotti a sistemi di equazioni lineari con matrici dei coefficienti **A** *(matrice cinematica) e* **B** *(matrice statica).*
Le matrici cinematica e statica dipendono esclusivamente dalla geometria della struttura e dalla disposizione/tipologia dei vincoli.
Si può dimostrare in generale che se si sceglie lo stesso polo nei due problemi, le due matrici sono una la trasposta dell'altra: hanno quindi lo stesso rango e, se quadrate, lo stesso determinante.

A: **Matrice Cinematica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. cinem.
$(m \times n)$

B: **Matrice Statica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. statico
$(n \times m)$

Numero di g.d.l: $n = 3n_C$

Numero di vincoli semplici: m

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}^T}$$

2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

I. Sistemi determinati (isostatici)

$n = m = p$ $\boxed{\mathbf{B}}$ $\det \mathbf{B} \neq 0$

$\exists!\, \mathbf{f}_r$: $\mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{f}_a$

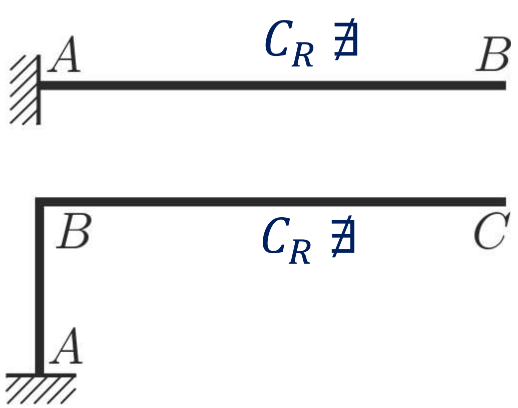
$\mathbf{f}_a = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$

La soluzione esiste ed è unica (Rouché-Capelli).

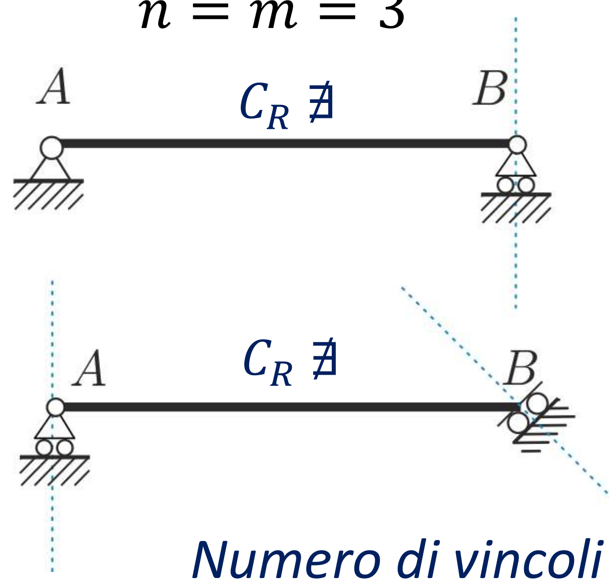
In assenza di forze esterne attive, l'unica soluzione è quella banale $\mathbf{f}_r = \mathbf{0}$ *: i vincoli non erogano reazioni vincolari.*

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ *i sistemi isostatici sono anche isocinematici*

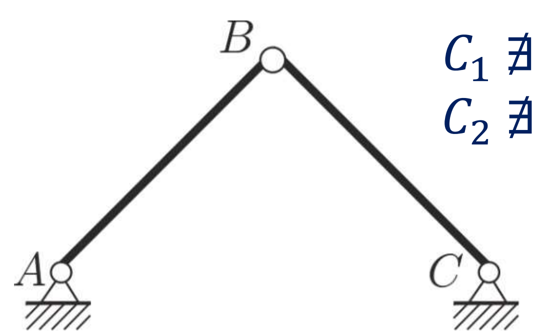
Mensola
$n = m = 3$



Trave appoggiata
$n = m = 3$



Arco a tre cerniere
$n = m = 6$



Numero di g.d.l: $n = 3n_C$ *Numero di vincoli semplici:* m *Rango* $\mathbf{B}$: p

