

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA



## Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



## Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- **Definizioni, ipotesi**
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



## Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- **Cinematica del continuo 3D**
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



## Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- **Statica del del continuo 3D**
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



# Lezione

## 2. Statica del continuo 3D

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
- **Modello delle forze interne (Cauchy)**
  - vettore della tensione  $\mathbf{t}_n(P)$
  - Tensore della tensione  $\mathbf{T}(P)$
  - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Tensioni e direzioni principali**



## 2. Statica del continuo 3D: Cauchy

### Augustin Louis Cauchy (1789-1857)



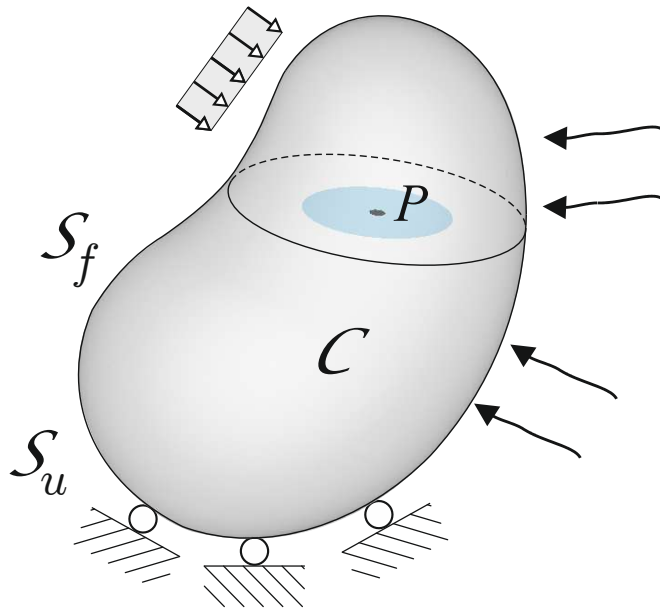
Cauchy, L.A.: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique*, 1823.

**Lettura:** E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, 1981 - §11.4-11.5 (vedi [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc) )

## 2. Statica del continuo 3D: obiettivi

**Obiettivo 1.** Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in un continuo in risposta alle azioni meccaniche esterne.

**Obiettivo 2.** Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



$S = \partial C$  : frontiera  $S = S_u \cup S_f$

$S_u$  : frontiera vincolata

$S_f$  : frontiera libera

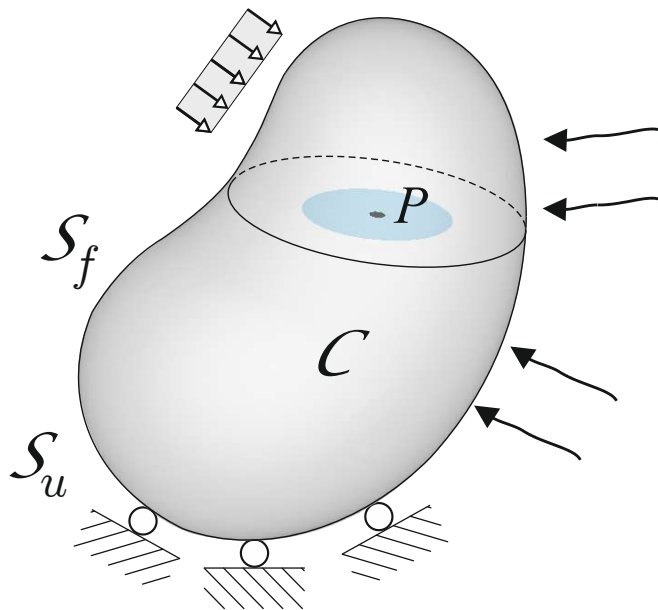
Una configurazione  $C$  si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in  $C$  con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*)

## 2. Statica del continuo 3D: obiettivi

**Obiettivo 1.** Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in un continuo in risposta alle azioni meccaniche esterne.

**Obiettivo 2.** Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



### Ipotesi

Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata)  $C$

$S = \partial C$  : frontiera  $S = S_u \cup S_f$

$S_u$  : frontiera vincolata

$S_f$  : frontiera libera

## 2. Statica del continuo 3D: forze esterne

**Densità di forze esterne di volume:  $\mathbf{b}(P), P \in C$   $[FL^{-3}]$**

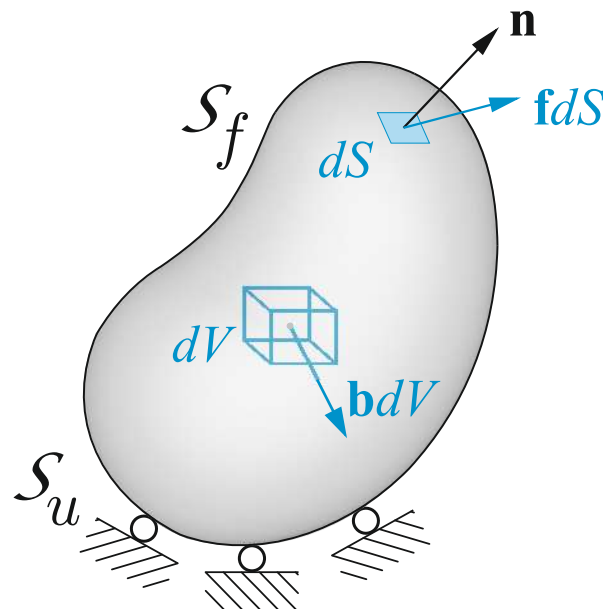
$$\mathbf{b}(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\Delta V}, \quad P \in C$$

*Es. Forze a distanza:* campo gravitazionale, forze apparenti (forze d'inerzia), campo elettromagnetico etc

**Densità di forze esterne di superficie:  $\mathbf{f}(P), P \in S$   $[FL^{-2}]$**

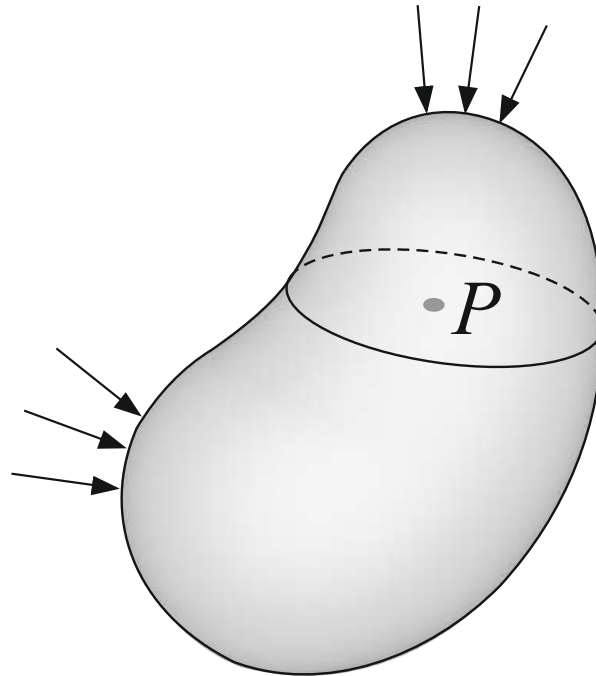
$$\mathbf{f}(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S}, \quad P \in S$$

*Es. Forze di contatto:* pressione di fluidi, forze vincolari etc



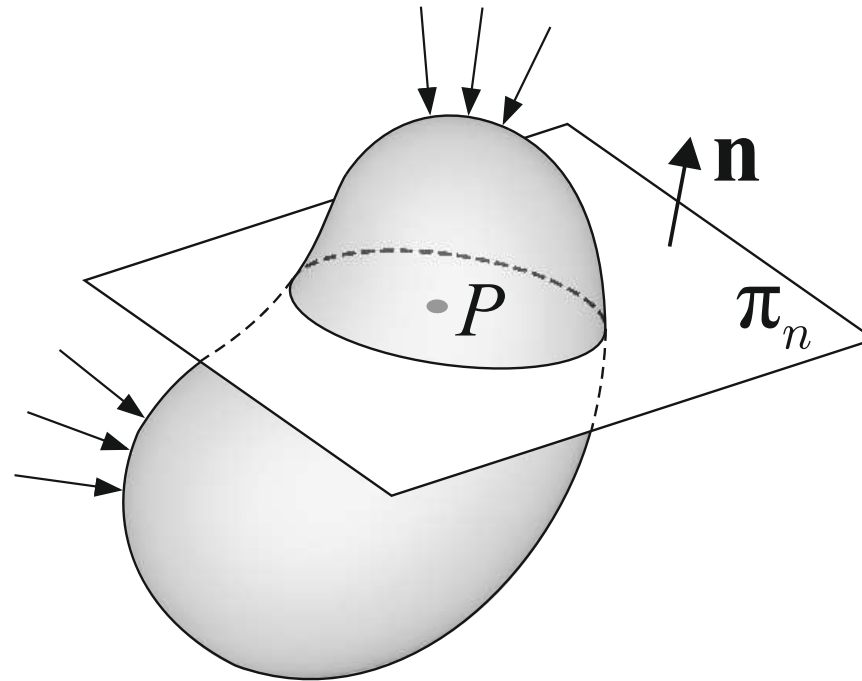
## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: considerazioni preliminari



## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

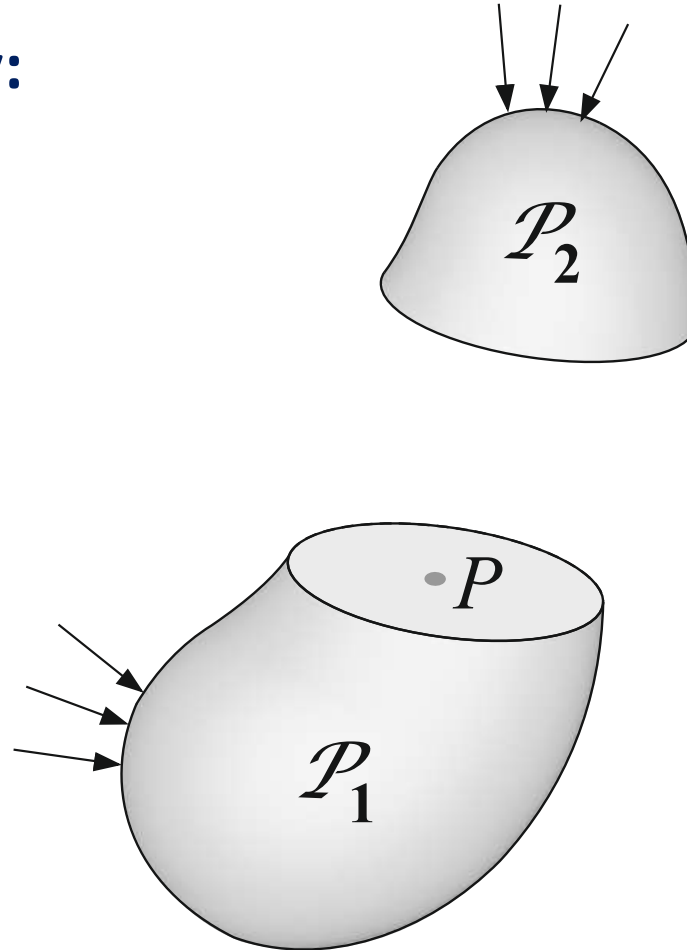
### Modello di Cauchy: considerazioni preliminari



$\pi_n$  *uno degli  $\infty^2$  piani ideali passanti per  $P$ , individuato dal versore  $\mathbf{n}$  perpendicolare al piano stesso (giacitura  $\pi_n$ )*

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy:

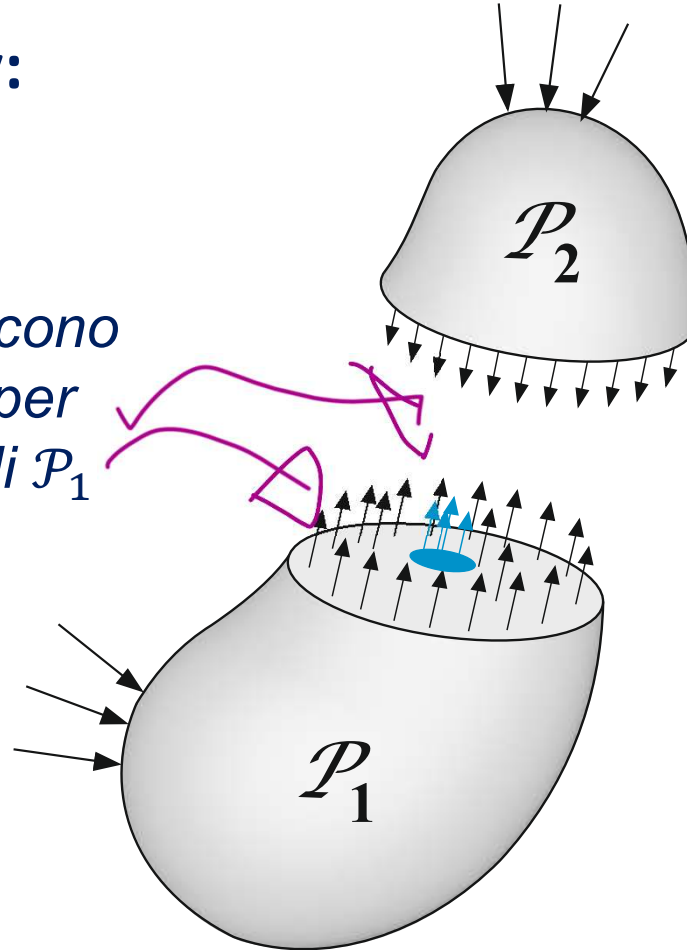


*Le porzioni  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  non sarebbero in equilibrio se fosse effettuato un taglio reale.*

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

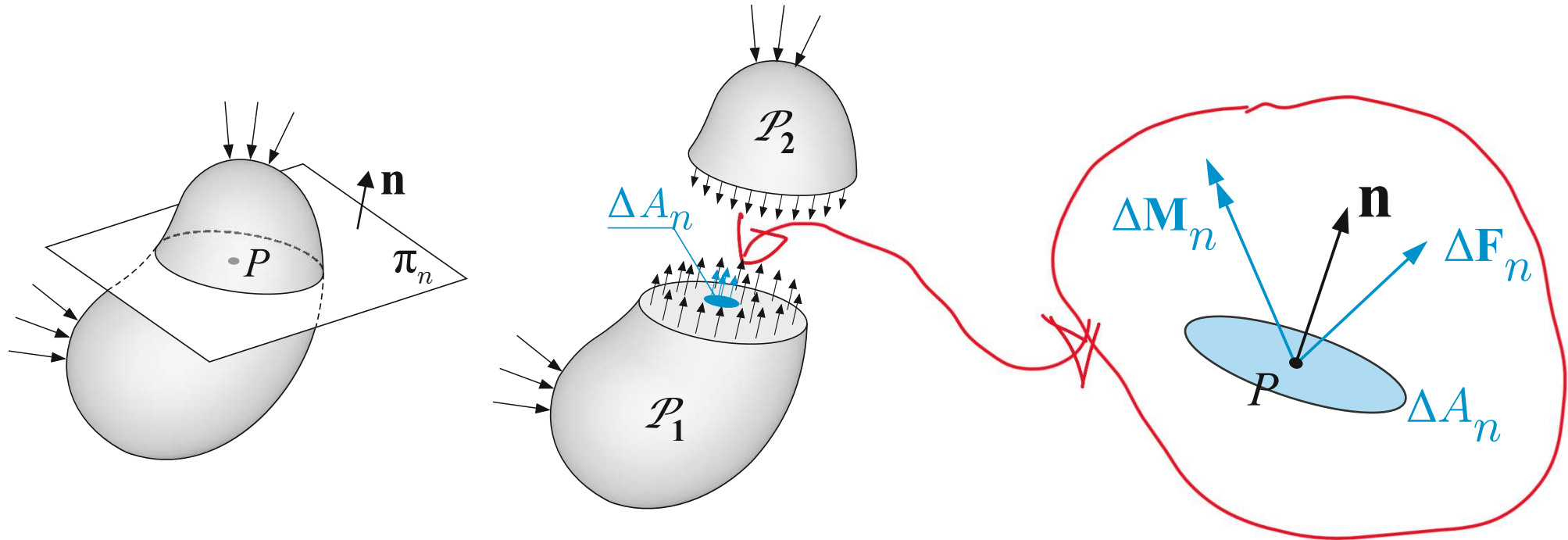
### Modello di Cauchy:

*forze interne che nascono sulle facce del taglio per garantire l'equilibrio di  $\mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{P}_2$  in accordo con il postulato di Eulero*



## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



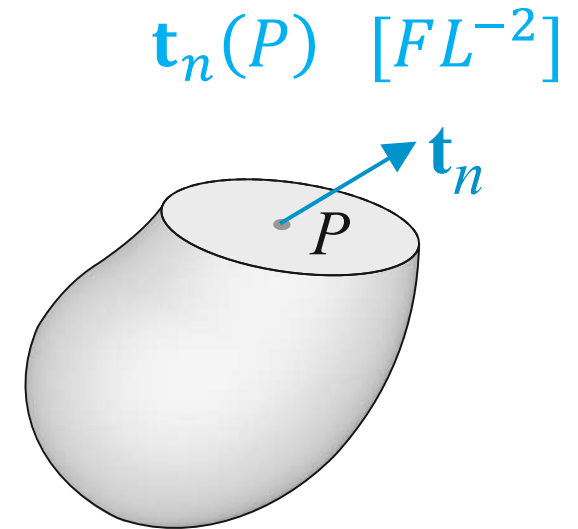
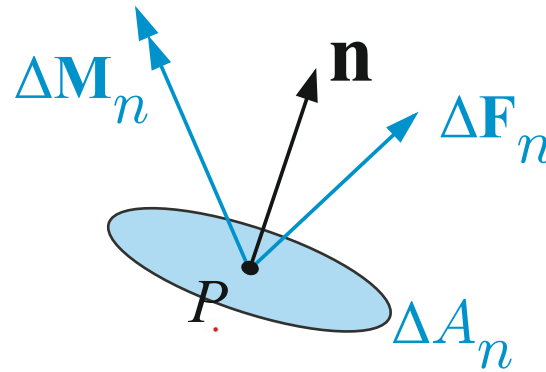
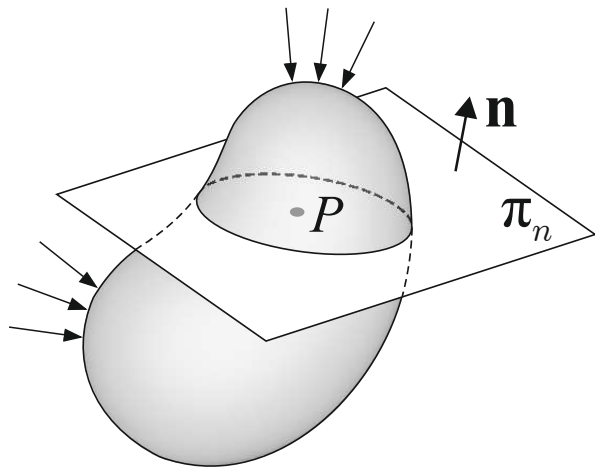
$\Delta A_n$  area di un intorno finito  $\Delta S_n$  del punto  $P$  sulla giacitura  $\pi_n$

$\Delta \mathbf{F}_n$  risultante delle forze interne agenti sull'intorno  $\Delta S_n$  del punto  $P$

$\Delta \mathbf{M}_n$  momento risultante delle forze interne agenti sull'intorno  $\Delta S_n$  di  $P$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



*Modello di Cauchy: esistono finiti i seguenti limiti:*

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n} = \mathbf{t}_n(P)$$

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta A_n} = \mathbf{0}$$

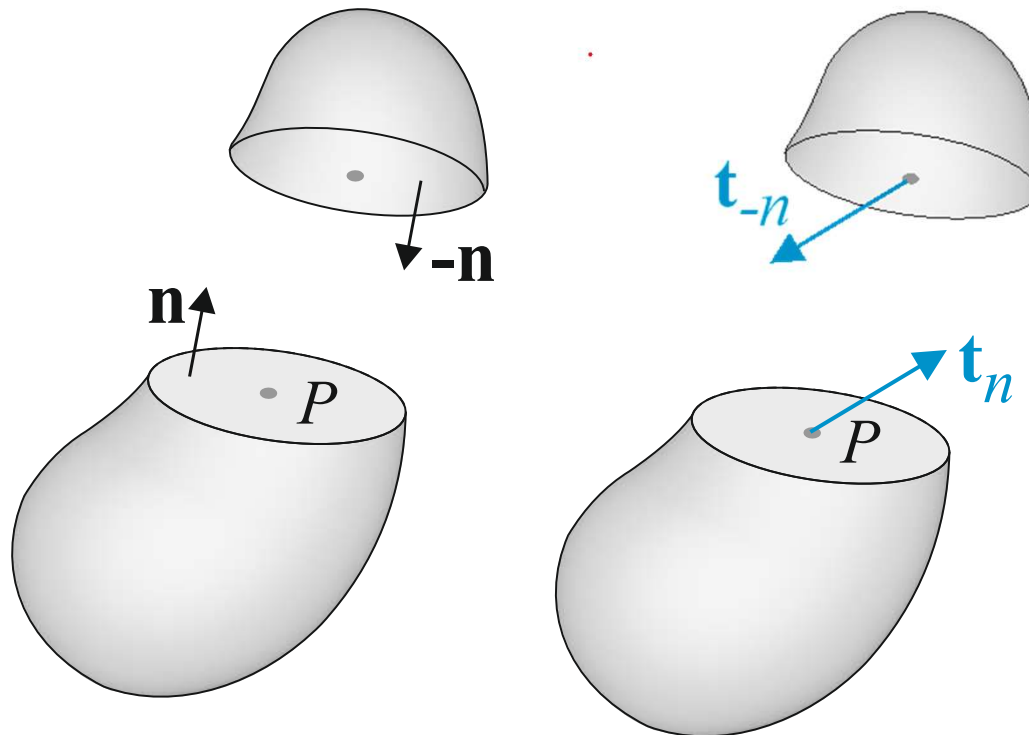
## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Vettore della tensione di Cauchy:

$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$

Il vettore della tensione dipende non solo dal posto  $P$  ma anche dalla giacitura  $\pi_n$  (ce ne sono  $\infty^2$  passanti per  $P$ ).

**Lemma di Cauchy:**  $\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

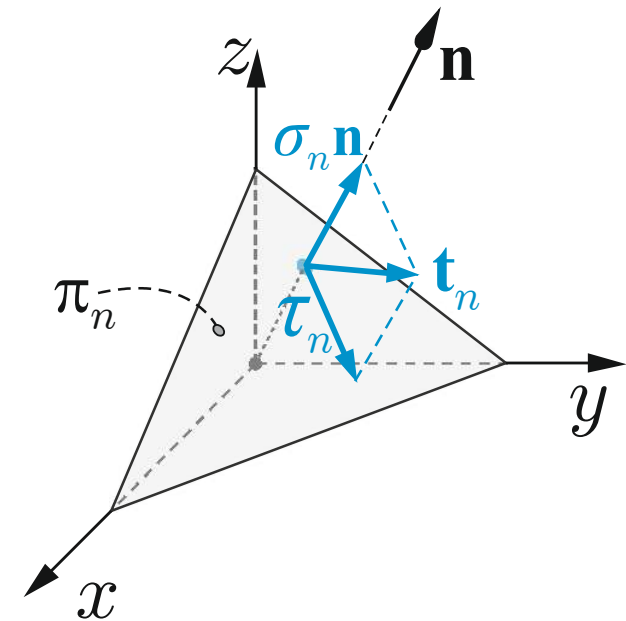
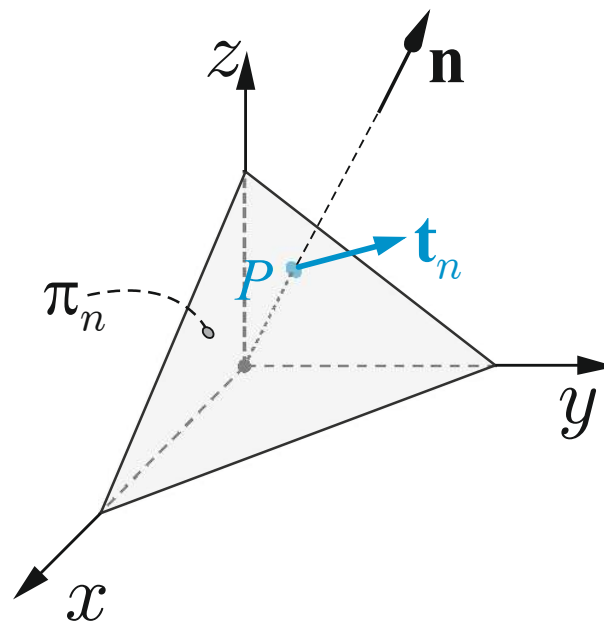
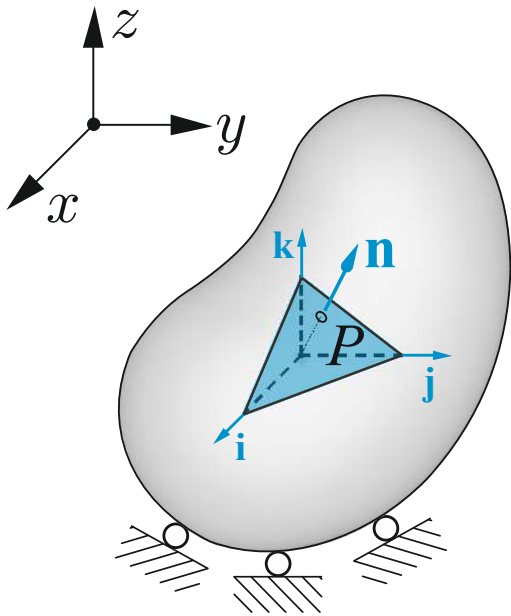
## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Decomposizione del vettore della tensione: Tensione normale e tangenziale

$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$$

$\sigma_n \rightarrow$  tensione normale [ $FL^{-2}$ ]

$\boldsymbol{\tau}_n \rightarrow$  vettore della tensione tangenziale [ $FL^{-2}$ ]



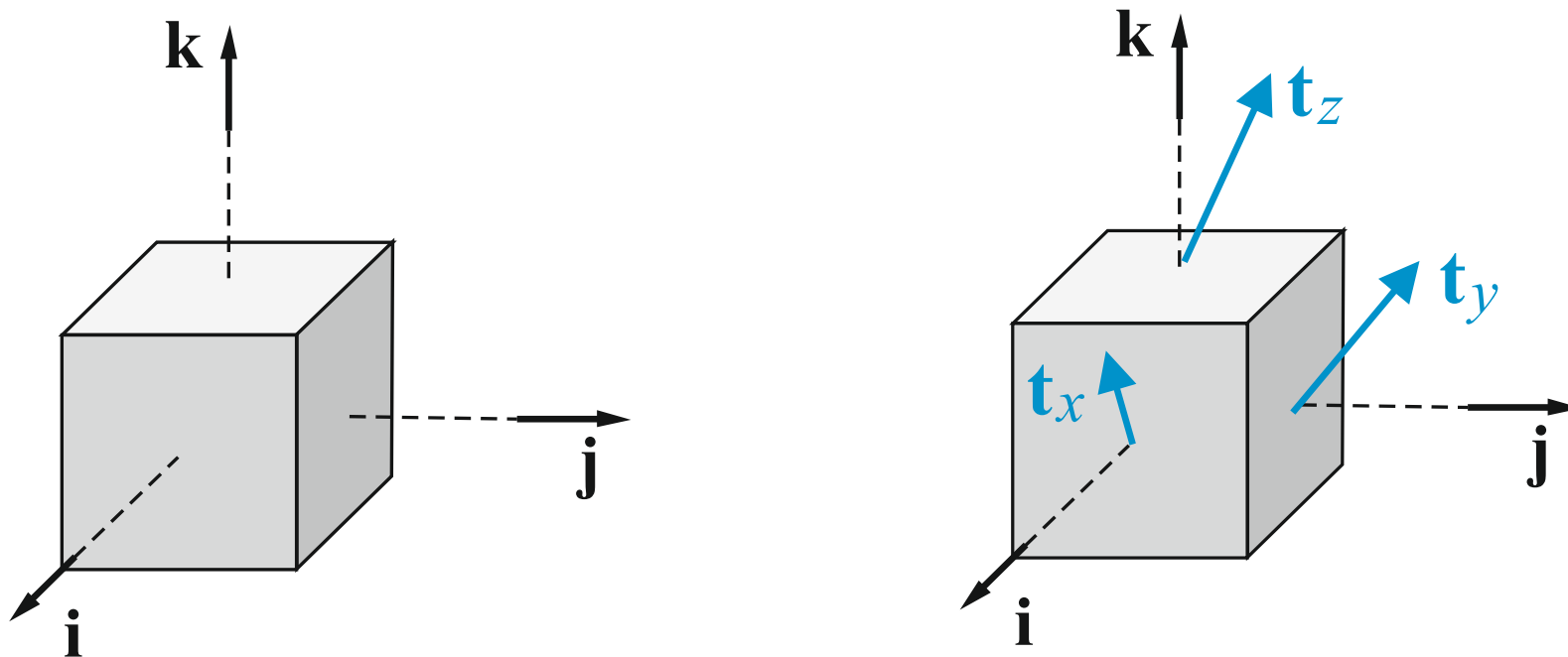


### Decomposizione del vettore della tensione: Componenti speciali di tensione

$\mathbf{t}_x(P)$  *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse  $x$  (normale uscente  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ )*

$\mathbf{t}_y(P)$  *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse  $y$  (normale uscente  $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ )*

$\mathbf{t}_z(P)$  *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse  $z$  (normale uscente  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ )*



## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

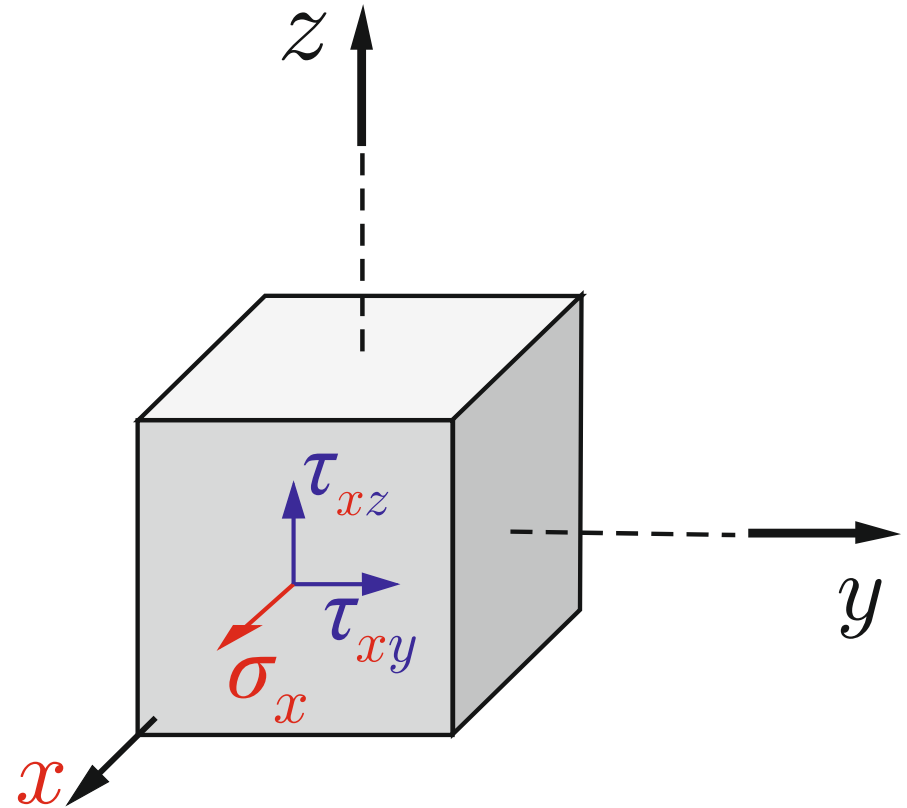
### Decomposizione del vettore della tensione: Componenti scalari

$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$\sigma_x \rightarrow$  tensione normale agente sul piano di normale  $x$

$\tau_{xy} \rightarrow$  tensione tangenziale agente sul piano di normale  $x$  e parallela all'asse  $y$

$\tau_{xz} \rightarrow$  tensione tangenziale agente sul piano di normale  $x$  e parallela all'asse  $z$





## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Decomposizione del vettore della tensione: Componenti scalari

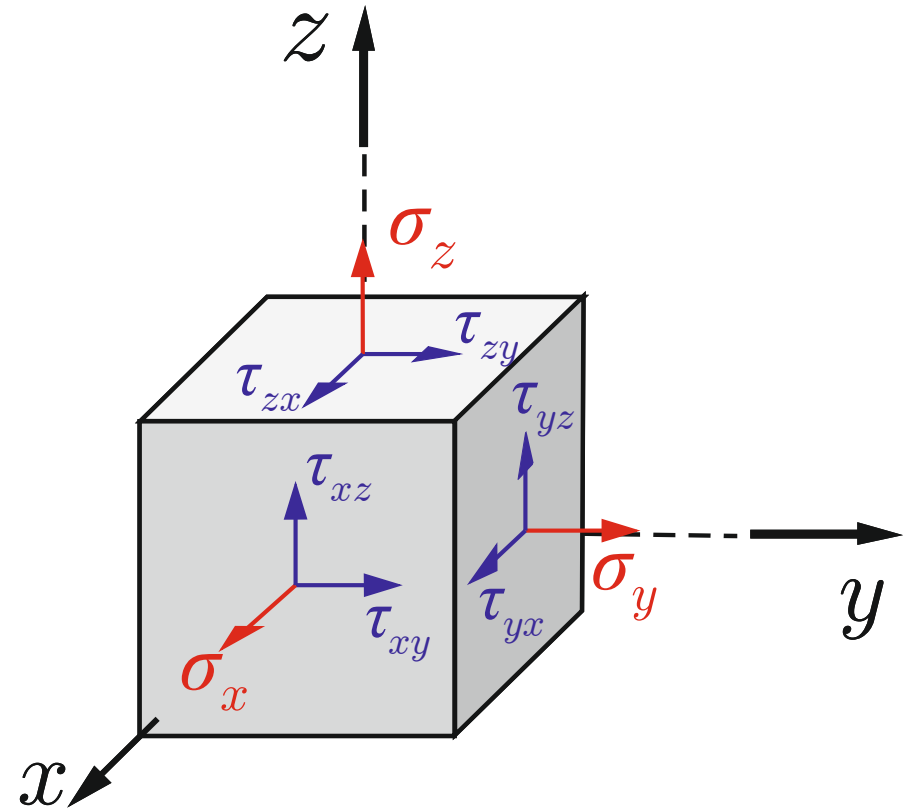
$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_y(P) = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_z(P) = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}$$

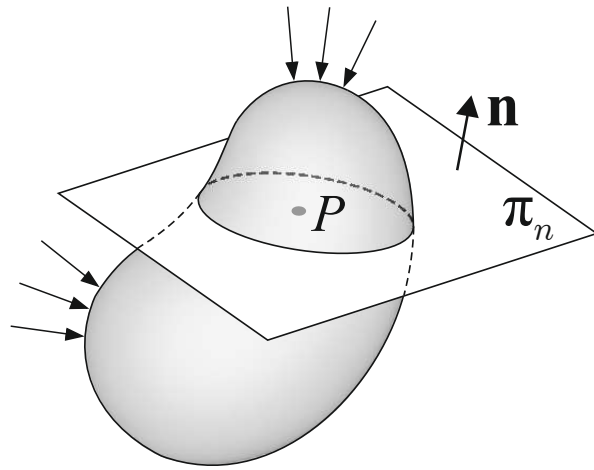
$\sigma_i \rightarrow$  tensioni normali  
perpendicolari ai piani  
coordinati

$\tau_{ij} \rightarrow$  tensioni tangenziali  
parallele ai piani  
coordinati

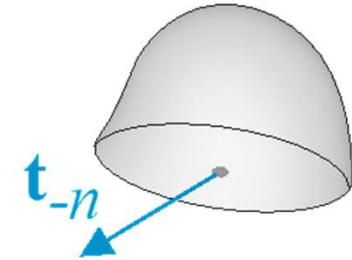
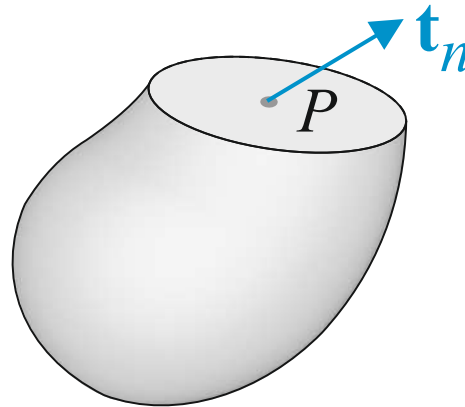


## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$

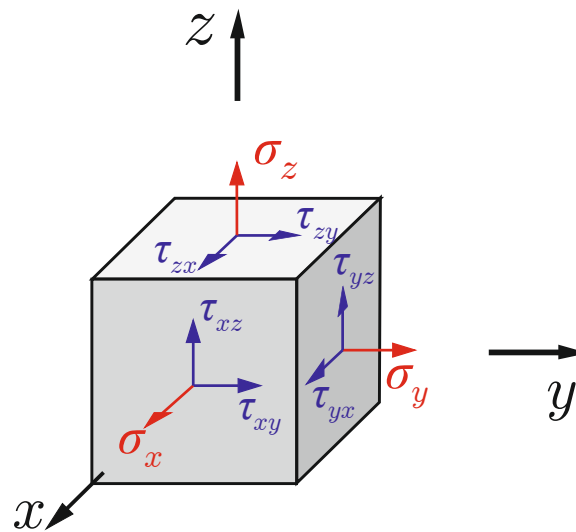
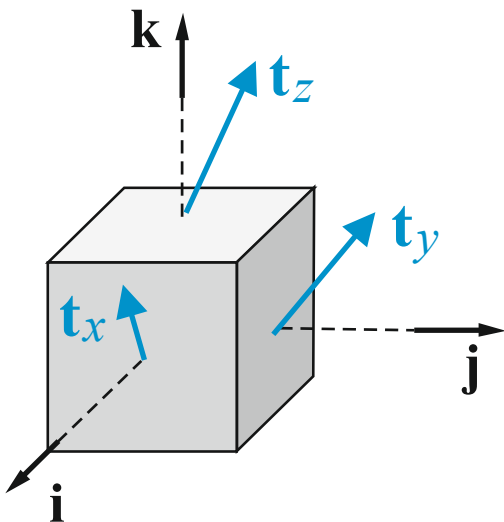


$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

### Modello di Cauchy: componenti speciali della tensione

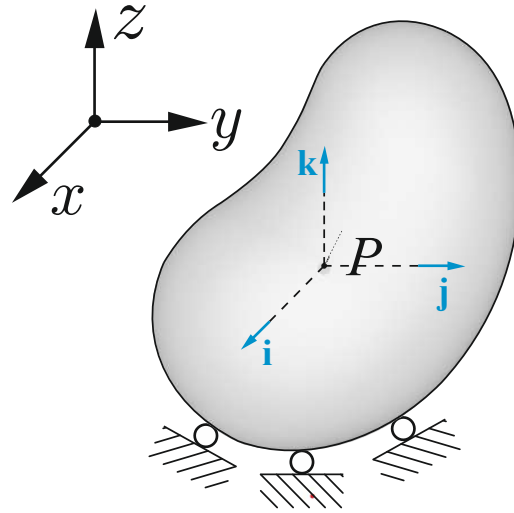


$\sigma_i \rightarrow$  tensioni normali  
perpendicolari ai piani  
coordinati

$\tau_{ij} \rightarrow$  tensioni tangenziali  
parallele ai piani  
coordinati

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Tensore della tensione secondo Cauchy



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$\mathbf{T}(P) = [\mathbf{t}_x(P) \quad \mathbf{t}_y(P) \quad \mathbf{t}_z(P)]$$

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$\sigma_i$  Tensioni normali

$\tau_{ij}$  Tensioni tangenziali

Dim. fisiche  $[FL^{-2}]$

# 1. CONFRONTO Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione meccanica delle misure di deformazione

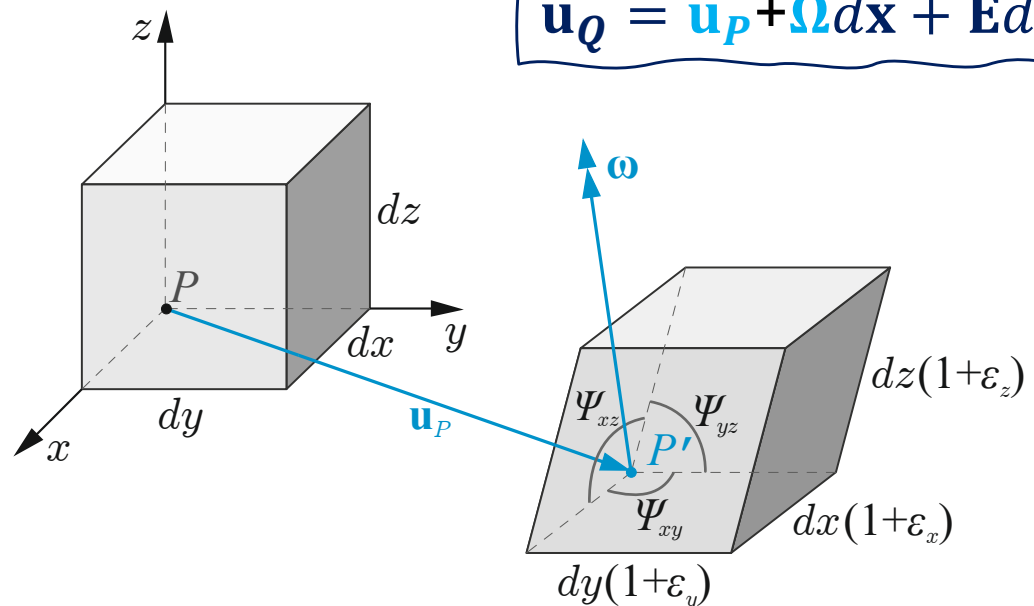
**Dilatazioni assiali**  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  (variazioni di dimensione)

*rappresentano le dilatazioni assiali delle fibre poste secondo le direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente*

**Scorrimenti angolari**  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  (variazioni di forma)

*rappresentano le variazioni angolari delle fibre disposte, prima della deformazione, secondo le direzioni  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , rispettivamente*

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$



### Tensore della tensione secondo Cauchy

$\mathbf{T}(P) \rightarrow$  dipende solo dal posto  $P$  e non dalla giacitura

$\mathbf{T}(P) \in \text{symm} \rightarrow$  è simmetrico:  $\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$  (cfr. eq. indefinite di equilibrio)

Essendo  $T_{ij} = T_{ji}$ , le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili,  $[T_{ij}] = [FL^{-2}]$

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano le seguenti tre funzioni:

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2 \rightarrow \text{Invarianti della tensione}$$

$$I_3 = \det(\mathbf{T})$$

### Formula di Cauchy

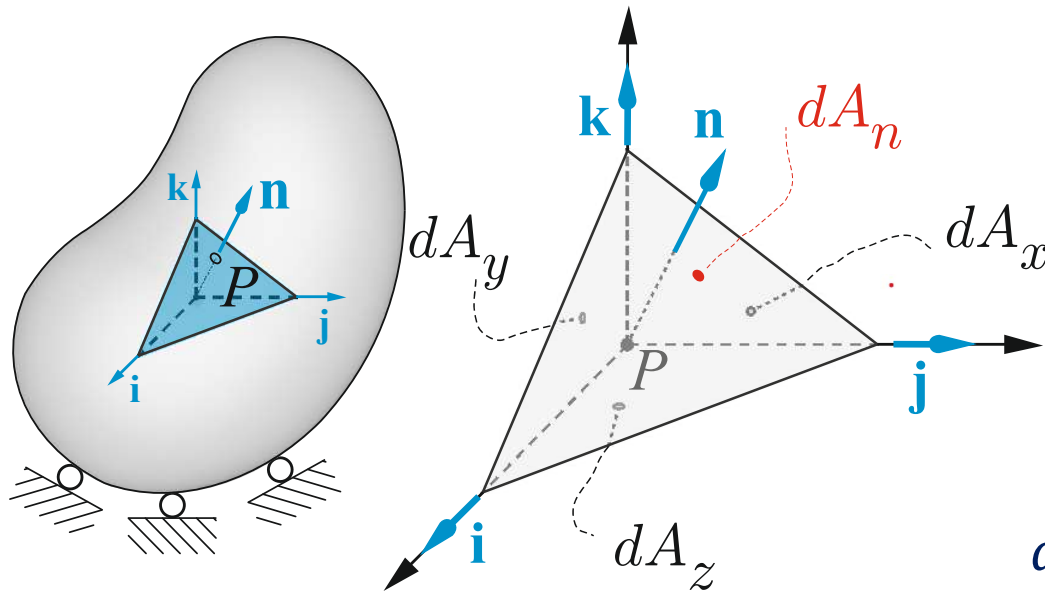
*E' possibile esprimere  $\mathbf{t}_n(P)$  in funzione di  $\mathbf{t}_x(P)$ ,  $\mathbf{t}_y(P)$ ,  $\mathbf{t}_z(P)$ ?*

*Che relazione sussiste tra  $\mathbf{t}_n(P)$  e  $\mathbf{T}(P)$ ?*

*Che relazione sussiste tra  $\mathbf{T}(P)$  e le forze di superficie nei punti appartenenti alla frontiera del corpo?*

### Formula di Cauchy

### Tetraedro di Cauchy: geometria



$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

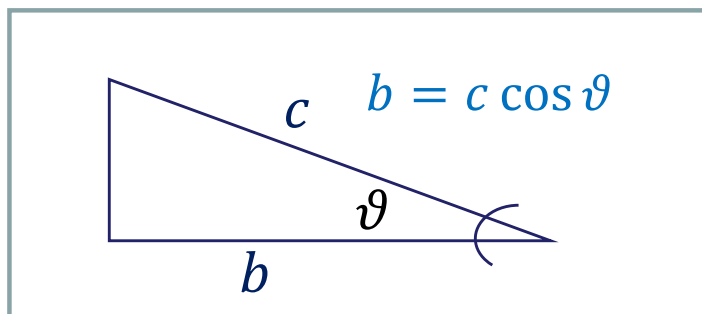
$$\alpha = \cos(nx), \beta = \cos(ny),$$

$$\gamma = \cos(nz)$$

$$dA_x = dA_n \cos(nx) \rightarrow \frac{dA_x}{dA_n} = \alpha$$

$$dA_y = dA_n \cos(ny) \rightarrow \frac{dA_y}{dA_n} = \beta$$

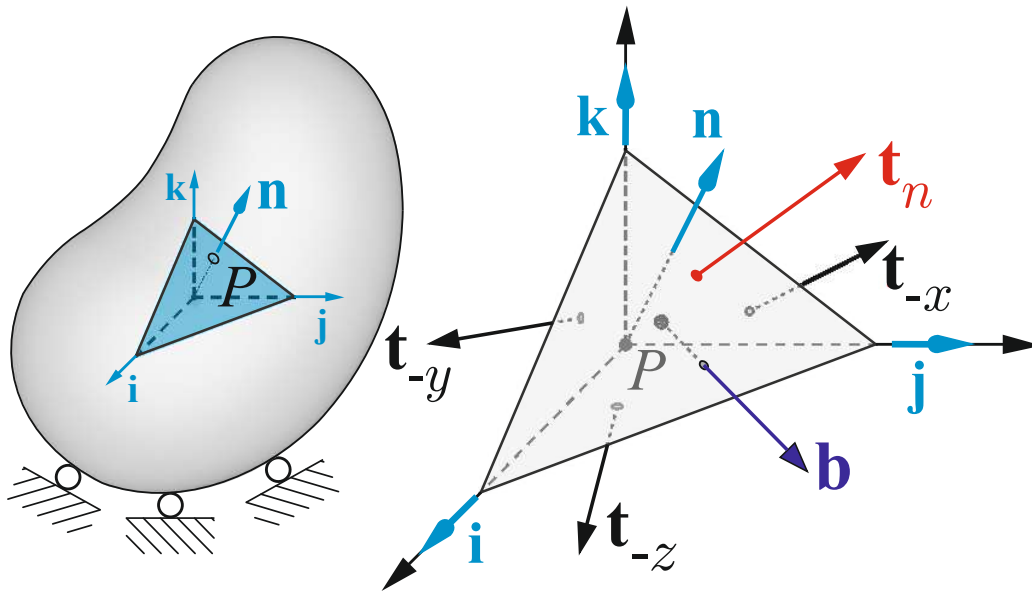
$$dA_z = dA_n \cos(nz) \rightarrow \frac{dA_z}{dA_n} = \gamma$$



## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy

#### Tetraedro di Cauchy: forze agenti



#### Postulato di Eulero

Se il corpo continuo è in equilibrio, è in equilibrio ogni sua parte e quindi anche l'intorno 'tetraedro' del punto  $P$

#### Forze di volume

$$d\mathbf{F}_v = \mathbf{b}(P)dV$$

#### Forze di superficie sulle 4 facce

**Giacitura  $\pi_n$**  (normale uscente:  $\mathbf{n}$ )

$$d\mathbf{F}_n = \mathbf{t}_n(P)dA_n$$

**Giacitura  $\pi_x$**  (normale uscente:  $-\mathbf{i}$ )

$$d\mathbf{F}_x = \mathbf{t}_{-x}(P)dA_x$$

**Giacitura  $\pi_y$**  (normale uscente:  $-\mathbf{j}$ )

$$d\mathbf{F}_y = \mathbf{t}_{-y}(P)dA_y$$

**Giacitura  $\pi_z$**  (normale uscente:  $-\mathbf{k}$ )

$$d\mathbf{F}_z = \mathbf{t}_{-z}(P)dA_z$$

### Formula di Cauchy

Tetraedro di Cauchy: 1° Equazione cardinale della statica  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$

$$d\mathbf{F}_n + d\mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_y + d\mathbf{F}_z + d\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P)dA_n + \mathbf{t}_{-x}(P)dA_x + \mathbf{t}_{-y}(P)dA_y + \mathbf{t}_{-z}(P)dA_z + \mathbf{b}(P)dV = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P) + \mathbf{t}_{-x}(P) \frac{dA_x}{dA_n} + \mathbf{t}_{-y}(P) \frac{dA_y}{dA_n} + \mathbf{t}_{-z}(P) \frac{dA_z}{dA_n} + \mathbf{b}(P) \frac{dV}{dA_n} = \mathbf{0}$$

//  $\alpha$      //  $\beta$      //  $\gamma$      //  $\rightarrow \emptyset$

$$\mathbf{t}_n(P) + \mathbf{t}_{-x}(P)\alpha + \mathbf{t}_{-y}(P)\beta + \mathbf{t}_{-z}(P)\gamma = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P) = -\mathbf{t}_{-x}(P)\alpha - \mathbf{t}_{-y}(P)\beta - \mathbf{t}_{-z}(P)\gamma$$

Lemma di Cauchy

$$\mathbf{t}_{-x} = -\mathbf{t}_x,$$

$$\mathbf{t}_{-y} = -\mathbf{t}_y,$$

$$\mathbf{t}_{-z} = -\mathbf{t}_z$$

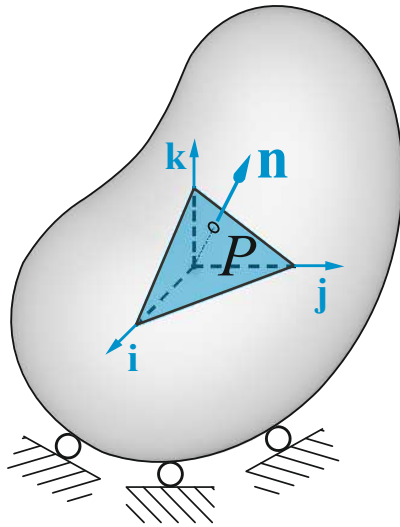
$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{t}_x(P)\alpha + \mathbf{t}_y(P)\beta + \mathbf{t}_z(P)\gamma$$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy in forma vettoriale

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\mathbf{t}_n = \alpha \mathbf{t}_x + \beta \mathbf{t}_y + \gamma \mathbf{t}_z$$



Il vettore della tensione su una generica giacitura  $\pi_n$  è combinazione lineare dei vettori tensione sulle giaciture perpendicolari agli assi coordinati.

I coefficienti della combinazione lineare sono le componenti del versore  $\mathbf{n}$  che individua la giacitura  $\pi_n$



## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

**Formula di Cauchy :**

**Componenti scalari dei vettori**

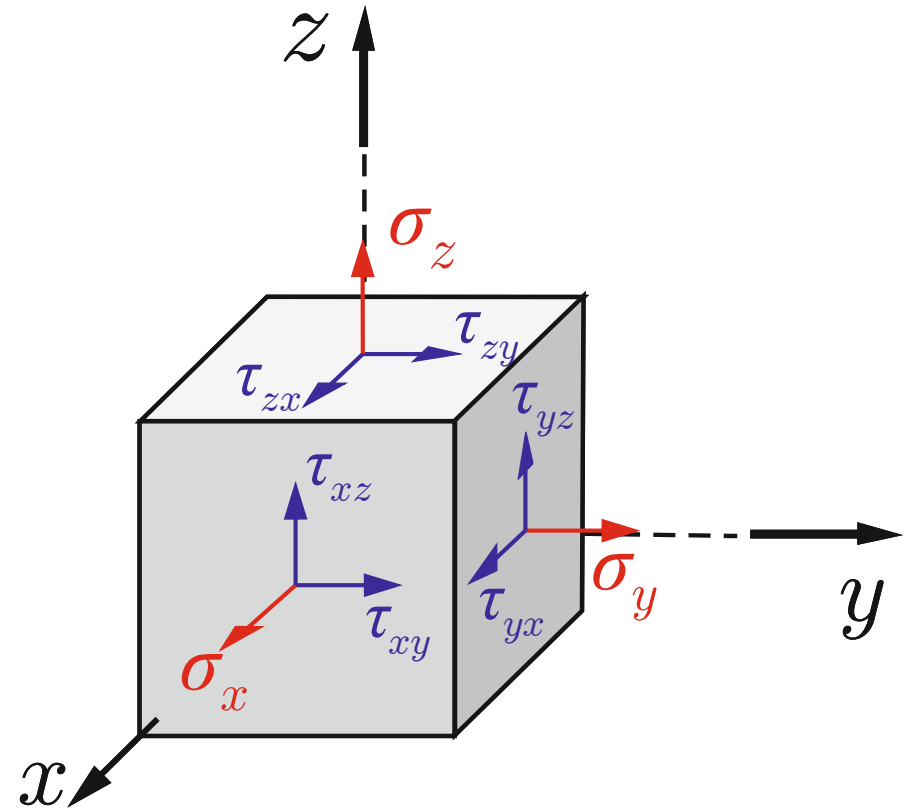
$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_y(P) = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_z(P) = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}$$

$\sigma_i \rightarrow$  tensioni normali  
perpendicolari ai piani  
coordinati

$\tau_{ij} \rightarrow$  tensioni tangenziali  
parallele ai piani  
coordinati

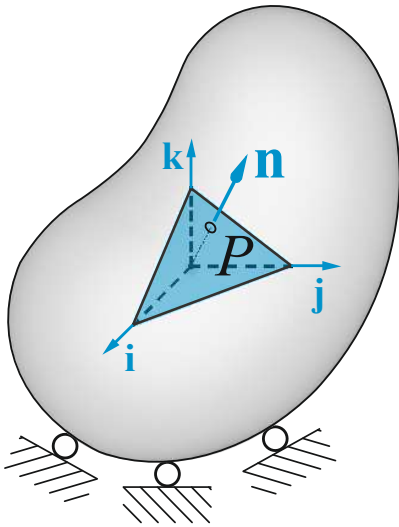


## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy in forma matriciale e compatta

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\mathbf{t}_n = \alpha \mathbf{t}_x + \beta \mathbf{t}_y + \gamma \mathbf{t}_z$$



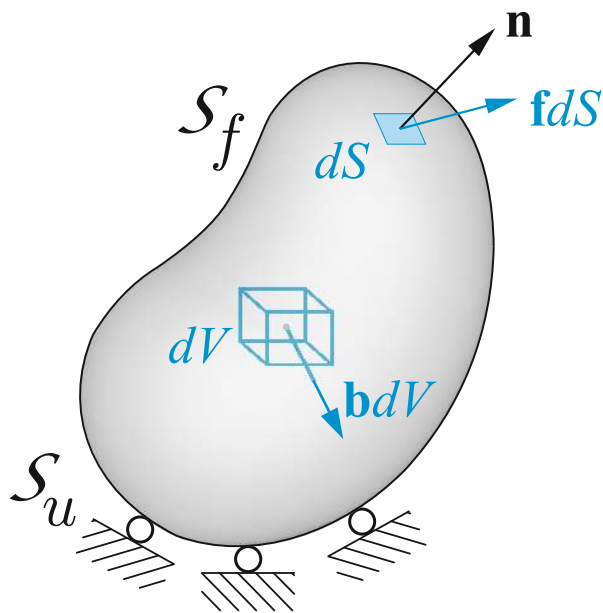
$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}(P) \mathbf{n}$$

$$P \in \mathcal{C}$$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy sulla frontiera del corpo



$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}_a(P), \quad P \in S_f$$

$$\mathbf{T}(\dot{P})\mathbf{n} = \mathbf{f}_r(P), \quad P \in S_u$$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

$\mathbf{T}(P) \rightarrow$  dipende solo dal posto  $P$  e non dalla giacitura

$\mathbf{T}(P) \in \text{symm} \rightarrow$  è simmetrico:  $\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$  (cfr. eq. indefinite di equilibrio)

Essendo  $T_{ij} = T_{ji}$ , le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano gli invarianti della tensione



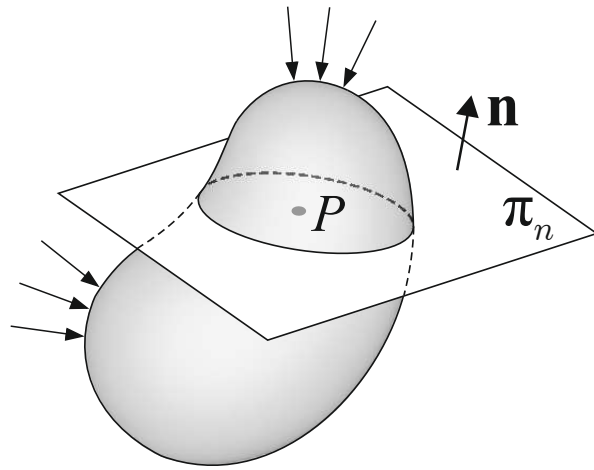
# Lezione

## 2. Statica del continuo 3D

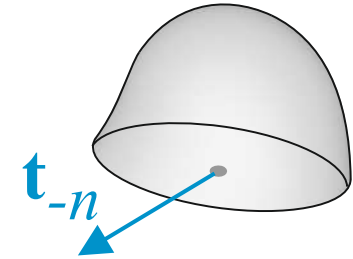
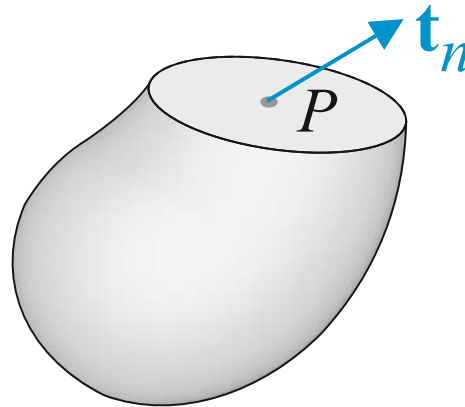
- Obiettivi
- Modello delle forze esterne
- Modello delle forze interne (Cauchy)
  - vettore della tensione  $\mathbf{t}_n(P)$
  - Tensore della tensione  $\mathbf{T}(P)$
  - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Tensioni e direzioni principali**

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$

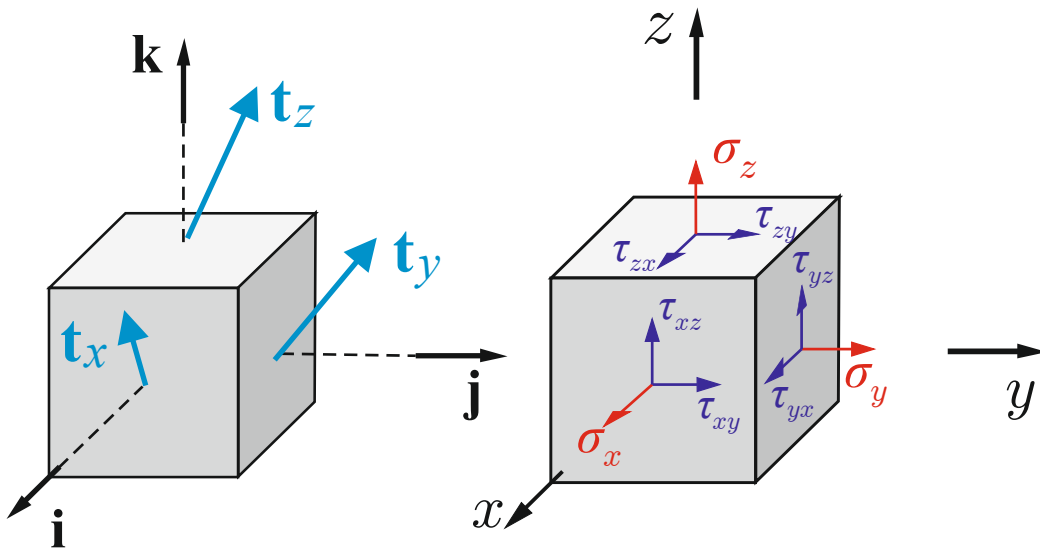


$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

### Modello di Cauchy: Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$



$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T(P) \quad P \in \mathcal{C}$$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

*Formula di Cauchy: il vettore della tensione in  $P$  secondo la giacitura individuata dal versore  $\mathbf{n}$  è data dal tensore della tensione in  $P$  applicato al versore  $\mathbf{n}$ . Quindi per rappresentare in modo completo le forze interne agenti in  $P$  è sufficiente conoscere il tensore della tensione in  $P$  (stato tensionale in  $P$ ).*

*Il vettore  $\mathbf{t}_n(P)$  dipende linearmente da  $\mathbf{n}$ .*

*Il tensore della tensione  $\mathbf{T}(P)$  (e quindi  $\mathbf{t}_n(P)$ ) si suppone continuo e derivabile con continuità rispetto a  $P$ .*

*In corrispondenza di ogni punto  $P$  sulla frontiera, detto  $\mathbf{n}$  il versore normale alla frontiera in  $P$  e  $\mathbf{f}$  l'eventuale densità di forza esterna di superficie agente in  $P$ , risulta:*

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

**Obiettivo 2.** Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne (modello di Cauchy) e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

**Obiettivo 2.** Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne (modello di Cauchy) e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.

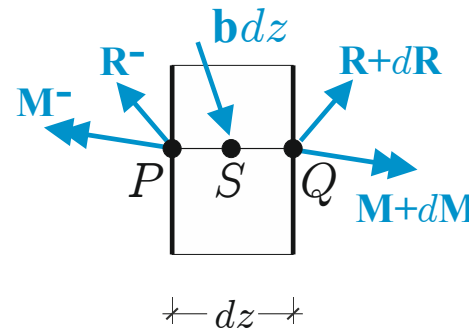
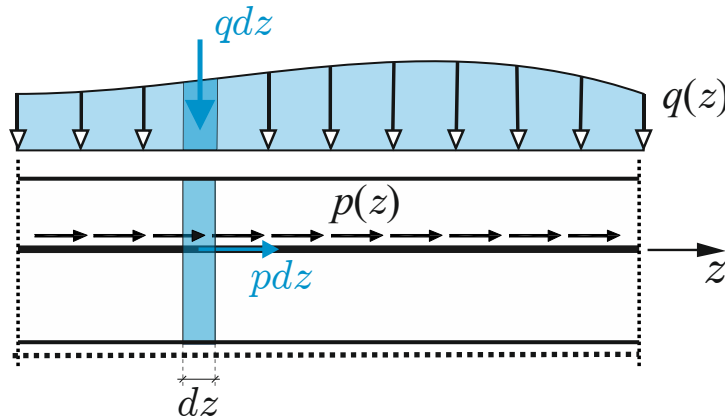
Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

### **Ipotesi**

Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata)  $C$

#### Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*



$$\mathbf{PQ} = dz \mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2} \mathbf{k}$$

#### Equazioni cardinali forma vettoriale

$$\mathbf{R}^- + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b} dz = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}^- + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times \mathbf{b} dz = \mathbf{0}$$

#### Lemma di Cauchy

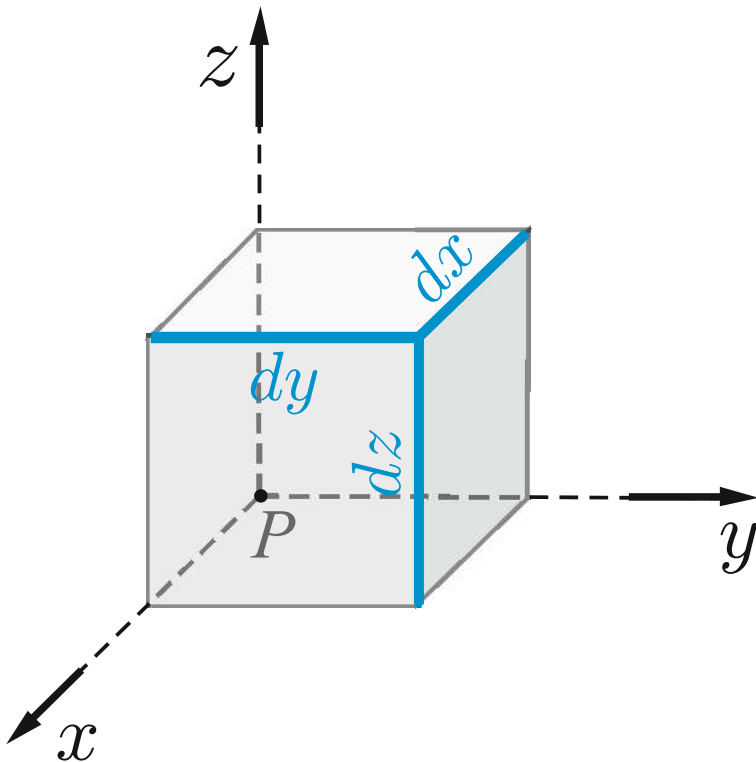
$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

### Geometria dell'elemento parallelepipedo infinitesimo



$$dV = dx \, dy \, dz$$

$$dA_x = dy \, dz$$

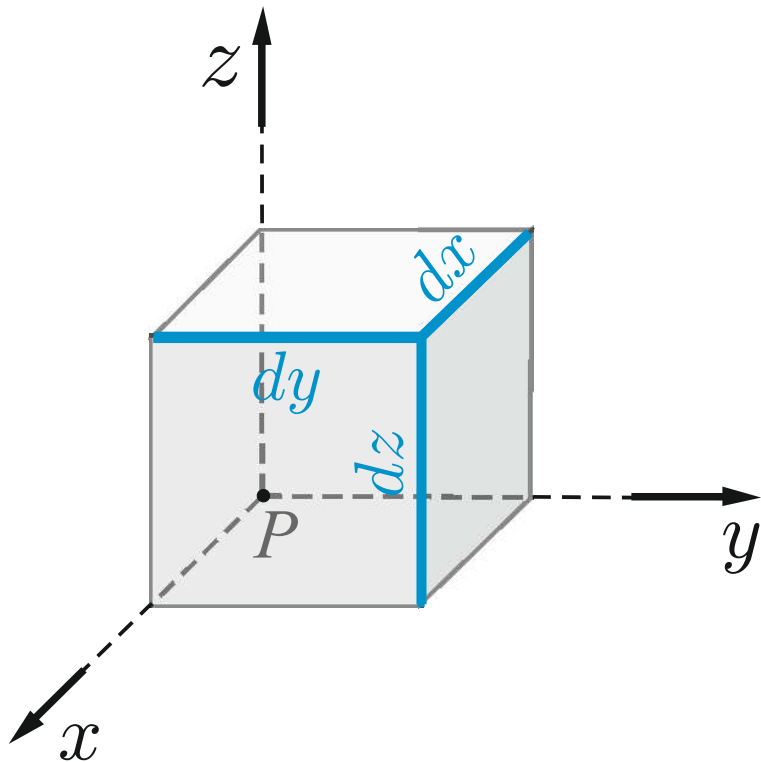
$$dA_y = dx \, dz$$

$$dA_z = dx \, dy$$

## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

### Forze agenti sull'elemento



**Forze esterne di volume:**  $dF_v = \mathbf{b}(P)dV$

**Forze di superficie sulle due facce normali all'asse x:**  $dF_x$

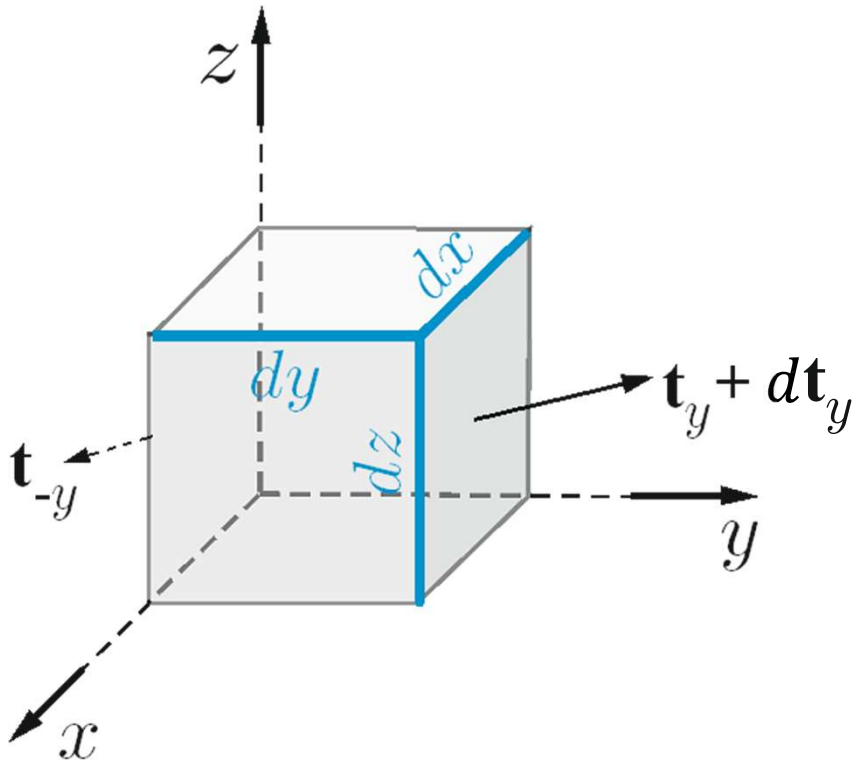
**Forze di superficie sulle due facce normali all'asse y:**  $dF_y$

**Forze di superficie sulle due facce normali all'asse z:**  $dF_z$



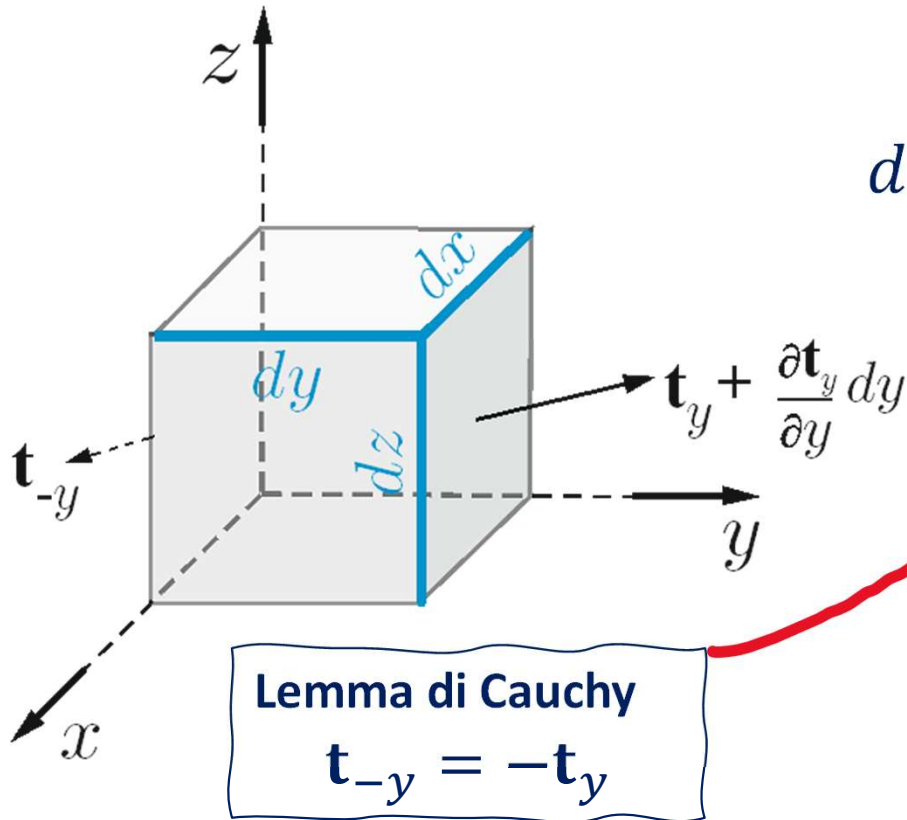
## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### Forze di superficie sulle due facce normali all'asse $y$



## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### Forze di superficie sulle due facce normali all'asse $y$



$$d\mathbf{F}_y = \mathbf{t}_{-y} dA_y + \left( \mathbf{t}_y + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy \right) dA_y =$$

$$\left( \cancel{\mathbf{t}_{-y}} + \cancel{\mathbf{t}_y} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy \right) dA_y =$$

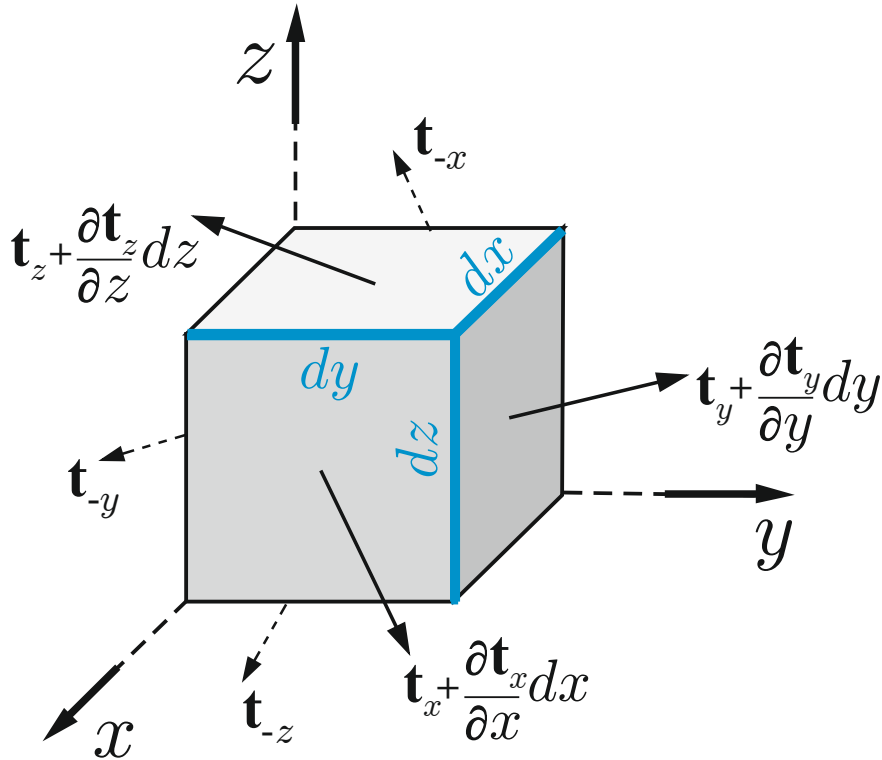
$$\frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy dA_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dx dy dz =$$

$$d\mathbf{F}_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dV$$



## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### Forze di volume e di superficie agenti



### Forze esterne di volume

$$dF_v = \mathbf{b}(P)dV$$

### Forze di superficie sulle 6 facce

#### Coppia di giaciture normali a x

$$dF_x = \frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} dV$$

#### Coppia di giaciture normali a y

$$dF_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dV$$

#### Coppia di giaciture normali a z

$$dF_z = \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} dV$$

### 1° Equazione cardinale della statica: $\mathbf{R}=\mathbf{0}$

$$dF_x + dF_y + dF_z + dF_v = \mathbf{0}$$



## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### 1° Equazione cardinale della statica: $\mathbf{R}=\mathbf{0}$

$$d\mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_y + d\mathbf{F}_z + d\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} \right) dV = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### Equazioni indefinite di equilibrio in forma vettoriale

1° equazione cardinale 
$$\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

### Equazioni indefinite di equilibrio in forma scalare

1° equazione cardinale 
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

2° equazione cardinale 
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

## 2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

### Equazioni indefinite di equilibrio in forma compatta

1° equazione cardinale  $\text{Div } \mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$

2° equazione cardinale  $\mathbf{T}^T(P) = \mathbf{T}(P)$

Condizioni al bordo  $\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$

Le equazioni indefinite di equilibrio stabiliscono un legame differenziale fra le forze interne (tensore  $\mathbf{T}$ ) e le forze esterne di volume e di superficie ( $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{f}$ ), in un continuo in equilibrio.

Tre equazioni differenziali scalari alle derivate parziali nelle sei funzioni scalari di tre variabili  $T_{ij} = T_{ji}$



### Forma compatta

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

Incognite statiche

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$$

$$\text{Div } \mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

### Forma scalare

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

Incognite statiche

$$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$$

$$\tau_{xy}(P) = \tau_{yx}(P), \tau_{yz}(P) = \tau_{zy}(P),$$

$$\tau_{xz}(P) = \tau_{zx}(P)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad + c.c$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

# 1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

## Forma compatta

### Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

---

## Forma scalare

### Incognite cinematiche

$$u(P), v(P), w(P)$$

$$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



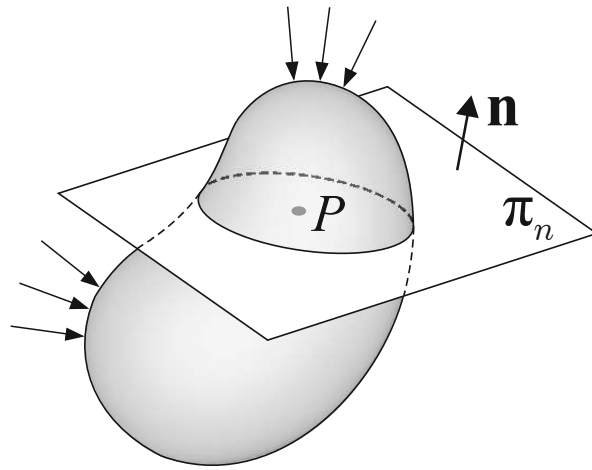
# Lezione

## 2. Statica del continuo 3D

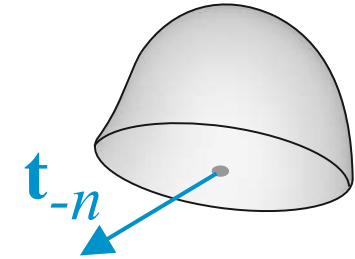
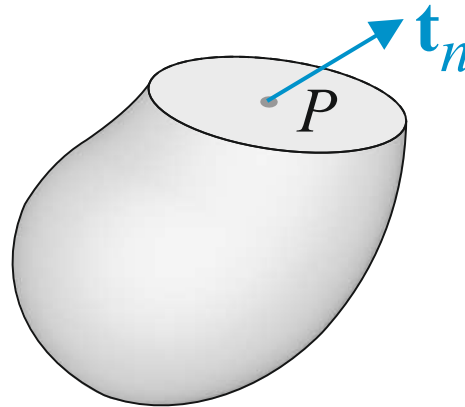
- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
- **Modello delle forze interne (Cauchy)**
  - vettore della tensione  $\mathbf{t}_n(P)$
  - Tensore della tensione  $\mathbf{T}(P)$
  - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Tensioni e direzioni principali**

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$

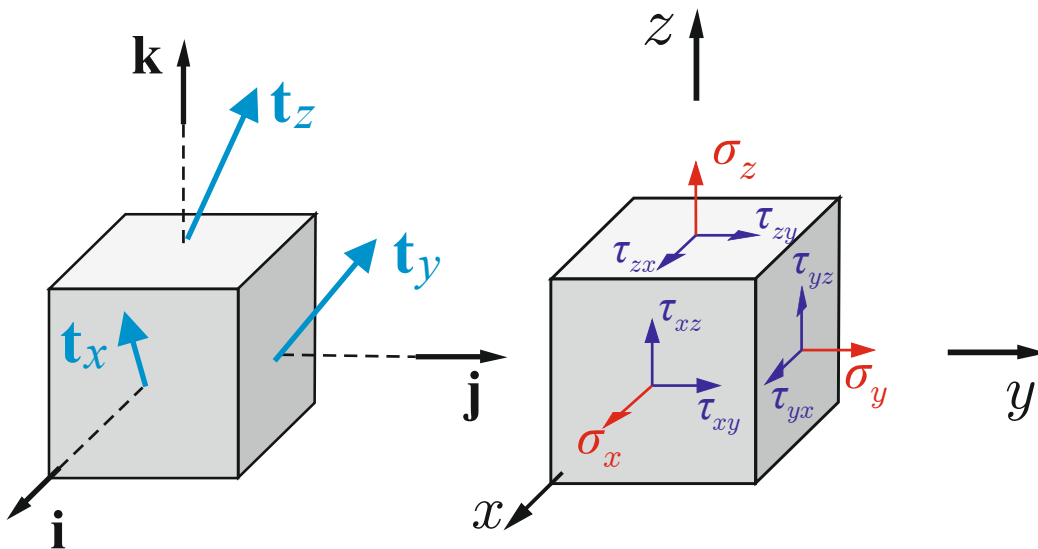


$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

### Modello di Cauchy: Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$



$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T(P) \quad P \in \mathcal{C}$$

## 2. Statica del continuo 3D: forze interne

### Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

*Formula di Cauchy: il vettore della tensione in  $P$  secondo la giacitura individuata dal versore  $\mathbf{n}$  è data dal tensore della tensione in  $P$  applicato al versore  $\mathbf{n}$ . Quindi per rappresentare in modo completo le forze interne agenti in  $P$  è sufficiente conoscere il tensore della tensione in  $P$  (stato tensionale in  $P$ ).*

*Il vettore  $\mathbf{t}_n(P)$  dipende linearmente da  $\mathbf{n}$ .*

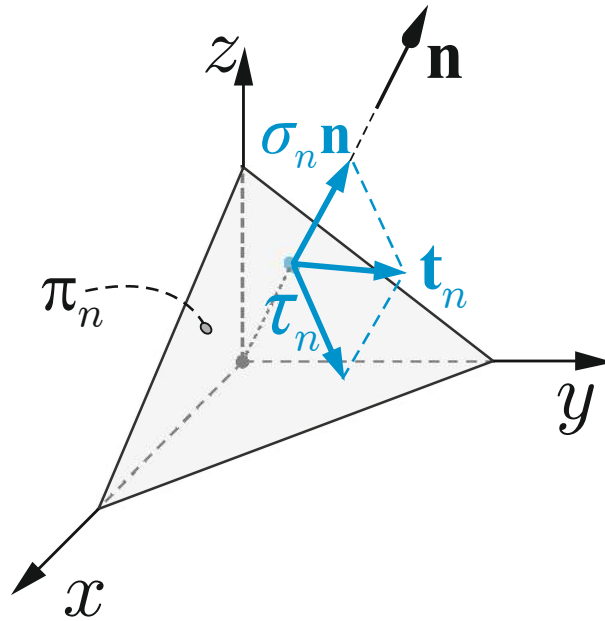
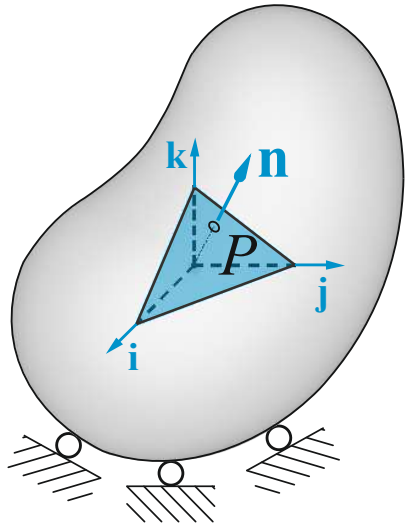
*Il tensore della tensione  $\mathbf{T}(P)$  (e quindi  $\mathbf{t}_n(P)$ ) si suppone continuo e derivabile con continuità rispetto a  $P$ .*

*In corrispondenza di ogni punto  $P$  sulla frontiera, detto  $\mathbf{n}$  il versore normale alla frontiera in  $P$  e  $\mathbf{f}$  l'eventuale densità di forza esterna di superficie agente in  $P$ , risulta:*

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

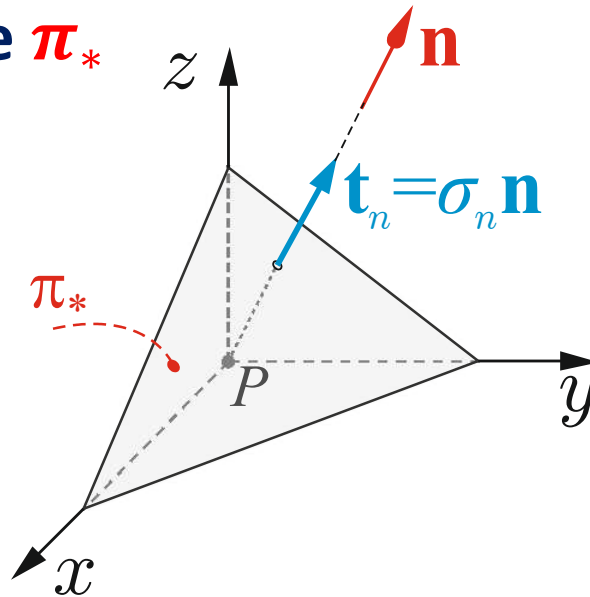
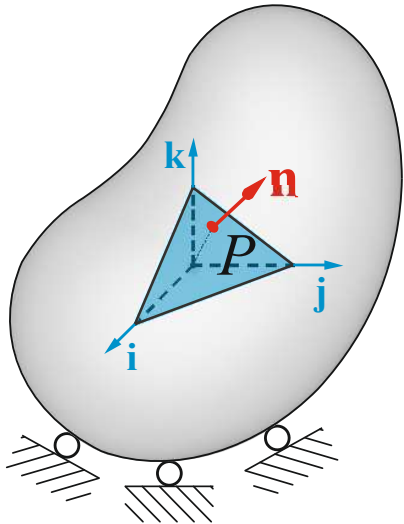
## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali

### Giacitura generica $\pi_n$



$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$$

### Giacitura principale $\pi_*$

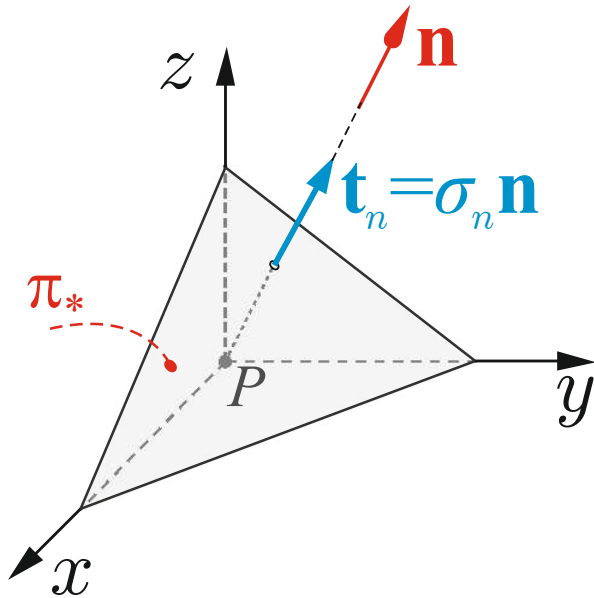


$$\mathbf{t}_n(P) // \mathbf{n}$$

$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n}$$



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n}$$

$$\mathbf{T}(P) \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

**Incognite**

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

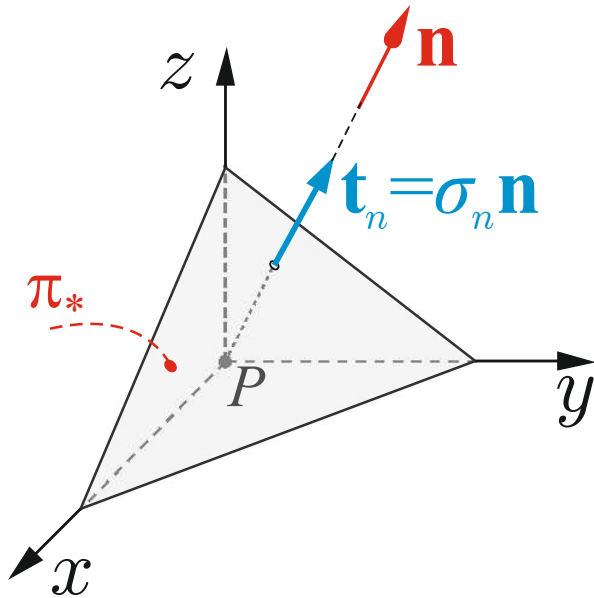
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se  $\text{Det}(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \neq 0$ ,  $\exists! \mathbf{n} = \mathbf{0}$  (Rouché-Capelli). Questo non è accettabile perché, essendo un versore,  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ . Quindi:

$$\text{Det}(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



**Incognite**

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\text{Det} (\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$

$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \rightarrow \infty \text{ soluzioni non banali}$$

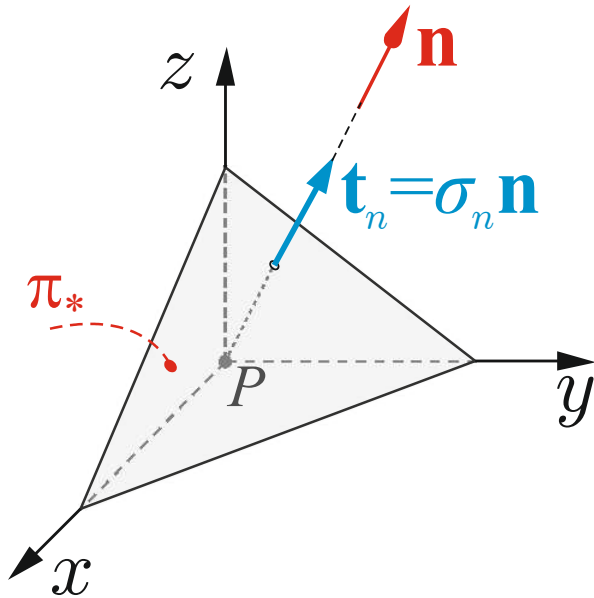
$$\text{Det} \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

**Equazione caratteristica**



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

### Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

**Incognite**

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



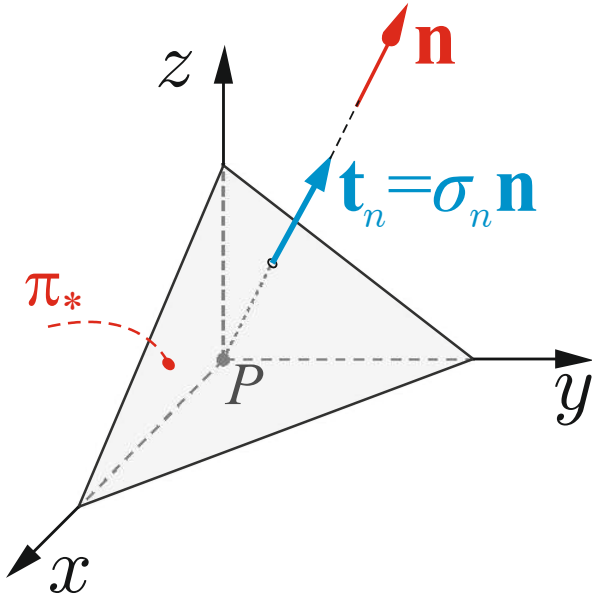
$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$



**n<sub>1</sub>**



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

### Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

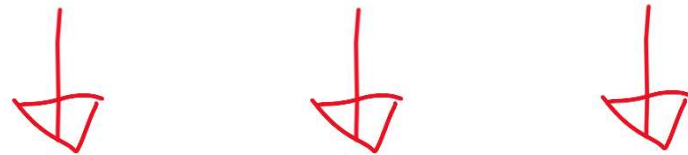
$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

### Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$



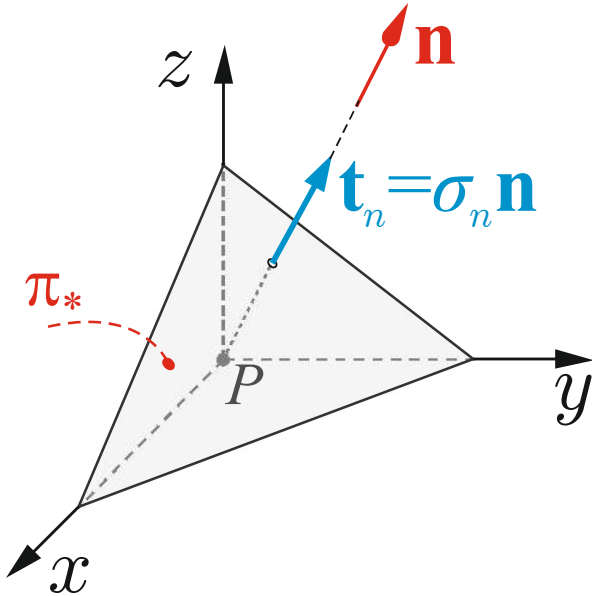
$\mathbf{n}_1$

$\mathbf{n}_2$

$\mathbf{n}_3$



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

### Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

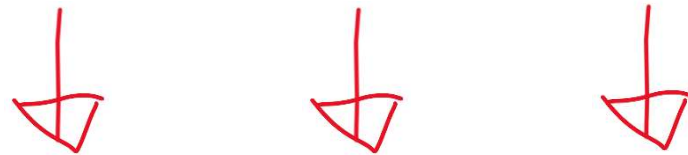
$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

### Incognite

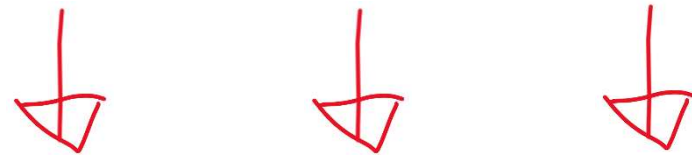
$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



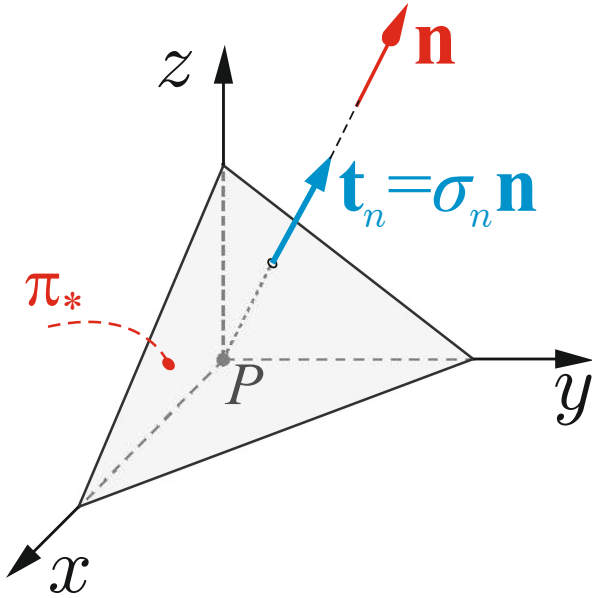
$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}_3$$



## 2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$
$$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}_3$$

**Tensioni  
principali**

**Direzioni  
principali**

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

