

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

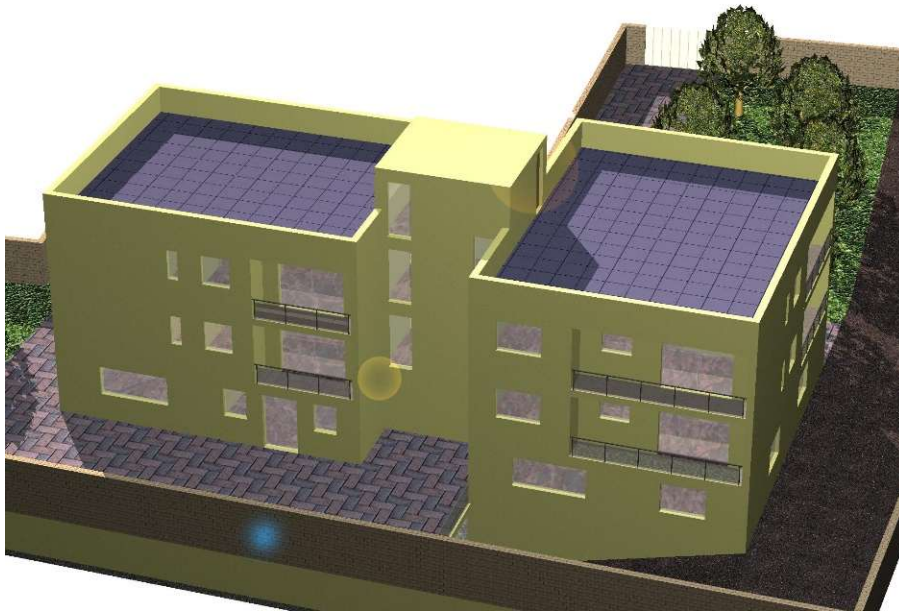
**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## 2.1 Parole chiave

**Struttura portante:** insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



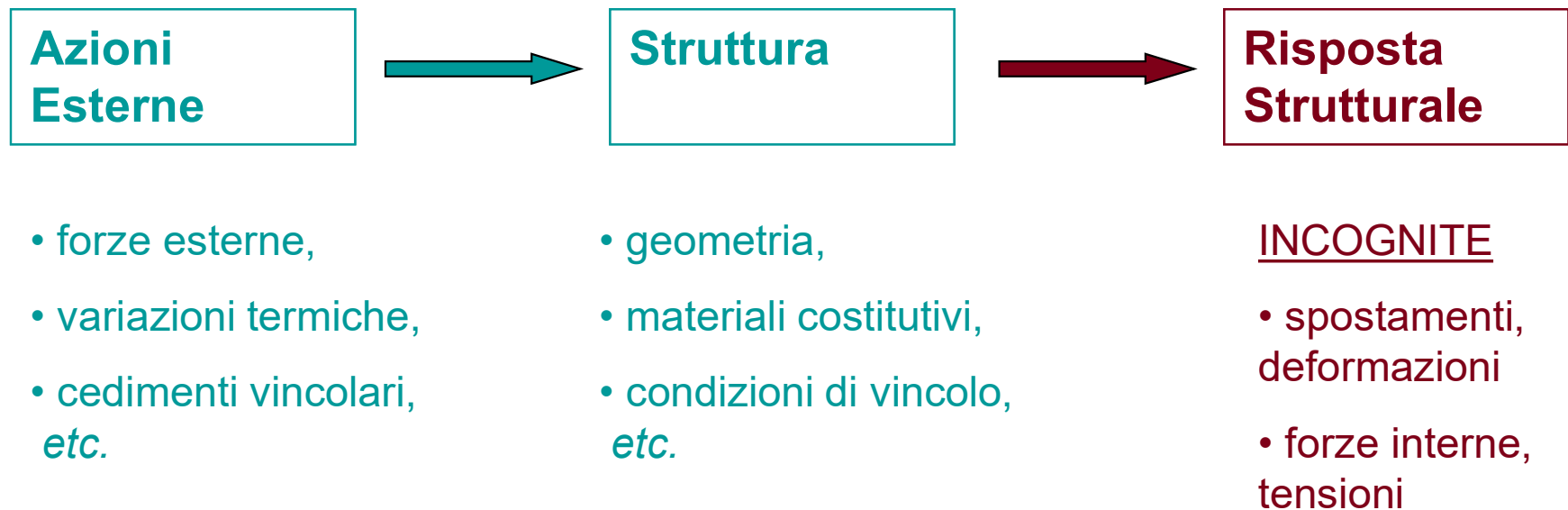
**Costruzione**



**Struttura portante**

## 2.1 Parole chiave

**Analisi strutturale:** analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.





## Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant



## Modelli strutturali

- **PARTE I – Corpo rigido**
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant



## Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- **PARTE II – Trave elastica monodimensionale**
- PARTE III – Continuo tridimensionale
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant



## Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- **PARTE III – Continuo tridimensionale**
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant



# Lezione

## Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

# Il modello di continuo deformabile 3D

**Mezzo continuo deformabile:** corpo ideale *esteso*, *continuo* e *deformabile*.

**Proprietà. 1. Esteso:** Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione C*. **2.**

**Continuo:** La materia costitutiva occupa la porzione di spazio in modo continuo (cioè senza lasciare vuoti), di conseguenza è possibile definire una *corrispondenza biunivoca* fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Deformabile:** Il corpo (o

qualsiasi sua parte) può cambiare forma e dimensioni: *deformabilità* sia a livello globale che locale. Nel presente modello **non sono consentiti** lacerazione o compenetrazione di materia, ed è assicurata la ‘permanenza della materia’ (*requisiti di plausibilità fisica*)

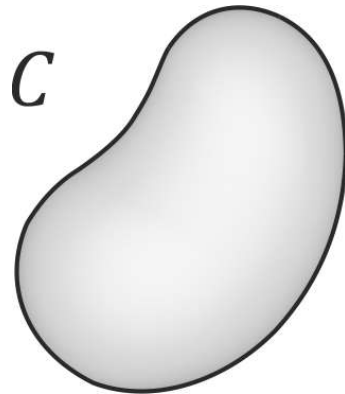
## Configurazione:

$S = \partial C$  : frontiera

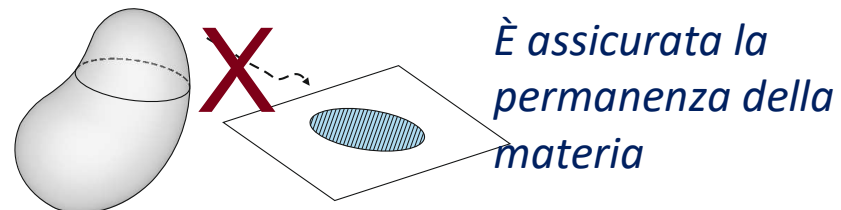
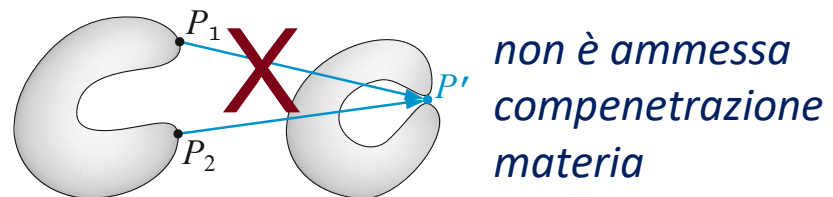
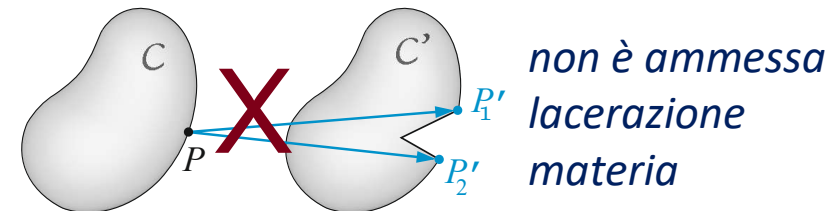
$S = S_u \cup S_f$

$S_u$  : frontiera vincolata

$S_f$  : frontiera libera



## Requisiti di plausibilità fisica





# 1. Cinematica del continuo 3D

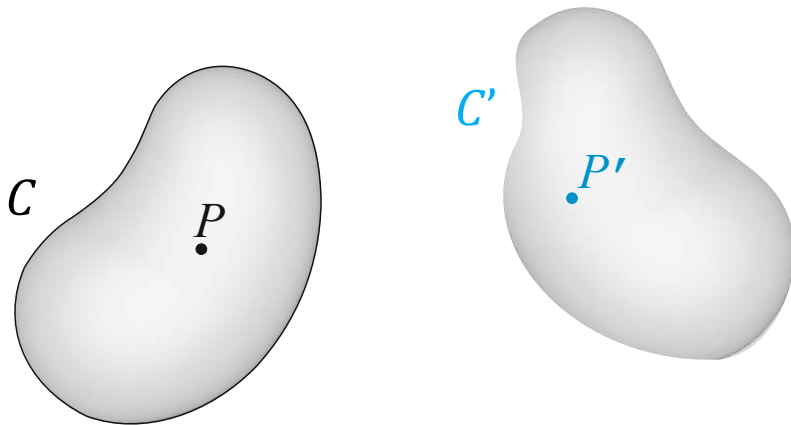
- **Obiettivi**
- **Campo degli spostamenti**
- **Analisi della deformazione**
  - tensore della deformazione  $\mathbf{E}(P)$
  - misure di deformazione
- **Equazioni implicite di congruenza**



# 1. Cinematica del continuo 3D: obiettivi

**Obiettivo 1.** Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da  $C$  a  $C'$ ) di un continuo tridimensionale

**Obiettivo 2.** Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione a livello globale e locale manifestati dal continuo nel passaggio da  $C$  a  $C'$



$C$  : configurazione

$S = \partial C$  : frontiera

$S = S_u \cup S_f$

$S_u$  : frontiera vincolata

$S_f$  : frontiera libera

$C$  : configurazione iniziale

$C'$  : configurazione finale

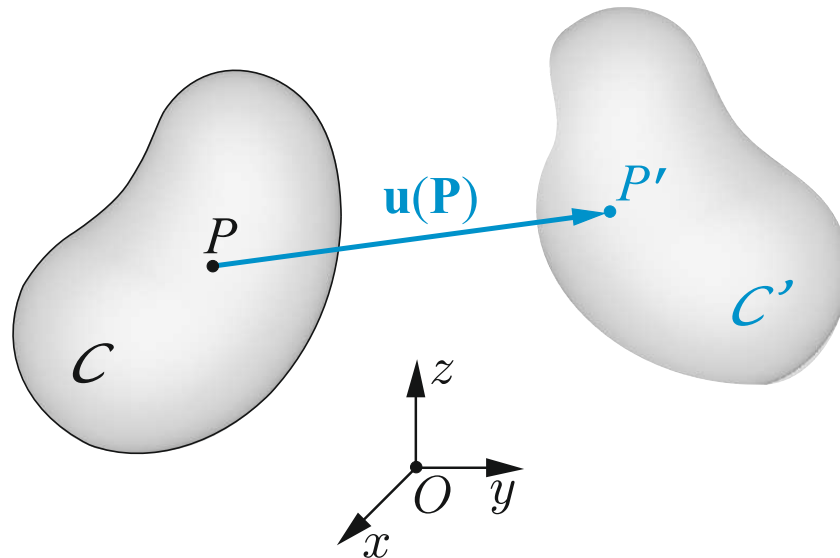
Trasporto  $f$

$f: C \rightarrow C'$

L'applicazione  $f$  è biunivoca e ammette un'unica applicazione inversa continua (requisiti plausibilità)

# 1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

**Vettore spostamento. Campo di spostamenti:** Assegnato un punto  $P \in C$ , si definisce spostamento  $\mathbf{u}(P)$  il vettore applicato  $\mathbf{PP}'$ . Dimensioni fisiche [L], funzione vettoriale di punto. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti caratterizza la deformata del continuo.



$$P \equiv (x, y, z)$$

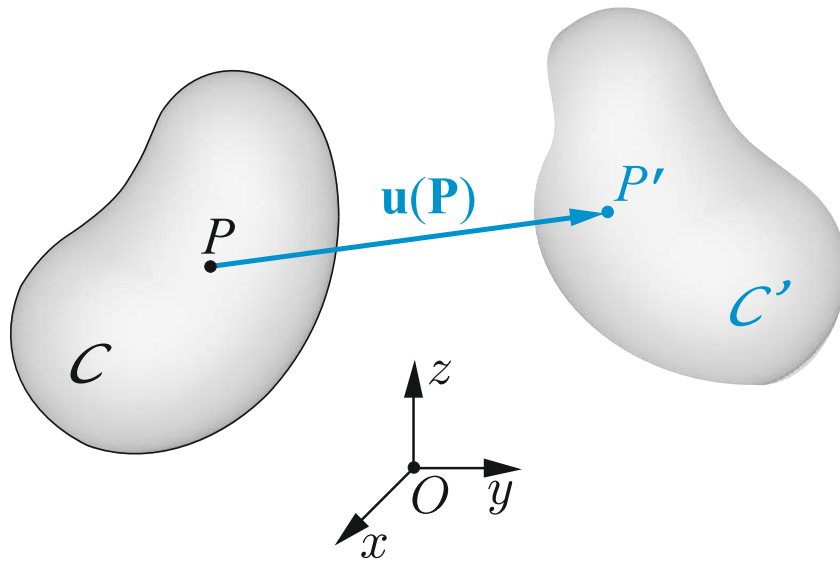
$\mathbf{u}(P) \rightarrow$  *Vettore spostamento* [L]

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

$\bar{\mathbf{u}}$  eventuali cedimenti vincolari assegnati

# 1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

**Vettore spostamento. Componenti scalari:** Le componenti del vettore  $\mathbf{u}(P)$  in un assegnato sistema di riferimento hanno dimensioni fisiche [L] e sono funzioni scalari di tre variabili.



$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

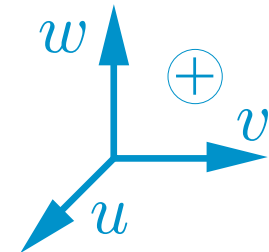
$u(x, y, z) \rightarrow$  componente  $x$  [L]

$v(x, y, z) \rightarrow$  componente  $y$  [L]

$w(x, y, z) \rightarrow$  componente  $z$  [L]

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

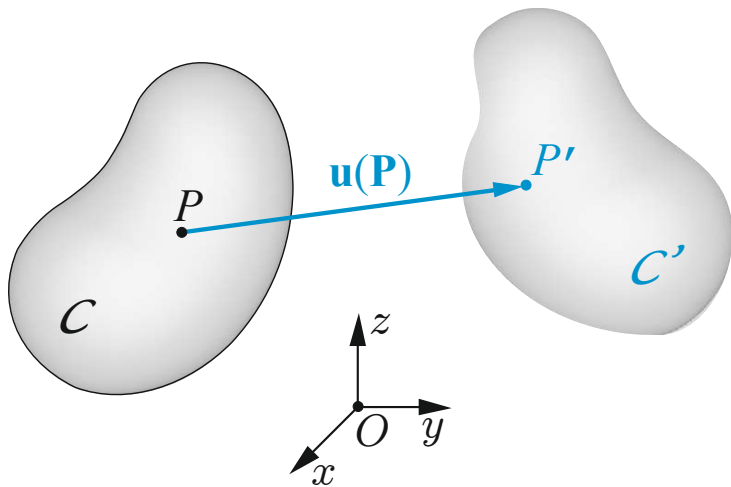


# 1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

## Ipotesi 1: piccoli spostamenti

$$\forall P \in C, \quad |\mathbf{u}(P)| \ll \ell \quad \ell \text{ dimensione caratteristica del corpo}$$

**Ipotesi 2:** regolarità delle funzioni  $w(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$



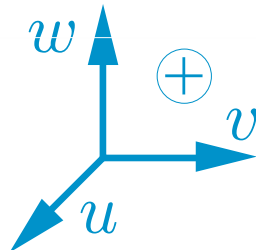
$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

$$u(x, y, z) \rightarrow \text{componente } x \text{ [L]}$$

$$v(x, y, z) \rightarrow \text{componente } y \text{ [L]}$$

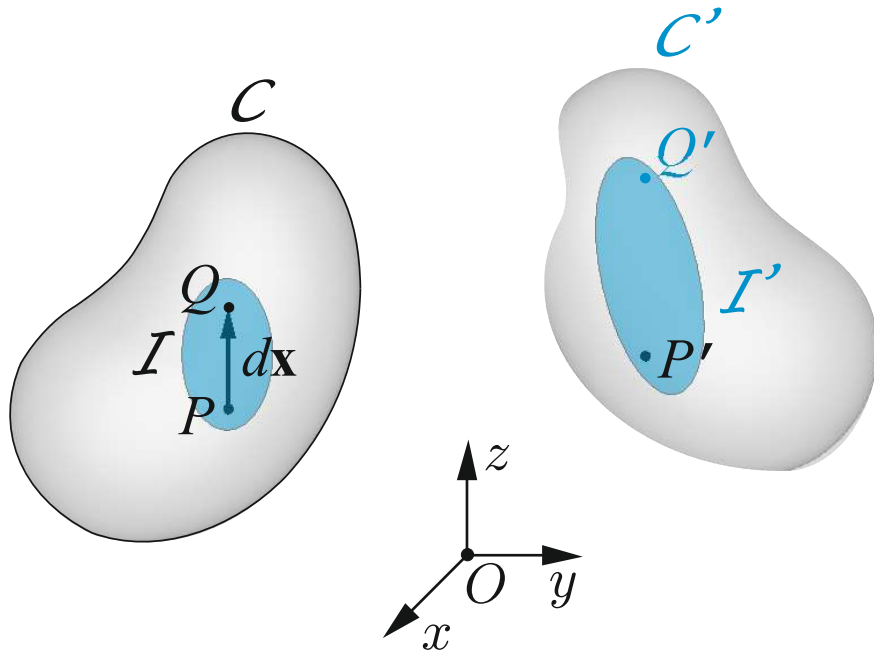
$$w(x, y, z) \rightarrow \text{componente } z \text{ [L]}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{J}$ di $P$



$$P \equiv (x, y, z)$$

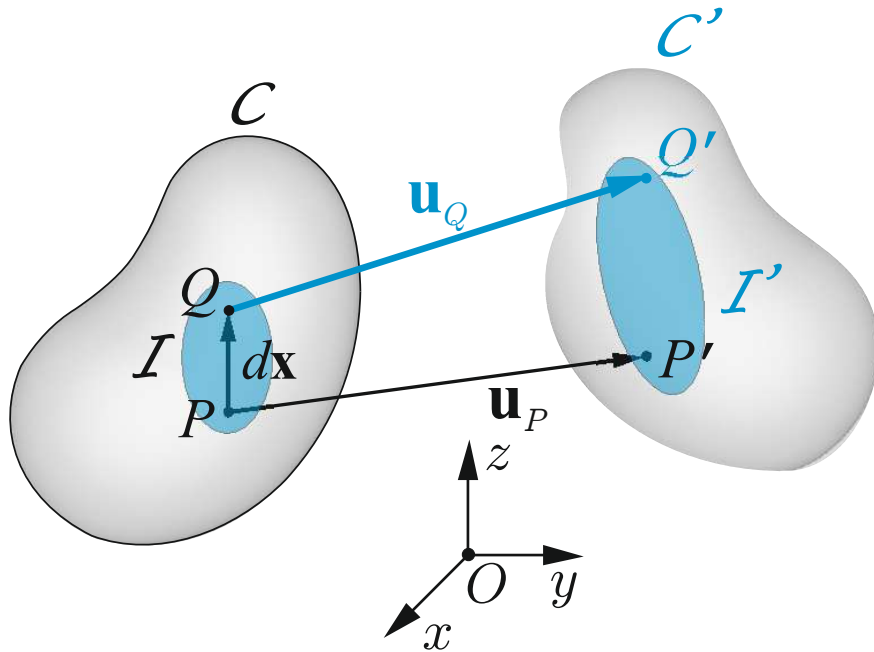
$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di $P$



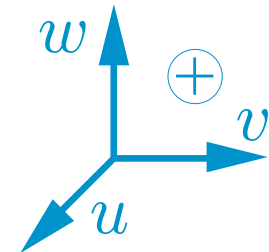
$$\mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u}_Q = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

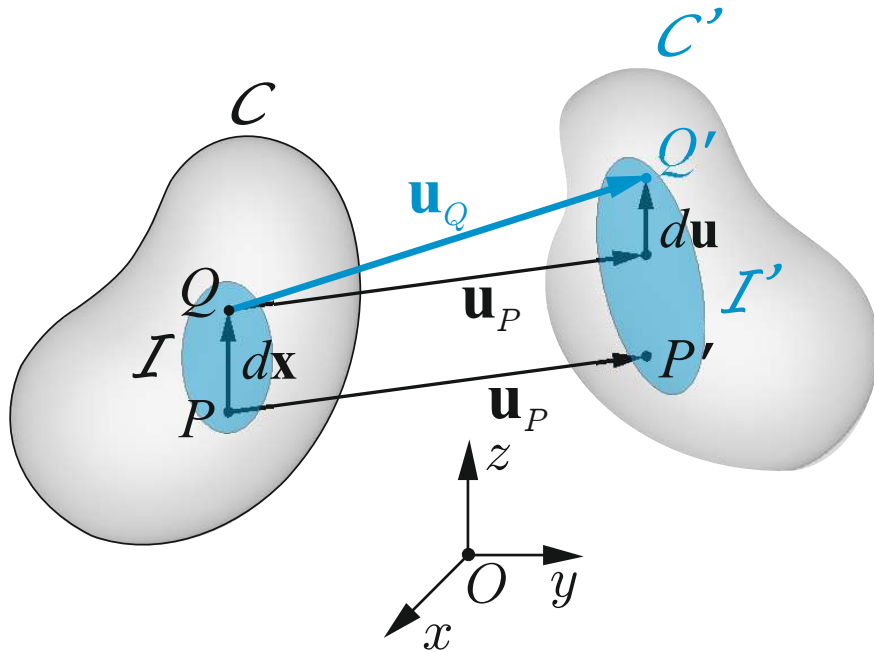
$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di $P$



$$\mathbf{u}_P = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_Q = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

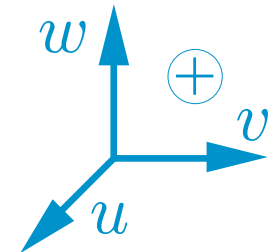
$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$





# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{J}$ di $P$

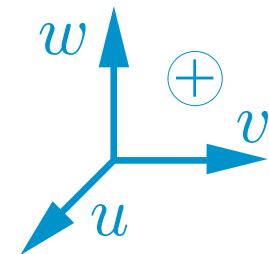
$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$



$u(x, y, z)$   $v(x, y, z)$

$w(x, y, z)$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{J}$ di $P$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$


$$d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

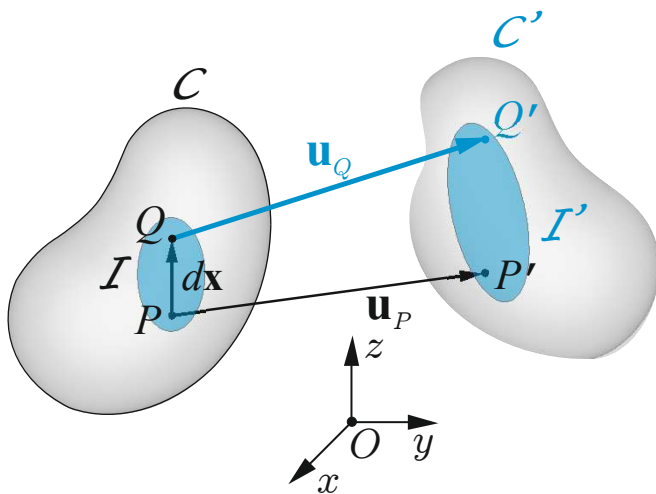
# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Tensore gradiente dello spostamento $F(P)$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{u}(P)$$



$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$



## Decomposizione del tensore $\mathbf{F}(P)$

$$\mathbf{F}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} + \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \quad \boldsymbol{\Omega} \in \textit{skw}$$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}, \quad \mathbf{E} \in \textit{symm}$$

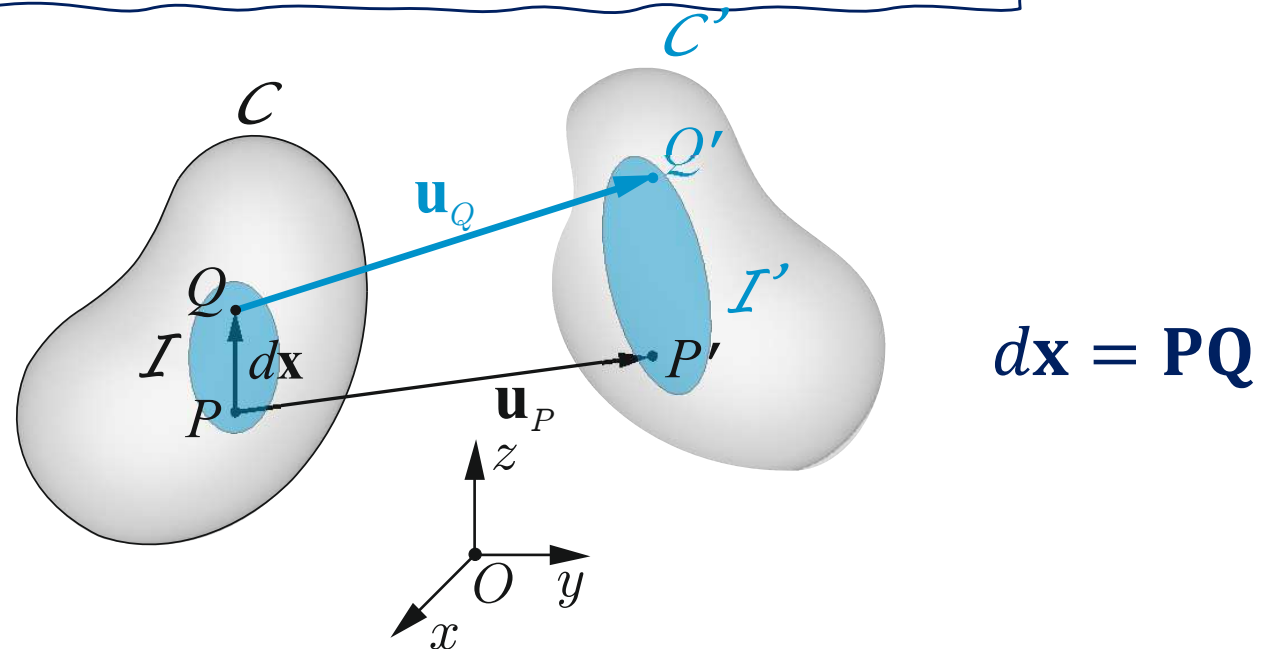
# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Decomposizione dello spostamento

$$\mathbf{F}(P) = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega}(P)d\mathbf{x} + \mathbf{E}(P)d\mathbf{x}$$





# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione del tensore emisimmetrico $\Omega$ tensore della rotazione rigida $\Omega$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \Omega d\mathbf{x} + \mathbf{E}d\mathbf{x}$$

Cosa accade se  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ?

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \Omega d\mathbf{x}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ}$$

$$\Omega = -\Omega^T$$

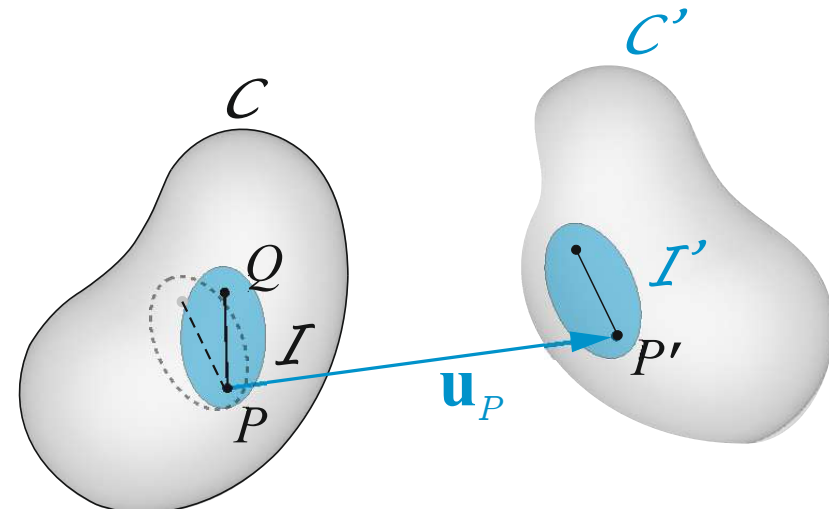
FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \Omega_R \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{OP}$$

$$\Omega_R = -\Omega_R^T$$

se  $E = 0$ , ogni punto  $Q$  dell'intorno infinitesimo  $\mathcal{I}$  obbedisce alla FGSR con polo di riduzione  $P$ . L'intorno  $\mathcal{I}$  si sposta come un elemento rigido





## Interpretazione del tensore emisimmetrico $\Omega$ tensore della rotazione rigida $\Omega$

$$\Omega(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} = -\Omega(P)^T$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione del tensore simmetrico $\mathbf{E}$ tensore della deformazione $\mathbf{E}$

Solo se  $\mathbf{E}(P) \neq \mathbf{0}$ , l'intorno  $\mathcal{J}$  cambia forma e/o dimensione

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{E}(P)^T$$

Notazione convenzionale delle componenti (misure di deformazione)

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

$\varepsilon_i$  Dilatazioni assiali

$\gamma_{ij}$  Scorrimenti angolari

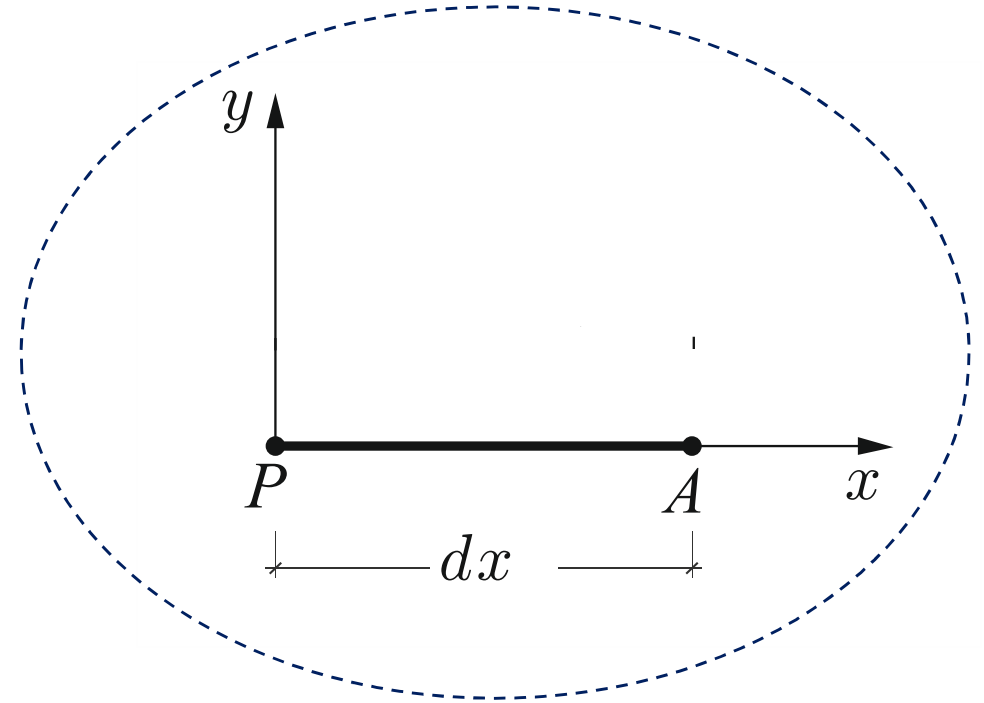
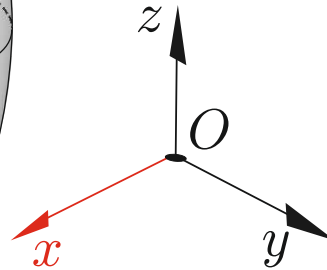
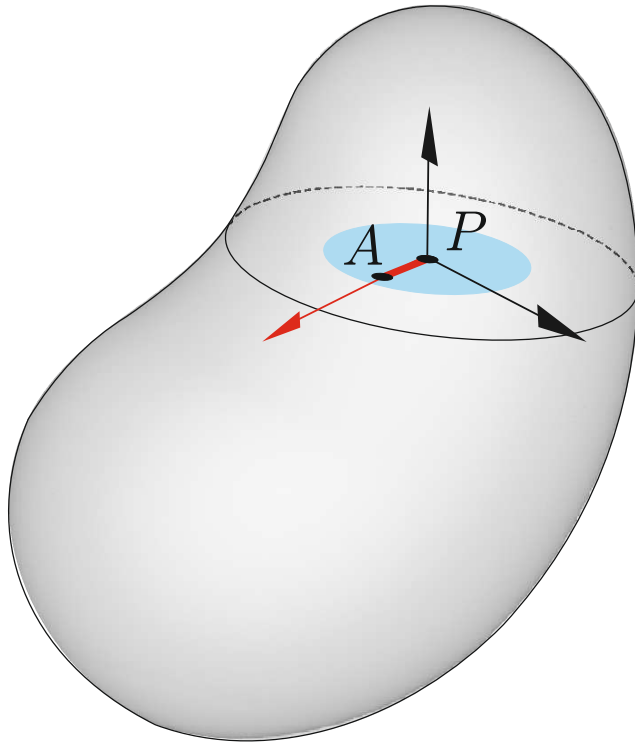
Grandezze  
adimensionali [0]



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale

### Dilatazioni assiali $\varepsilon_i$



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

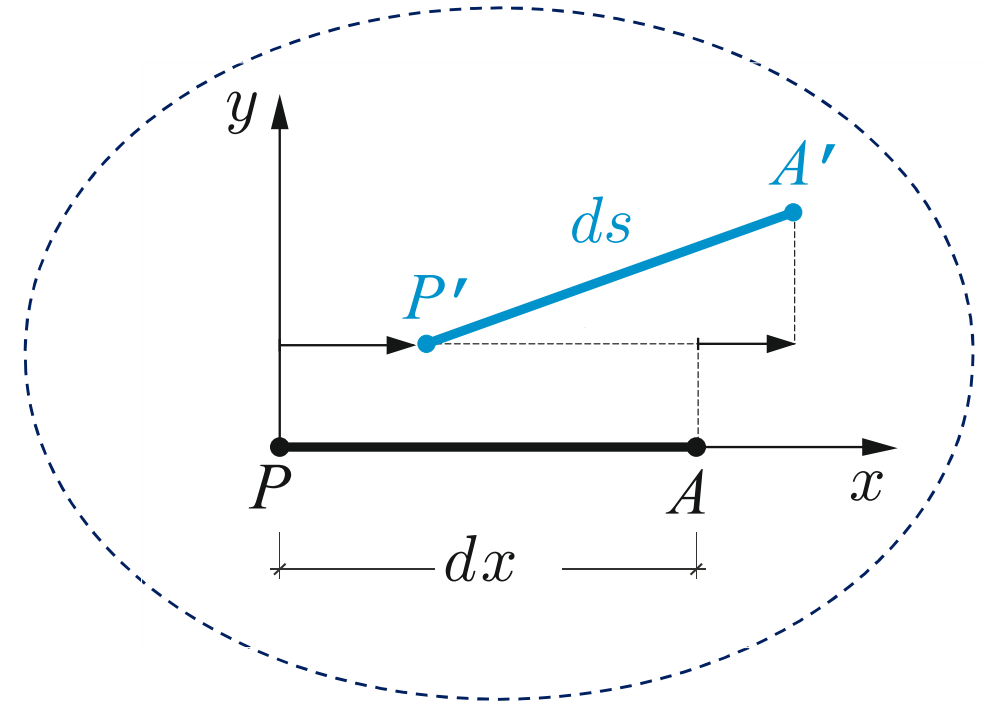
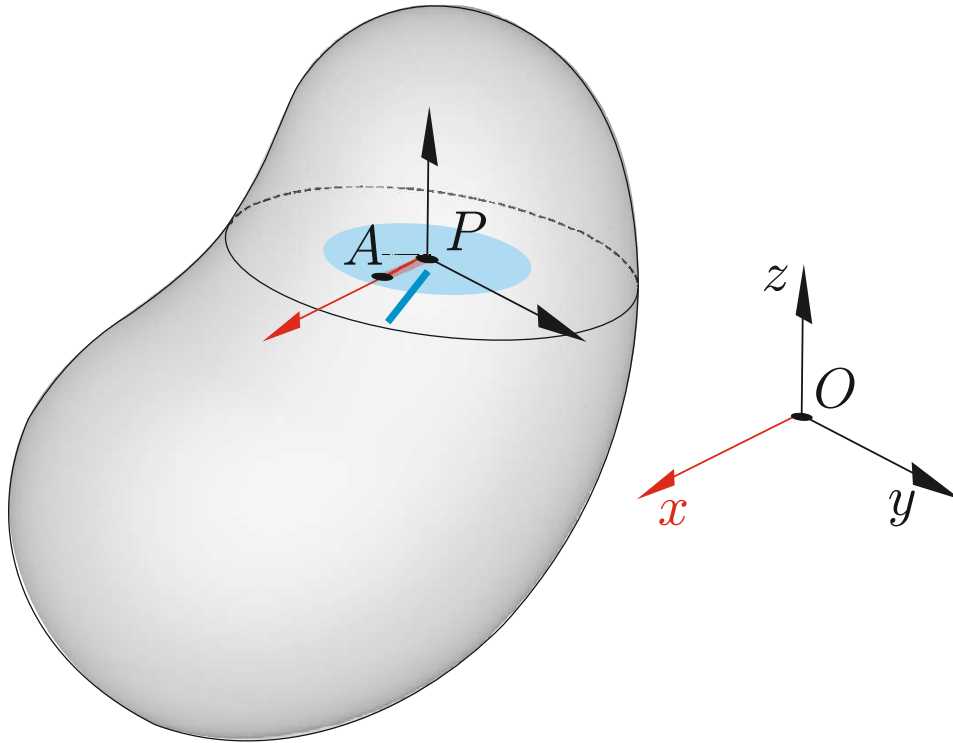
$$\mathbf{PA} = dx\mathbf{i} \quad \text{fibra parallela all'asse } x$$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale

### Dilatazioni assiali $\varepsilon_i$



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$$\mathbf{PA} = dx \mathbf{i} \quad \text{fibra parallela all'asse } x$$

$$\frac{ds - dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

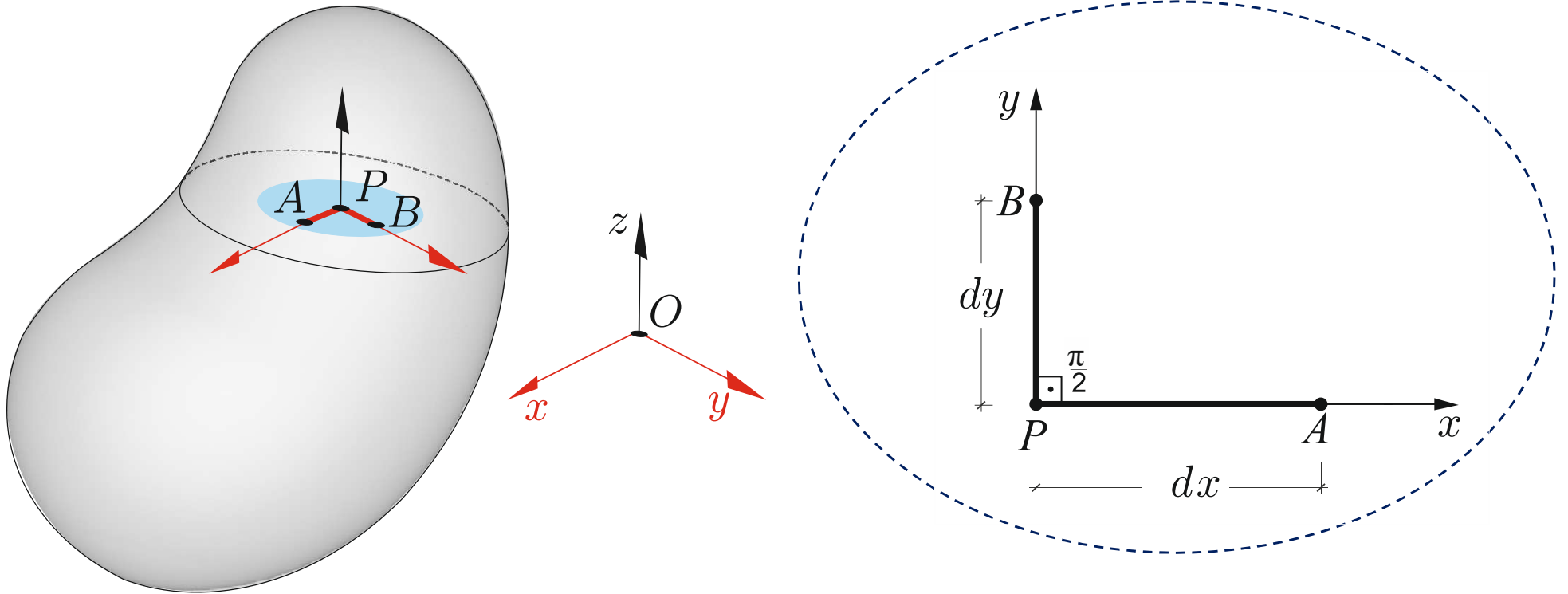
Variazione percentuale di  
lunghezza della fibra:  $\varepsilon_x$



# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale

### Scorrimenti angolari $\gamma_{ij}$



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

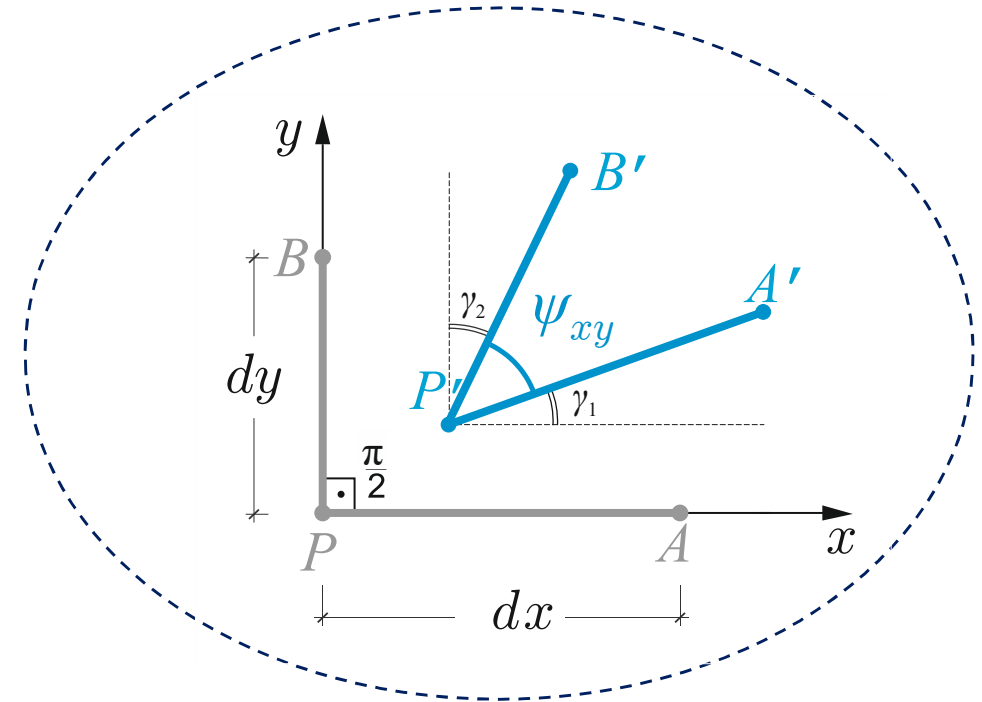
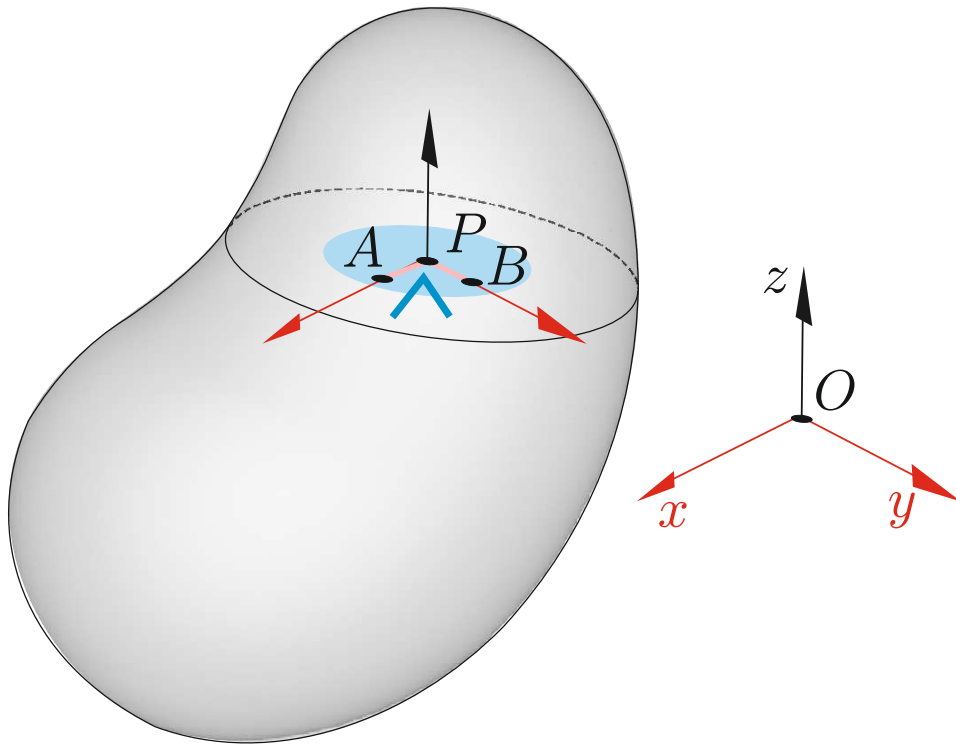
$$B \equiv (x, y + dy, z)$$

$$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j} \quad \text{fibra parallela all'asse } y$$

# 1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

## Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale

### Scorrimenti angolari $\gamma_{ij}$



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$$B \equiv (x, y + dy, z)$$

$$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j} \quad \text{fibra parallela all'asse } y$$

$$\frac{\pi}{2} - \psi_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

*Variazione dell'angolo fra due fibre parallele agli assi x e y*

## Interpretazione meccanica delle misure di deformazione

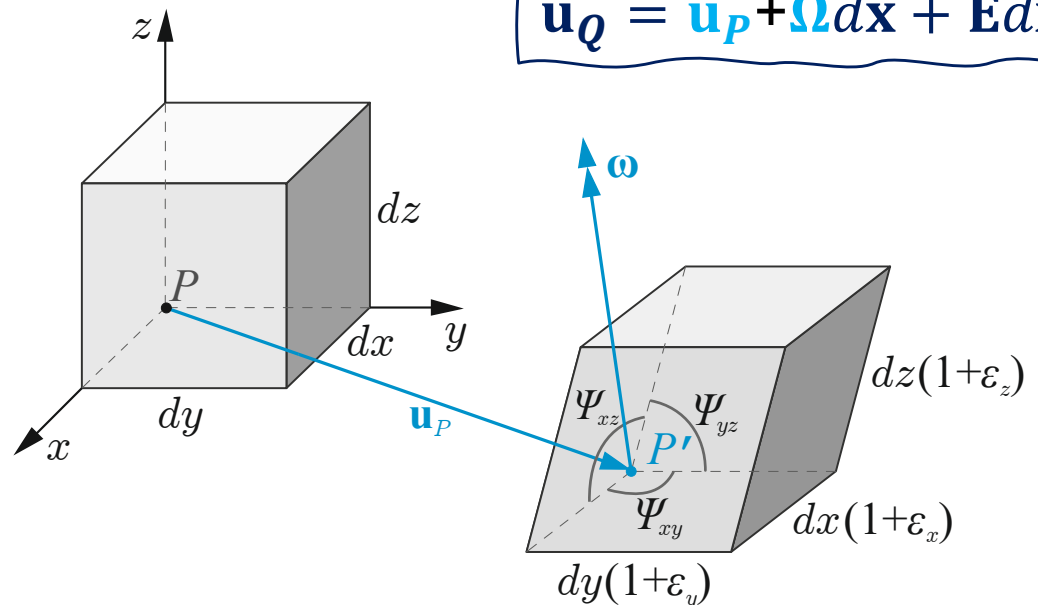
**Dilatazioni assiali**  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  (variazioni di dimensione)

*rappresentano le dilatazioni assiali delle fibre poste secondo le direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente*

**Scorrimenti angolari**  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  (variazioni di forma)

*rappresentano le variazioni angolari delle fibre disposte, prima della deformazione, secondo le direzioni  $(x, y)$ ,  $(x, z)$  e  $(y, z)$ , rispettivamente*

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$





## Tensore della deformazione

$\mathbf{E}(P) \rightarrow$  dipende solo dal posto  $P$

$\mathbf{E}(P) \in \text{symm} \rightarrow$  è simmetrico:  $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}^T(P)$

Essendo  $E_{ij} = E_{ji}$ , le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili (grandezze adimensionali,  $[E_{ij}] = [0]$ )

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano le seguenti tre funzioni:

$$J_1 = \text{Tr}(\mathbf{E}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\gamma_{xy} + \gamma_{yz} + \gamma_{xz})^2 \quad \rightarrow \text{Invarianti della}$$

$$J_3 = \det(\mathbf{E})$$

deformazione



# 1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$
  
$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

The diagram shows the mapping from the tensor components in the first equation to the strain components in the second equation. Red circles and arrows indicate that  $\frac{\partial u}{\partial x}$  maps to  $\varepsilon_x$ . Blue circles and arrows indicate that  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  maps to  $\frac{1}{2} \gamma_{yx}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  maps to  $\varepsilon_y$ , and  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$  maps to  $\frac{1}{2} \gamma_{zy}$ .



# 1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

## Forma scalare

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad +c.c.$$

## Forma compatta

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

# 1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

## Forma compatta

### Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

---

## Forma scalare

### Incognite cinematiche

$$u(P), v(P), w(P)$$

$$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$