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

II. Sistemi degeneri (singolari)

$n = m > p$ $\boxed{\mathbf{B}}$ $\det \mathbf{B} = 0$

$\nexists \; \mathbf{f}_r$

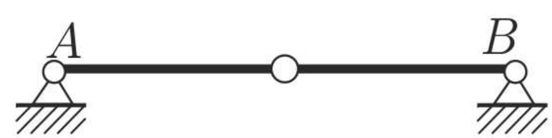
Salvo particolari distribuzioni di forze attive, ***non esistono soluzioni*** *(Rouché-Capelli).*

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ *i sistemi staticamente degeneri lo sono anche cinematicamente.*

Trave appoggiata degenere
$n = m = 3$

Arco a tre cerniere degenere
$n = m = 6$



Numero di g.d.l: $n = 3n_C$ *Numero di vincoli semplici:* m *Rango* $\mathbf{B}$*:* p

2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

III. Sistemi staticamente indeterminati (iperstatici)

$p = n < m$

$$\boxed{\mathbf{B}}$$

$\exists\ \infty^{m-n}\ \mathbf{f}_r$

Grado di iperstaticità $I = m - n$

Esistono ∞^{m-n} *soluzioni (Rouché-Capelli).*

Non è possibile determinare in modo univoco le reazioni erogate dai vincoli in condizioni di equilibrio.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ *i sistemi iperstatici sono anche cinematicamente impossibili*

Trave incastro appoggio

$n = 3\ m = 4$

1 volta iperstatico

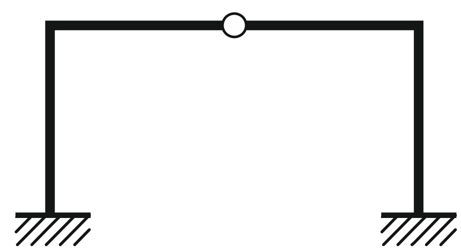
Trave doppiamente incastrata

$n = 3\ m = 6$

3 volte iperstatico

Portale incastrato

$n = 6\ m = 8$



2 volte iperstatico

Numero di g.d.l: $n = 3n_C$

Numero di vincoli semplici: m

Rango $\mathbf{B}$*:* p

IV. Sistemi staticamente impossibili (labili)

$p = m < n$

$\boxed{\mathbf{B}}$

$\nexists \ \mathbf{f}_r$

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, ***non esistono soluzioni*** *(Rouché-Capelli).*

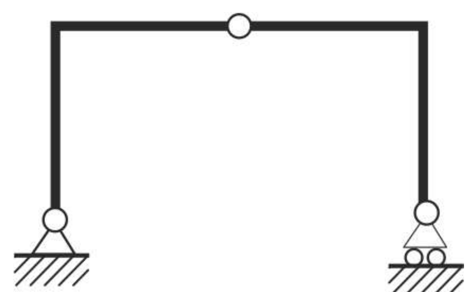
Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

Essendo $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ *i sistemi staticamente impossibili lo sono anche cinematicamente indeterminati (labili)*

$n = 3 \; m = 1$

2 volte labile

$n = 6 \; m = 5$

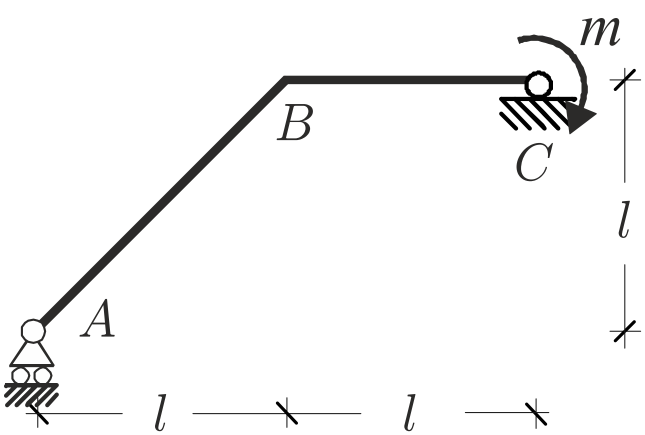


1 volta labile

Numero di g.d.l: $n = 3n_C$ *Numero di vincoli semplici:* m *Rango* $\mathbf{B}$*:* p

2. Statica del corpo rigido: esercizio

Esercizio



Numero di g.d.l

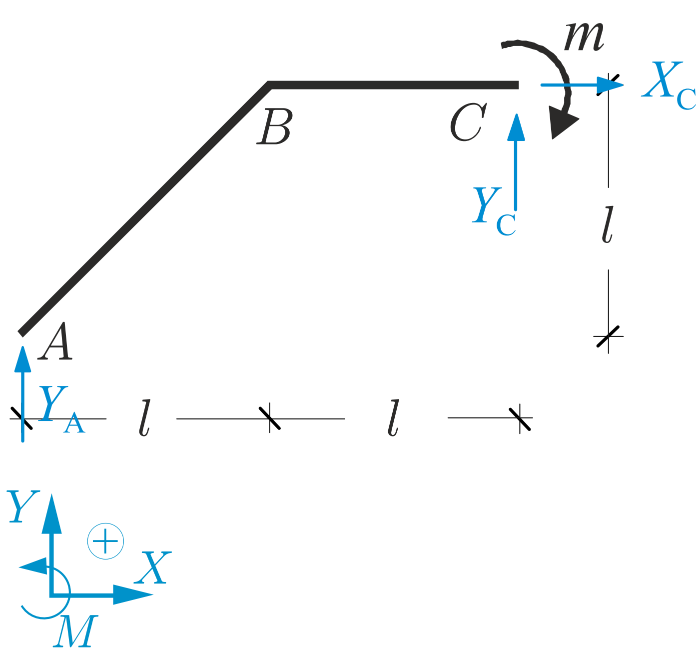
$n = 3n_C = 3$

Vincoli semplici

$m = 2 + 1 = 3$

La struttura in figura è soggetta ad una coppia di forze m nota, diretta come in figura. Verificato che la struttura è isostatica, determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli.

Dati: luce l, coppia m (Ad es. $l = 2\mathrm{m}$, $m = 1\ \mathrm{kN \cdot m}$)

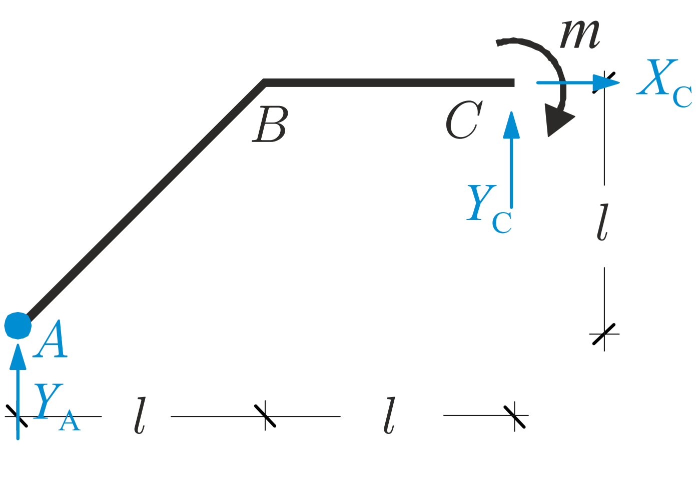


Procedura operativa

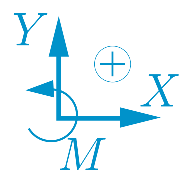
1. *Si verifica l'isostaticità*
2. *Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.*
3. *Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito*

2. Statica del corpo rigido: esercizio

Formulazione analitica



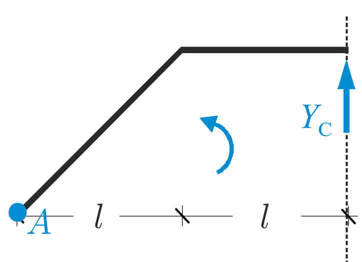
$$\mathbf{f}_r = \begin{bmatrix} Y_A \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix}$$

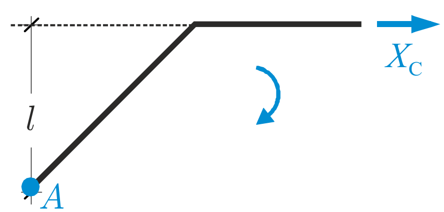


Procedura operativa

4. *Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore* $\mathbf{f}_r$
5. *Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.*

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$





Procedura operativa

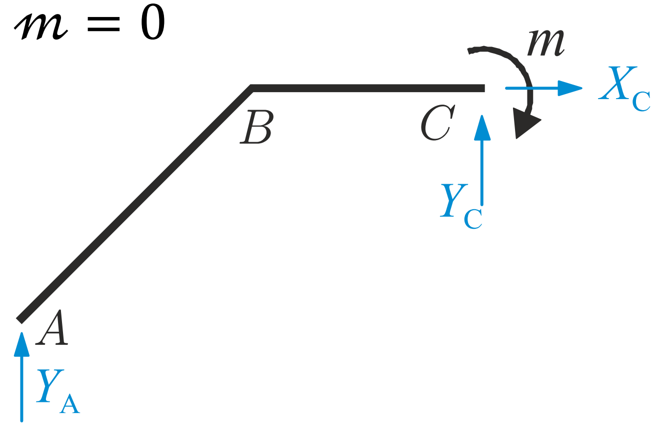
6. *Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte*

2. Statica del corpo rigido: problema statico

Soluzione

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X_C = 0 \quad Y_C = \frac{m}{2l} \quad Y_A = -\frac{m}{2l}}$$



Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.

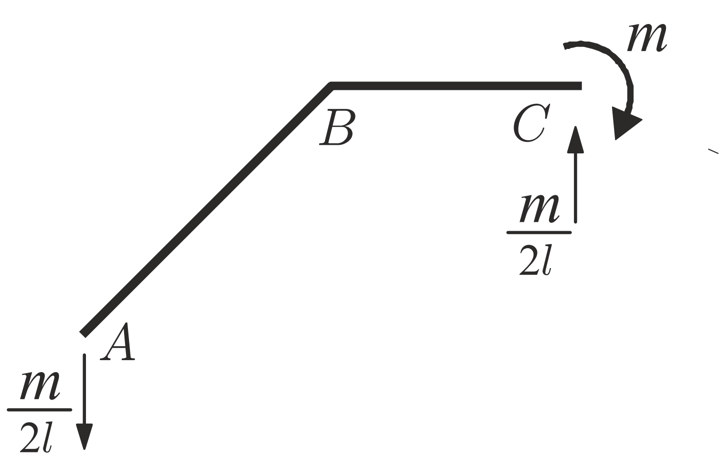


Diagramma di struttura libera

Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il ***diagramma di struttura libera***

2. Statica del corpo rigido: esercizio

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} Y_A & X_C & Y_C \\ \end{array}}_{} \quad \underset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -l & 2l \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{f}_r}{\begin{bmatrix} Y_A \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix}} + \underset{\mathbf{f}_a}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{0}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Procedura operativa

9. *Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)*

Numero di g.d.l $n = 3n_C = 3$

Vincoli semplici $m = 2 + 1 = 3$

Numero di equazioni $n = 3$

Numero di incognite $m = 3$

$$\boxed{\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}}$$

Problema cinematico sulla stessa struttura (cfr. lezioni precedenti)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 2l \end{bmatrix}$$

$$n = m$$
$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{B}^T}$$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

2. Statica del corpo rigido: esercizi (lavagna)

Esercizi Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l'isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera.