

# Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

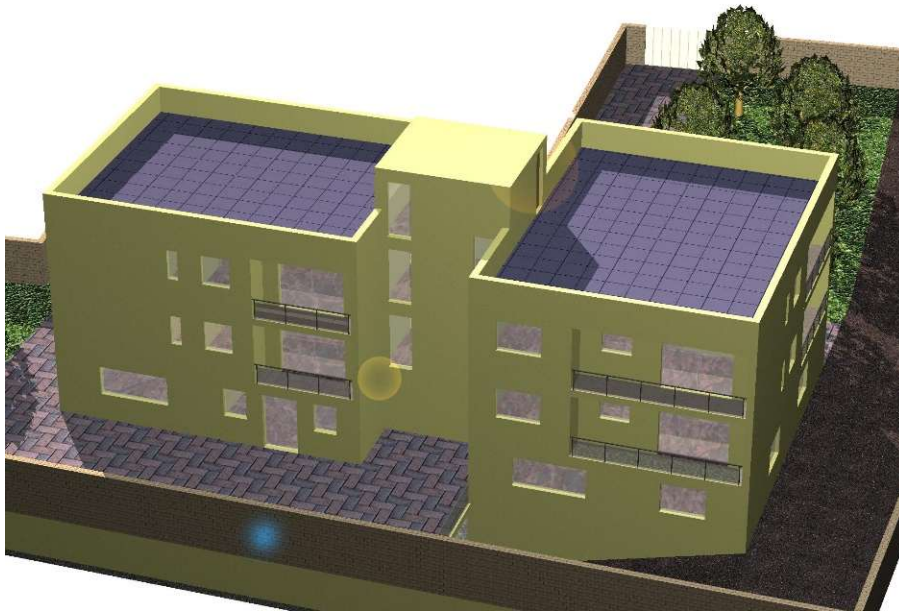
E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



## 2.1 Parole chiave

**Struttura portante:** insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



**Costruzione**

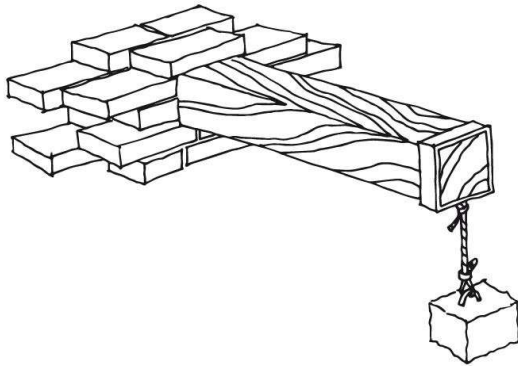


**Struttura portante**

## 2.1 Parole chiave

**Risposta strutturale:** comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne.

### Esempio



#### **Struttura:**

Trave di legno incastrata

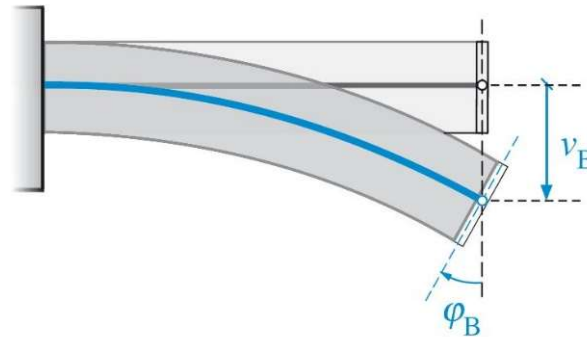
#### **Azioni esterne:**

Carico all'estremo libero

Peso proprio trave

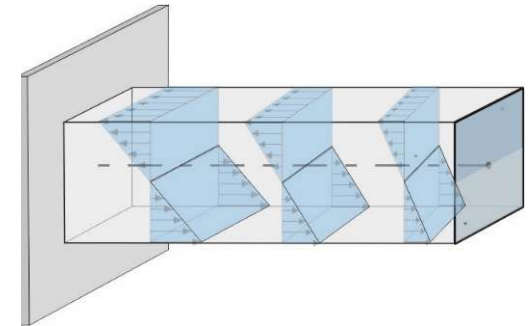
Forze reattive all'incastro

### Risposta strutturale



#### **Risposta cinematica:**

Spostamenti,  
deformazioni

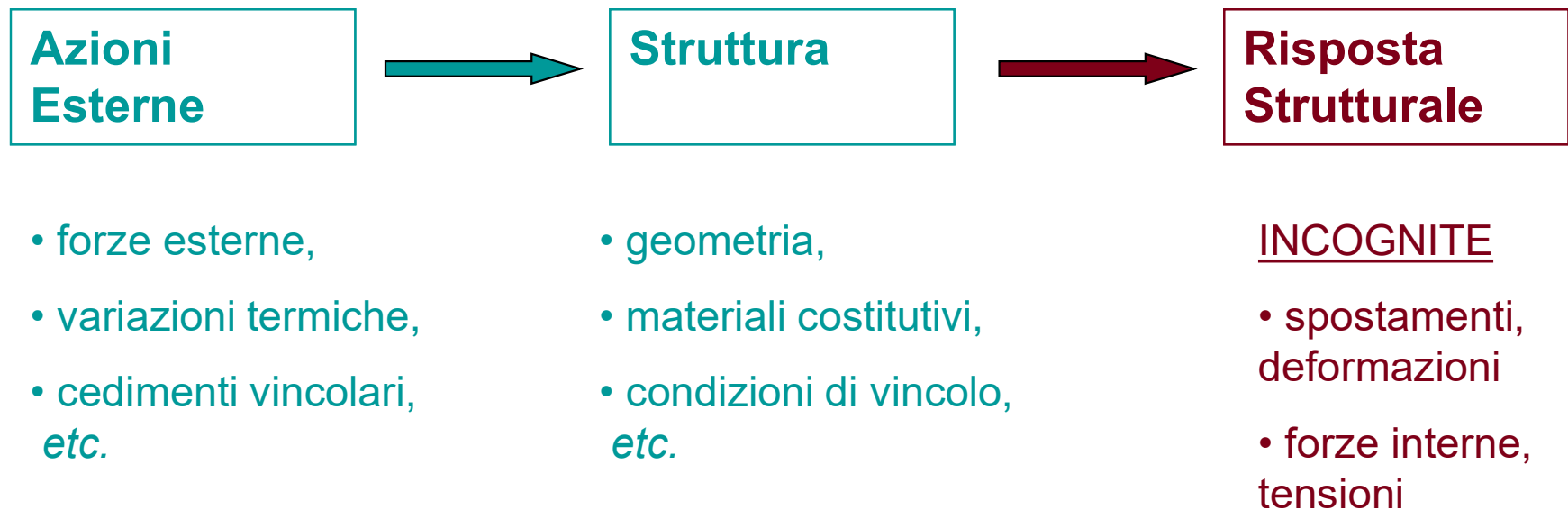


#### **Risposta statica:**

Forze interne,  
tensioni

## 2.1 Parole chiave

**Analisi strutturale:** analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.





## 2.3 Programma del corso

disponibile su [www.pcasini.it/disg/statica](http://www.pcasini.it/disg/statica)

### **Parte I – Modello di corpo rigido: travi rigide**

Parte II - Travi elastiche monodimensionali (1D)

Parte III - Continuo tridimensionale di Cauchy (3D)

Parte IV - Cilindro di Saint Venant, problema di Saint Venant

Parte V - Stabilità e resistenza strutturale



# Lezione

## Parte I - Il modello di corpo rigido

- Definizioni, notazioni, limiti del modello
- Sistemi di corpi rigidi
- Cinematica del corpo rigido
- Statica del corpo rigido

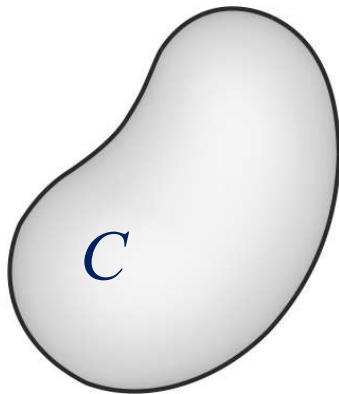


# Il modello di corpo rigido

**Corpo rigido:** corpo ideale *esteso* e *continuo* che gode della seguente proprietà: la mutua distanza fra due suoi punti *comunque scelti* è immutabile.

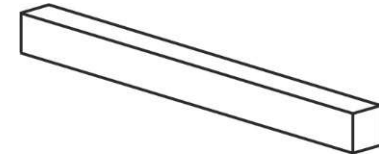
**Proprietà. 1. Esteso:** Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione C*.

**Configurazione:**



**Possibili geometrie:**

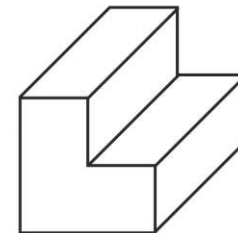
**1D**



**2D**



**3D**



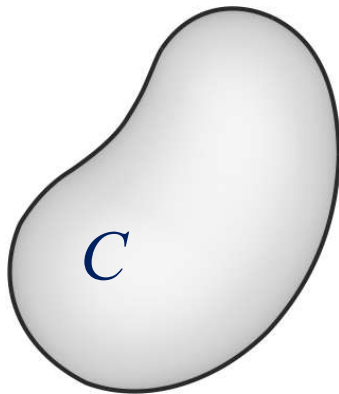
# Il modello di corpo rigido

**Corpo rigido:** corpo ideale *esteso* e *continuo* che gode della seguente proprietà: la mutua distanza fra due suoi punti *comunque scelti* è immutabile.

**Proprietà. 1. Esteso:** Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione C*.

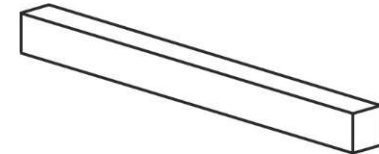
**2. Continuo:** La materia costitutiva è distribuita *con continuità* (cioè senza lasciare vuoti) all'interno dello spazio occupato dal corpo: di conseguenza è possibile definire una corrispondenza biunivoca fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Indeformabile:** Il corpo (o qualsiasi sua parte) non può mai cambiare forma e dimensioni: *indeformabilità* sia a livello globale che locale.

## Configurazione:



## Possibili geometrie:

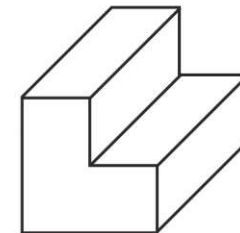
1D



2D



3D

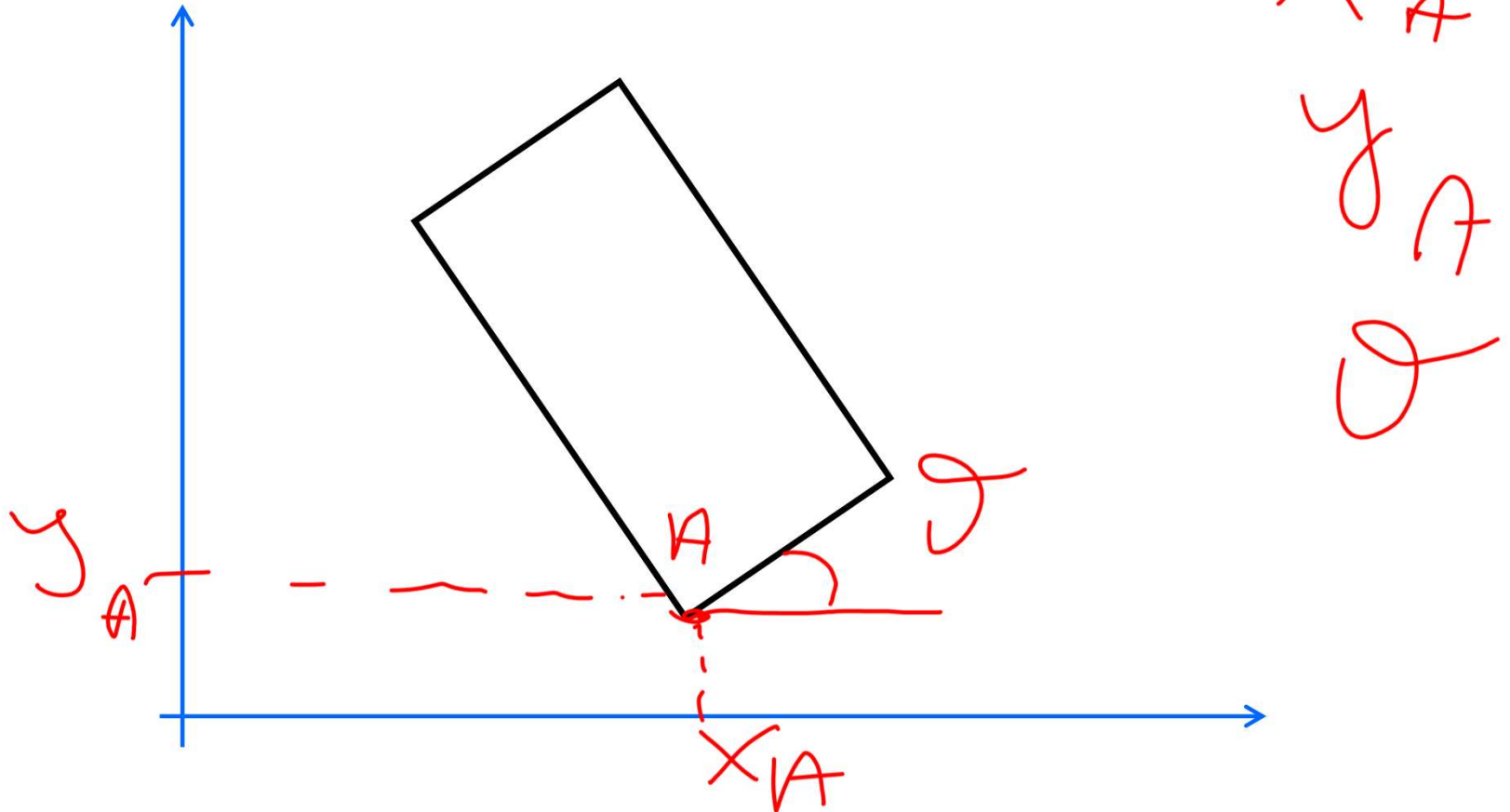




# Il modello di corpo rigido

**Numero di gradi di libertà  $n$ :** numero di parametri indipendenti strettamente necessari a individuare in modo univoco la configurazione di un corpo rigido nello spazio. Nel piano  $n=3$ ; nello spazio  $n = 6$ .

## Esempio

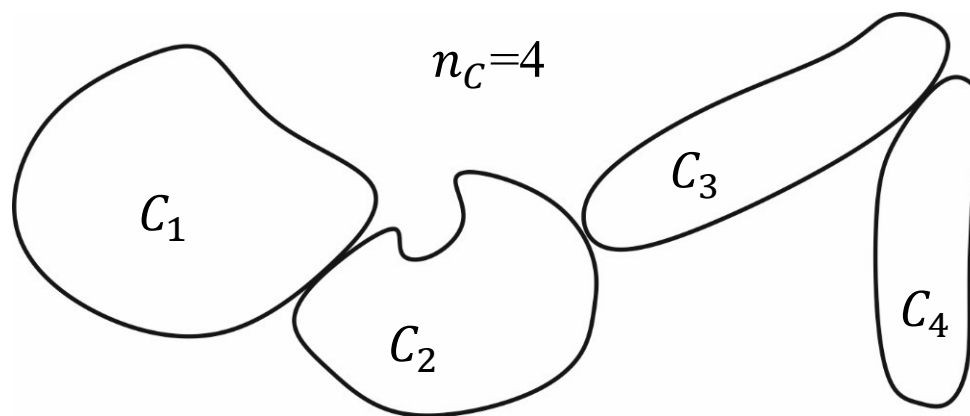


# Sistemi di corpi rigidi

**Sistemi di corpi rigidi.** Le strutture sono generalmente costituite da più elementi strutturali collegati fra di loro; se si adotta per ciascun elemento il modello di corpo rigido, è utile definire la nozione di *sistema di corpi rigidi*: insieme di  $n_C$  corpi rigidi, dove  $n_C$  è il numero di corpi rigidi costituenti il sistema.

Si definisce configurazione  $C$  del sistema l'unione delle singole configurazioni  $C_i$  degli  $n_C$  corpi:  $C = \cup C_i, i = 1, \dots, n_C$

Il numero di gradi di libertà di un sistema è  $n = 3n_C$  nel piano e  $n = 6n_C$  nello spazio



$C_i, i = 1, \dots, 4$



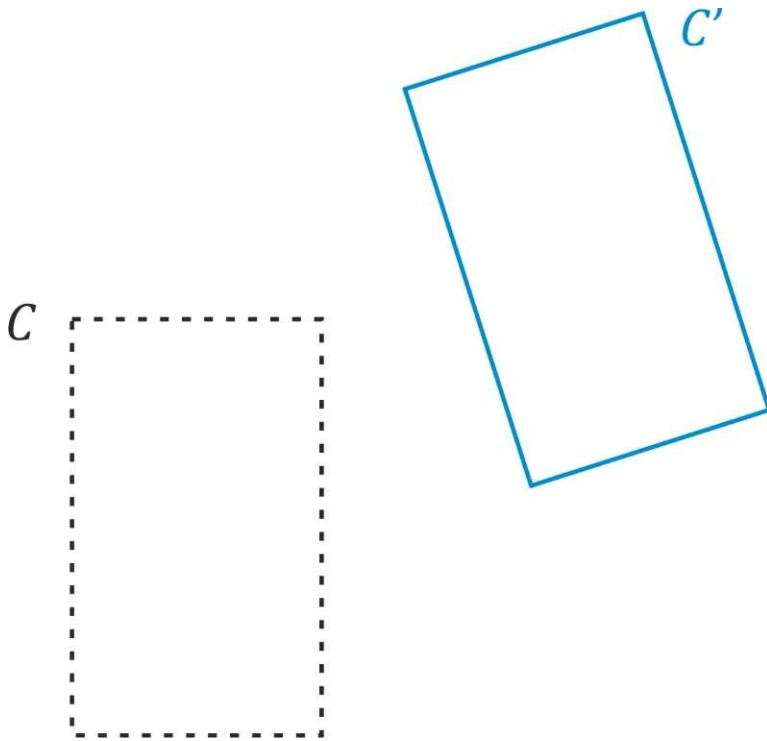
# 1. Cinematica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Spostamento rigido**
  - traslazione
  - rotazione
  - rototraslazione
- **Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)**
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- **Il problema cinematico**
- **Classificazione cinematica**
- **Esercizi** (sito: E02-E05, testo: §2.7-2.8)



# 1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

**Obiettivi:** Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da  $C$  a  $C'$ ) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



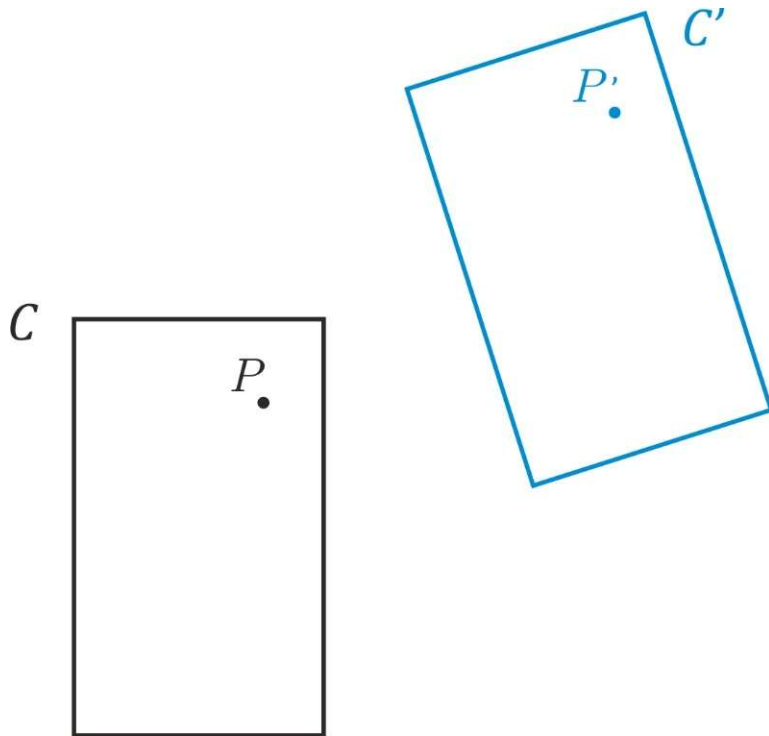
$C$  : configurazione iniziale

$C'$  : configurazione finale

Trasporto  $f$   
 $f: C \rightarrow C'$

# 1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

**Obiettivi:** Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da  $C$  a  $C'$ ) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



$C$  : configurazione iniziale

$C'$  : configurazione finale

Trasporto  $f$   
 $f: C \rightarrow C'$

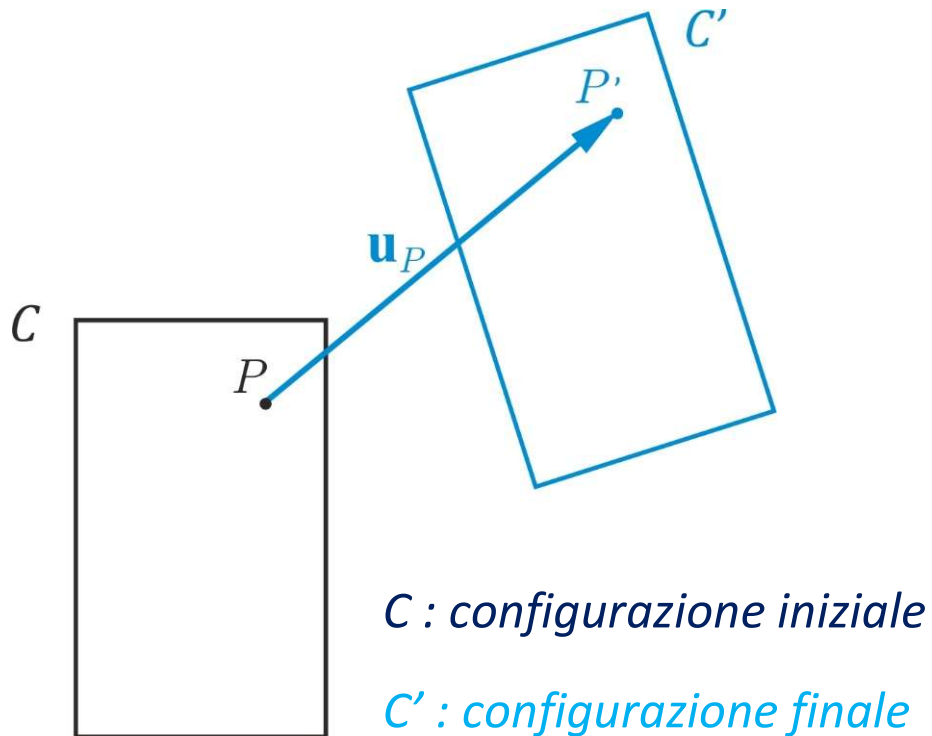
Considerato il generico punto  $P$ :

$$P \in C \rightarrow P' \in C'$$

$$P' = f(P)$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

**Vettore spostamento. Campo di spostamenti:** Assegnato un punto  $P \in C$ , si definisce spostamento  $\mathbf{u}_P$  il vettore applicato  $\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}'$ . **Dimensioni fisiche [L]**. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti del corpo caratterizza il cambiamento di configurazione da  $C$  a  $C'$  del corpo rigido



*Vettore spostamento*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}' \quad [L]$$

*Campo di spostamenti*

$$\mathbf{u}_P \quad \forall P \in C$$

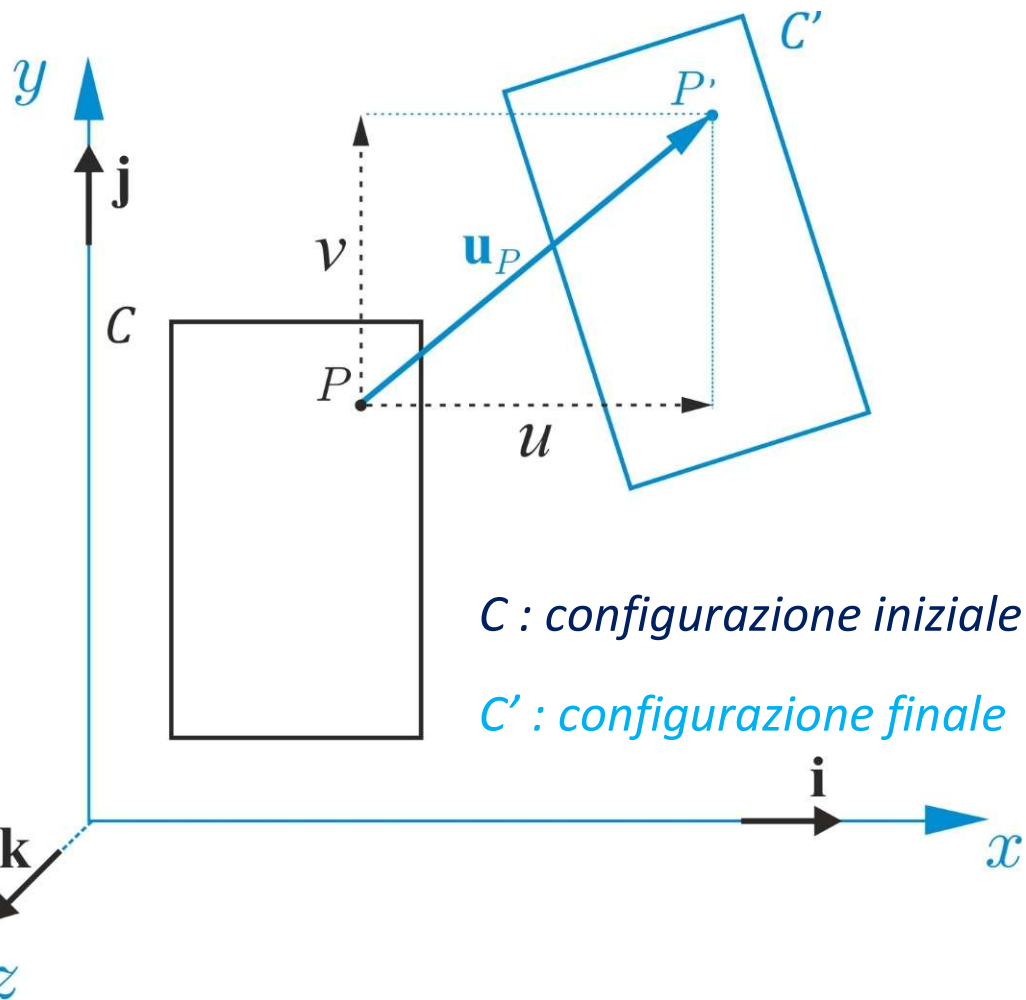
*Campo di spostamenti piano*

Si ha un campo di spostamenti piano (o semplicemente *spostamento piano*) quando gli spostamenti di tutti i punti hanno direzione parallela ad un unico piano  $\pi$ .

$$\mathbf{u}_P // \pi \quad \forall P \in C$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

## Componenti cartesiane del vettore spostamento



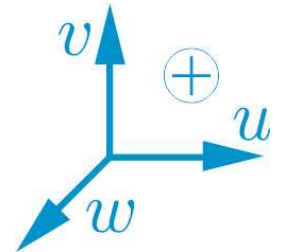
### Spazio 3D

Vettore spostamento di  $P \equiv (x, y, z)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Rappresentazione matriciale

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



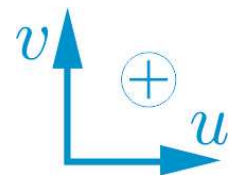
### Spostamento piano

Vettore spostamento di  $P \equiv (x, y)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Rappresentazione matriciale

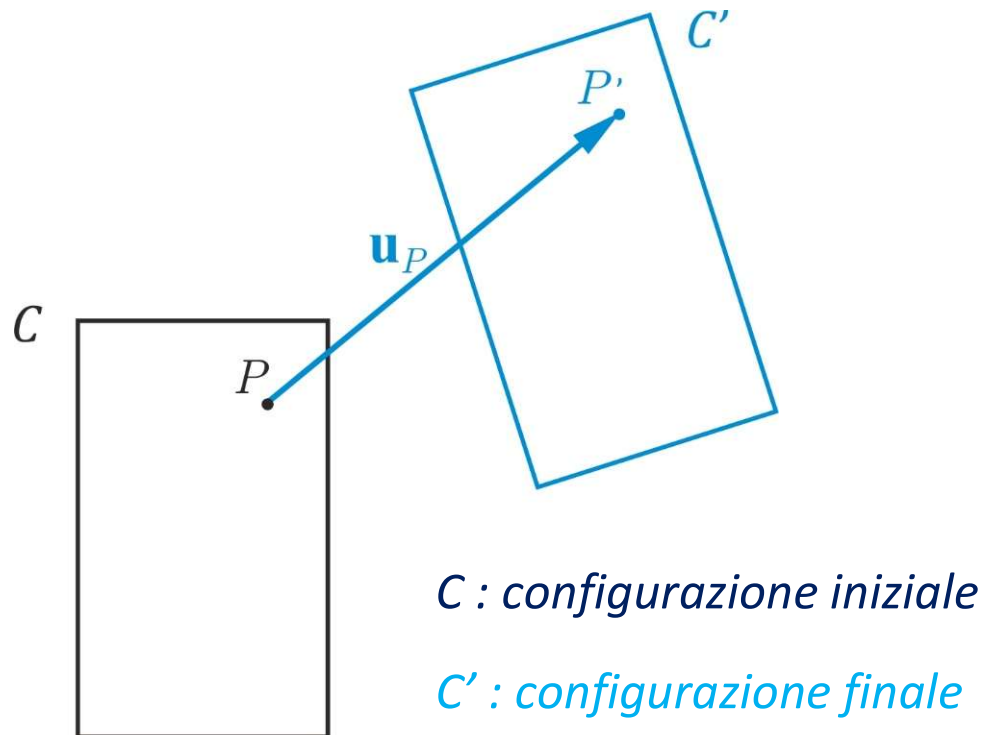
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

**Obiettivi:** Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da  $C$  a  $C'$ ) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi

Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un'espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale  $\mathbf{f}(P)$  o per le sue componenti scalari  $f_u(x, y, z), f_v(x, y, z), f_w(x, y, z)$ .



*Campo di spostamenti*

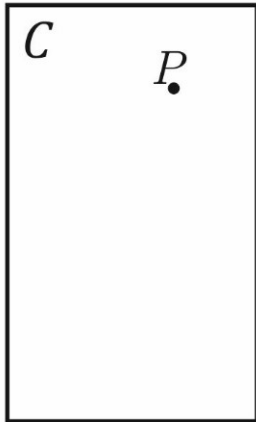
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{f}(P) \quad \forall P \in C$$

*Componenti scalari dello spostamento*

$$\begin{cases} u = f_u(x, y, z) \\ v = f_v(x, y, z) \\ w = f_w(x, y, z) \end{cases}$$



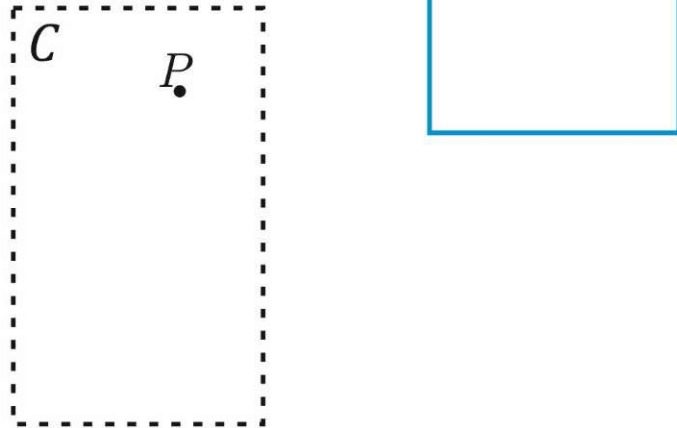
# 1. Cinematica del corpo rigido: traslazione





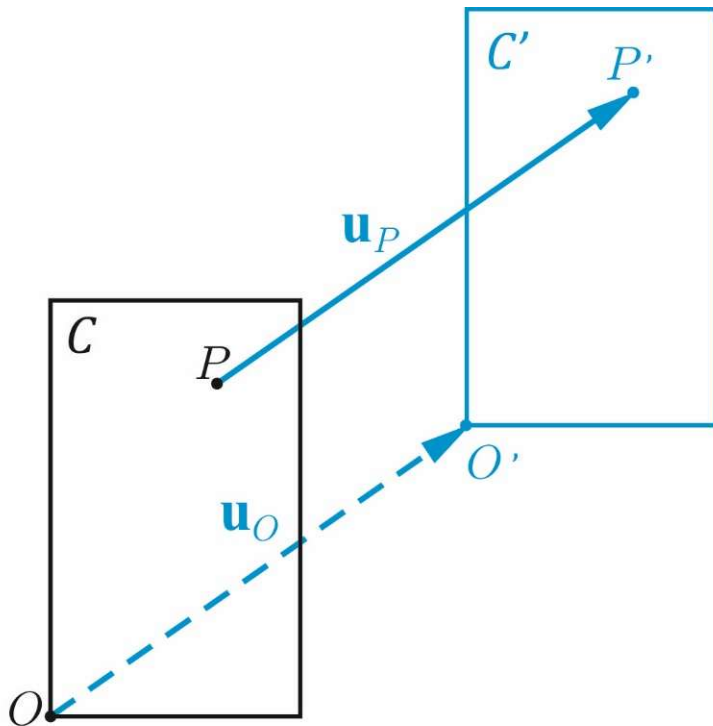
# 1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

**Traslazione rigida:** si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



# 1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

**Traslazione rigida:** si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



*Campo di spostamenti (forma vettoriale)*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O \quad \forall P \in C$$

$\mathbf{u}_O$  **Vettore traslazione**

*Campo di spostamenti (forma scalare)*

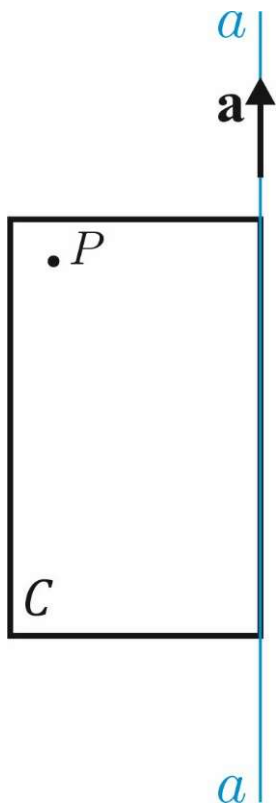
$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \\ w = w_o \end{cases}$$

*Campo di spostamenti (piano xy)*

$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \end{cases}$$



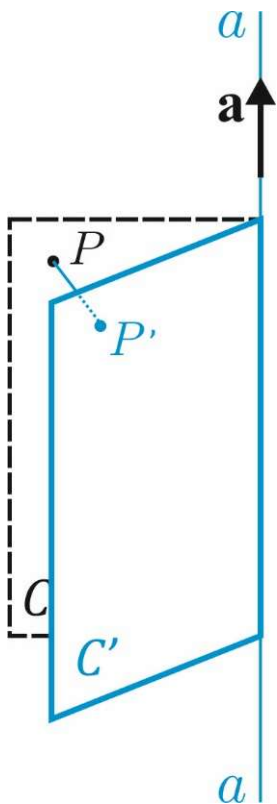
# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione





# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

**Rotazione rigida:** si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con  $a$ ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con  $\mathbf{a}$  il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse  $a$ .

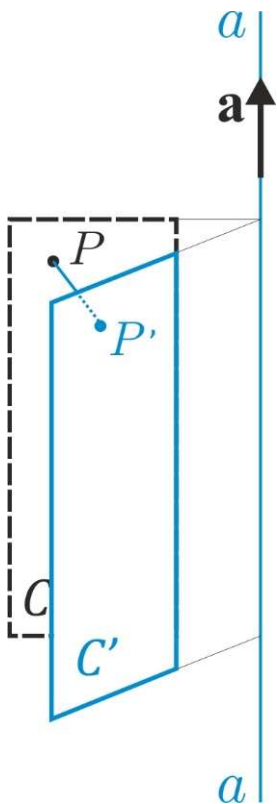


$a$ : *asse di rotazione*



# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

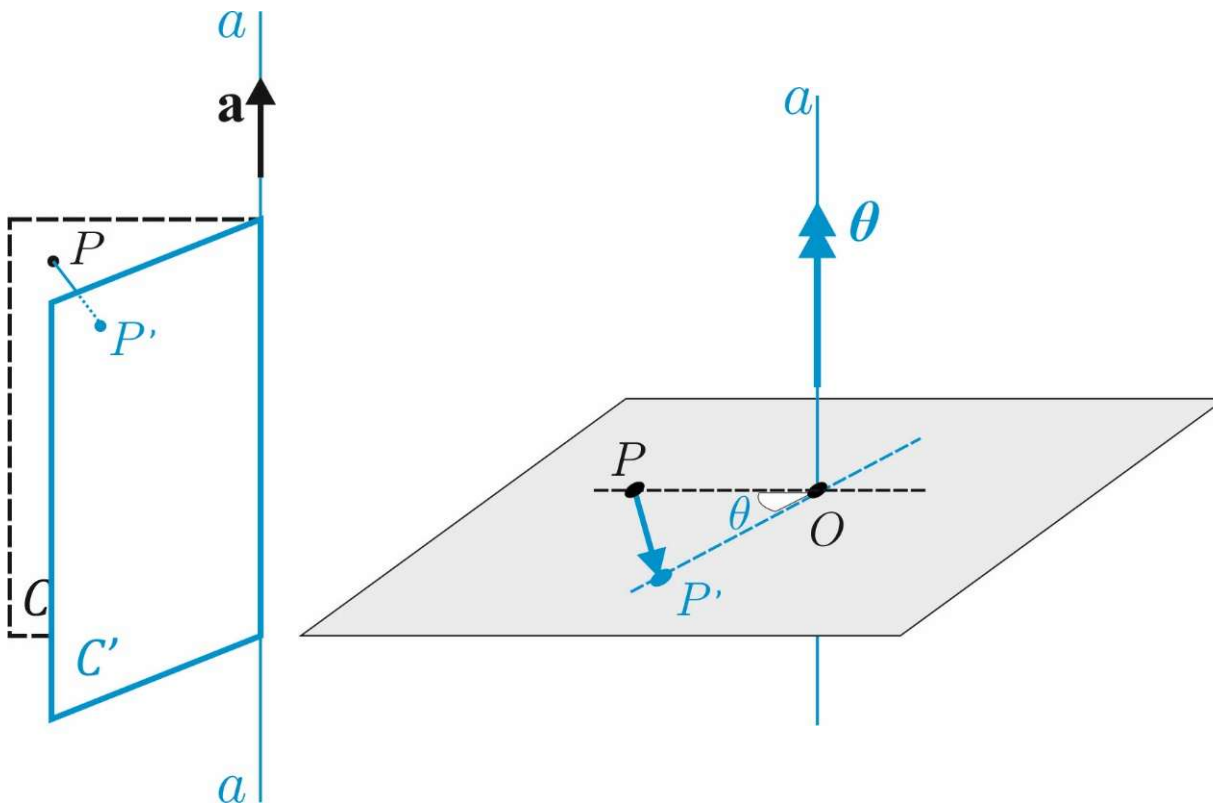
**Rotazione rigida:** si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con  $a$ ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con  $\mathbf{a}$  il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse  $a$ .



$a$ : asse di rotazione non appartenente al corpo rigido

# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

**Rotazione rigida:** si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con  $a$ ; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con  $\mathbf{a}$  il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse  $a$ .



$a$ : asse di rotazione

$O$ : centro di rotazione

Vettore di rotazione (adimensionale)

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

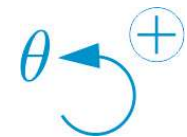
Componenti cartesiane

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k}$$

Se l'asse di rotazione coincide con l'asse  $z$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k} \quad \theta_x = \theta_y = 0 \quad \theta_z = \theta$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$$

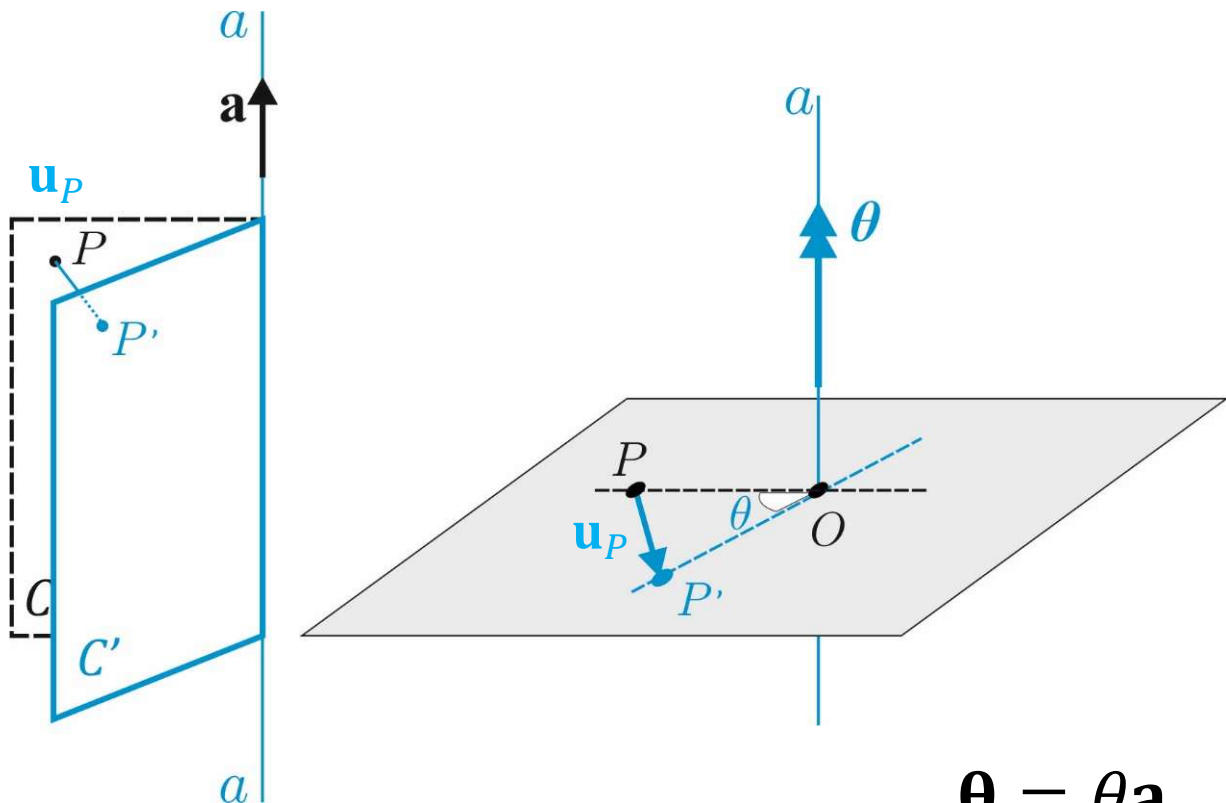


Unità di misura: rad

# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

**Rotazione rigida:** Espressione del campo di spostamenti  $\mathbf{u}_P$

$$\mathbf{u}_P = (\cos \theta - 1)\mathbf{OP} + \sin \theta \mathbf{a} \times \mathbf{OP} \quad \forall P \in C$$



Piccole rotazioni ( $\theta \rightarrow 0$ )

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1 \quad \cos \theta \cong 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \sin \theta \cong \theta$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

$a$ : asse di rotazione

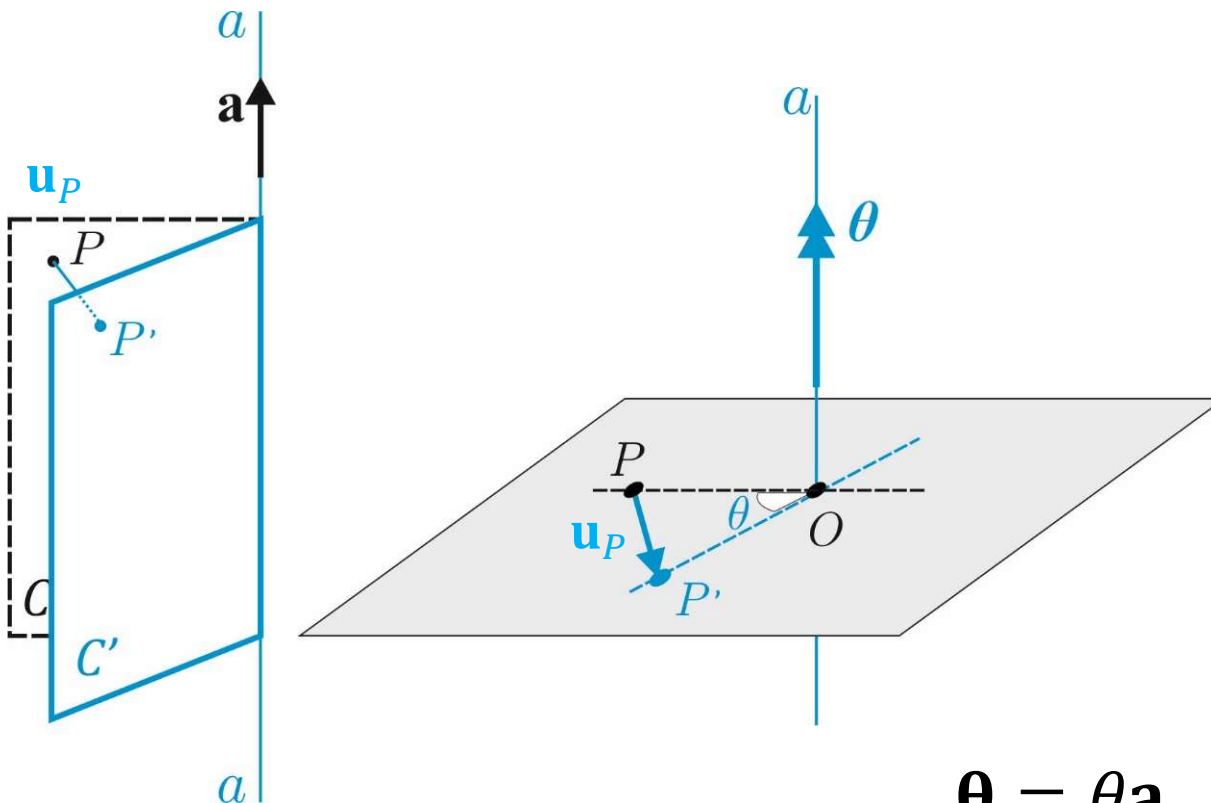
$O$ : centro di rotazione

# 1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

**Rotazione rigida:** Espressione del campo di spostamenti  $\mathbf{u}_P$  se  $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1 \text{ rad}$

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

$$\forall P \in C$$



$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$ : asse di rotazione

O: centro di rotazione

# 1. Cinematica del corpo rigido: piccoli spostamenti

## IPOTESI DEI 'PICCOLI' SPOSTAMENTI

**1.**

$$\forall P \in C, |\mathbf{u}_P| \ll \ell$$

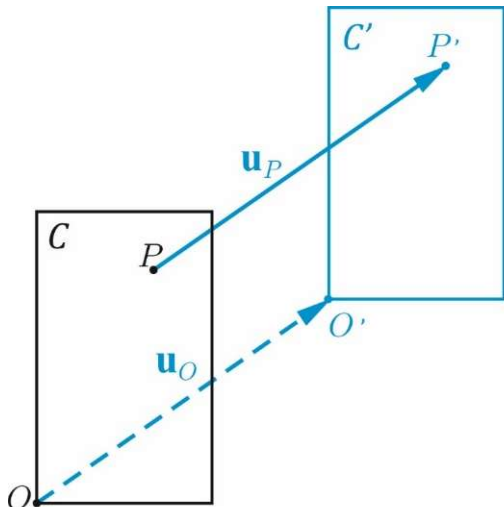
$\ell$  dimensione caratteristica del corpo

**2.**

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1 \text{ rad}$$

## Traslazione infinitesima

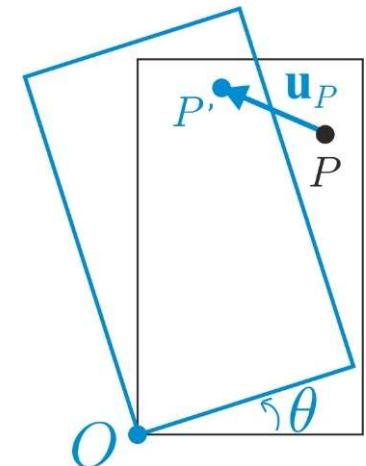
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$



(NB. D'ora in poi per chiarezza, nelle figure non si rispettano le ipotesi dei piccoli spostamenti)

## Rotazione infinitesima

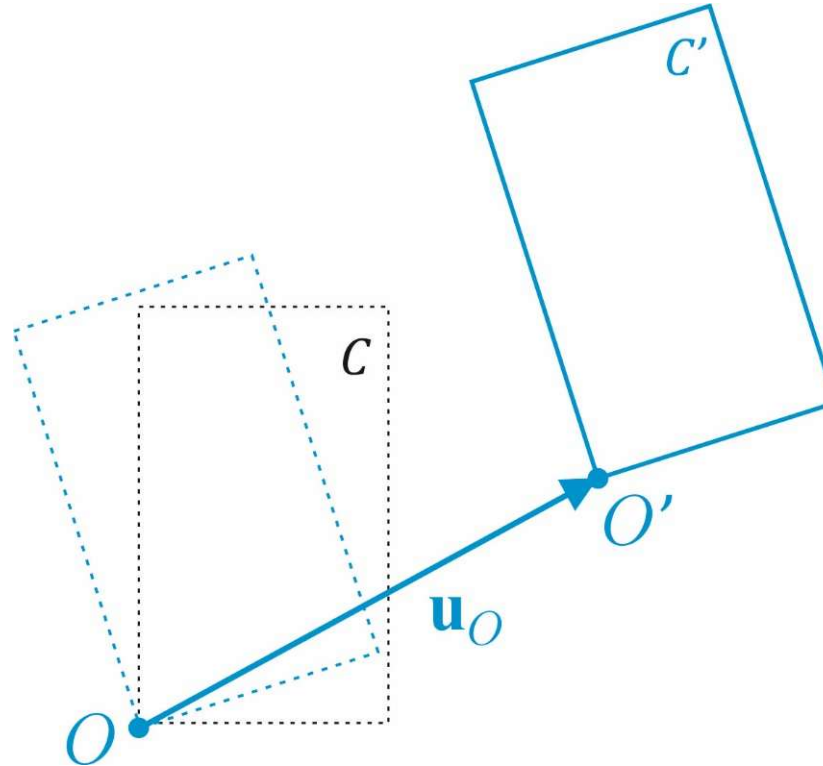
$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$





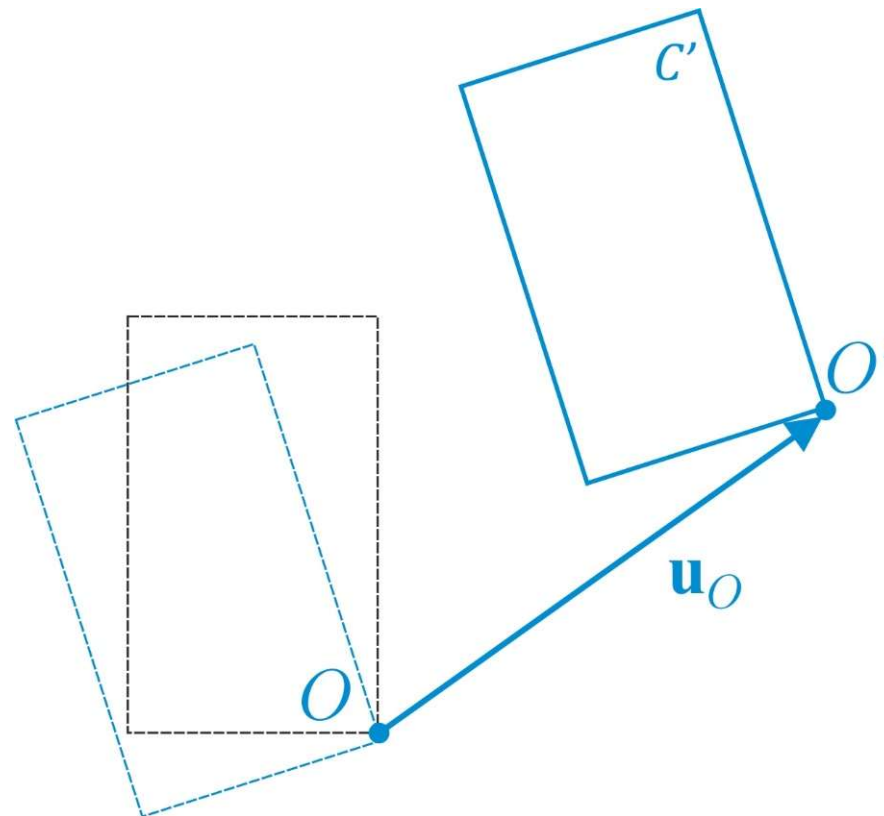
# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

## Spostamento rigido piano generico.



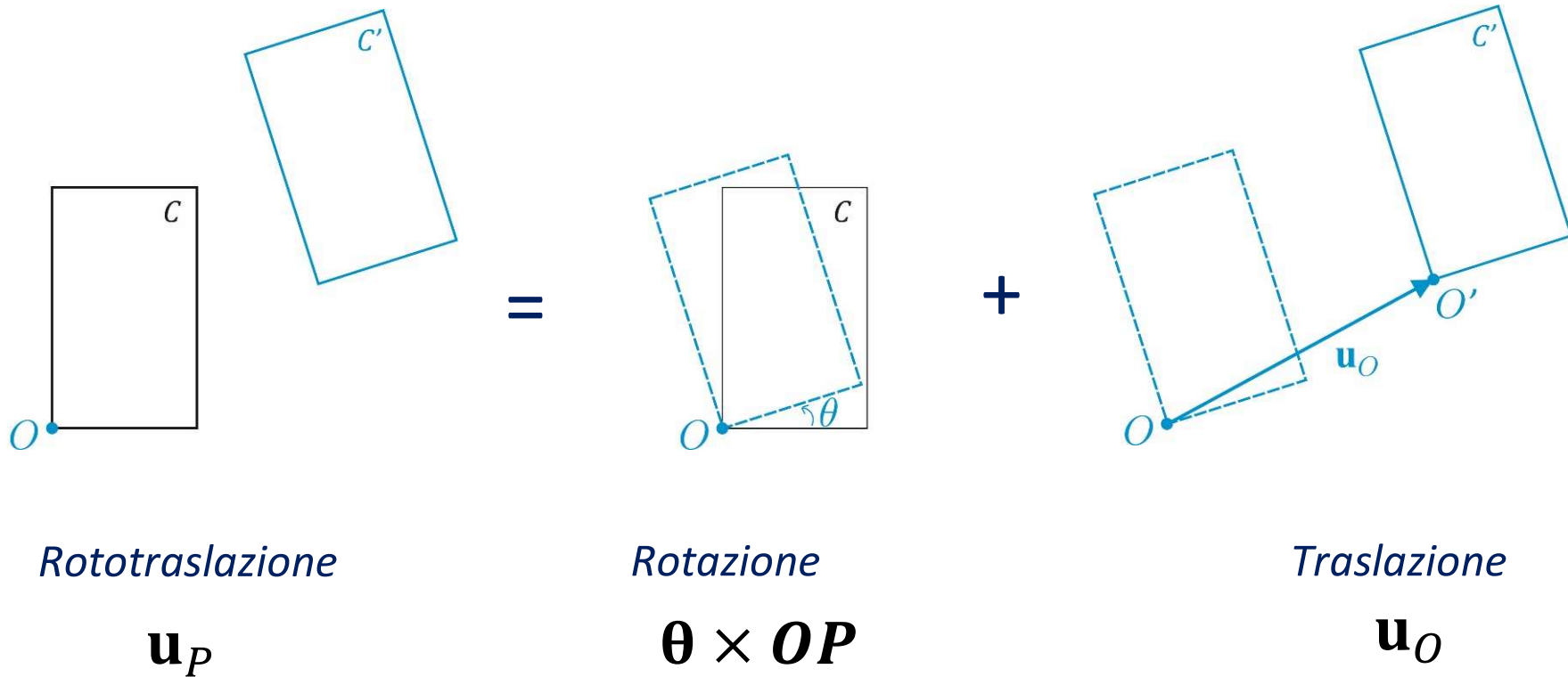
# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Spostamento rigido piano generico (scelta alternativa del punto  $O$ ).



# 1. Cinematica del corpo rigido: rototraslazione

**Spostamento rigido piano generico.** Scelto un punto arbitrario  $O$  del corpo, un generico spostamento rigido può essere pensato come la composizione di una rotazione e di una traslazione rigida. Precisamente: a) una rotazione intorno ad  $O$  di opportuna ampiezza  $\theta$ ; b) una traslazione di vettore  $\mathbf{u}_O$ . Tale spostamento è chiamato **rototraslazione**.

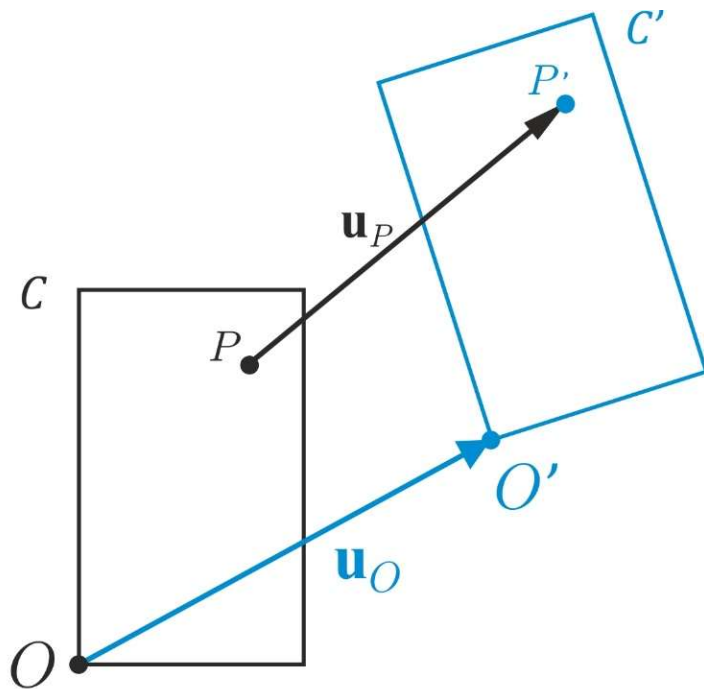


*$O$ : polo di riduzione degli spostamenti*

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$



$\mathbf{u}_P$  Vettore spostamento del generico punto  $P \in C$

$O$  Polo di riduzione degli spostamenti (scelto arbitrariamente)

$\mathbf{u}_O$  Vettore spostamento del polo  $O$

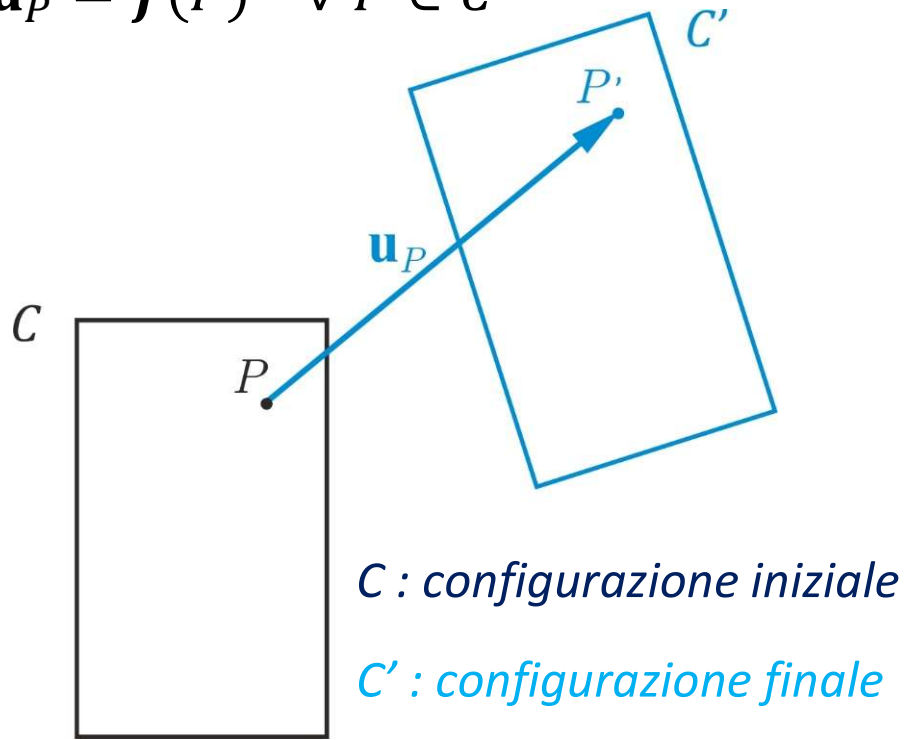
$\boldsymbol{\theta}$  Vettore rotazione intorno a  $O$

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## Importanza e utilità della FGSR

**Obiettivi:** Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da  $C$  a  $C'$ ) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi. Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un'espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale  $f(P)$  o per le sue componenti scalari  $f_u(x, y, z), f_v(x, y, z), f_w(x, y, z)$ .

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{f}(P) \quad \forall P \in C$$



La FGSR risponde all'obiettivo di esplicitare la funzione  $f(P)$ , nell'ipotesi dei 'piccoli spostamenti'.

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

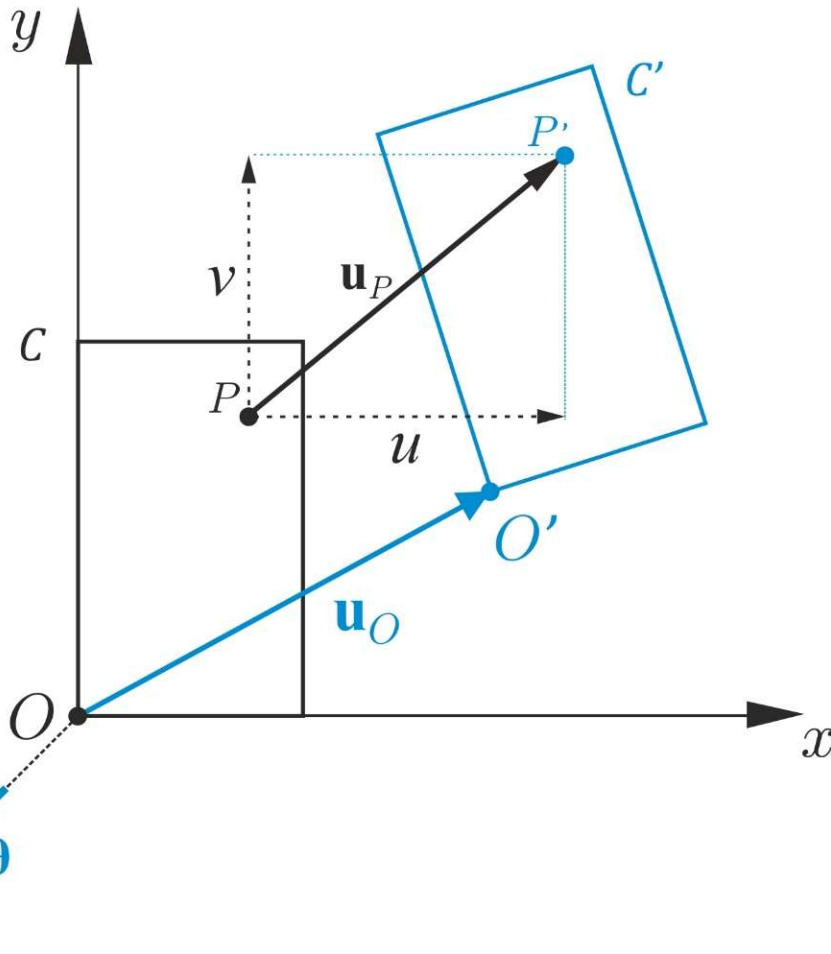
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo  $O$ , si ha:

$$O \equiv (0,0,0) \quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0) \quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$$

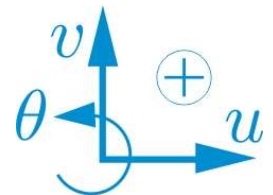
$$P \equiv (x, y, 0) \quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0) \quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



Componenti scalari rispetto all'asse  $x$

$$u = u_0 - \theta y$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

**FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)***

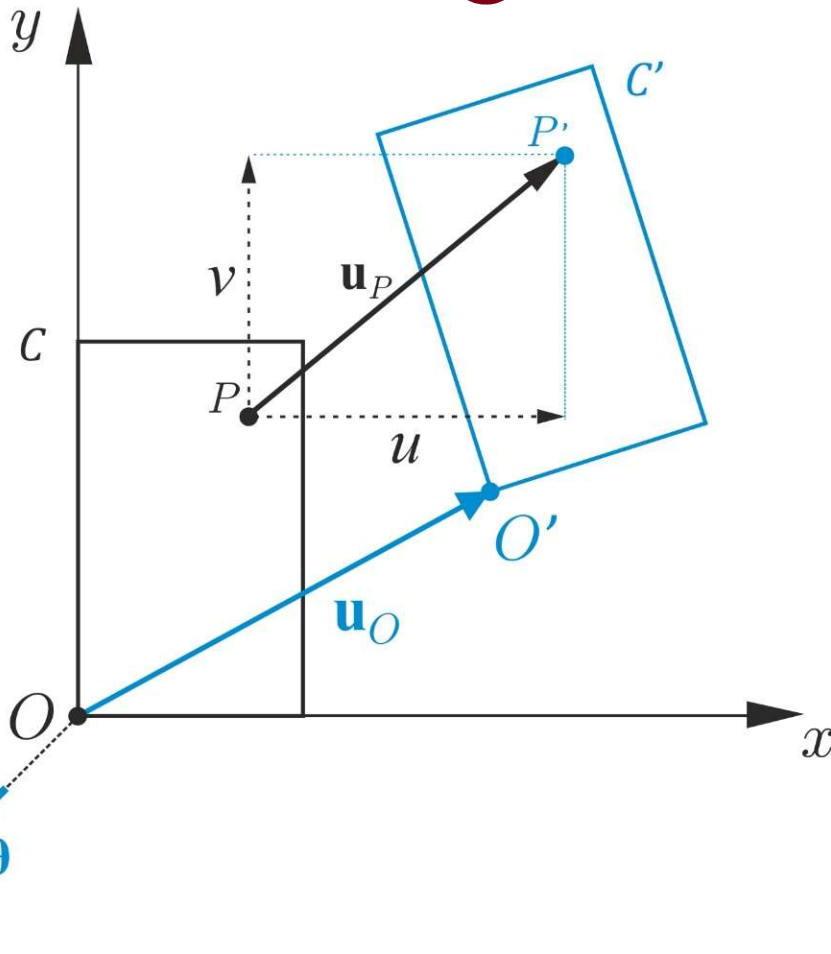
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo  $O$ , si ha:

$$O \equiv (0,0,0) \quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0) \quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$$

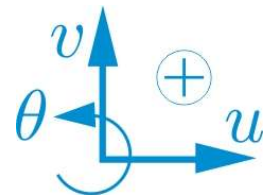
$$P \equiv (x, y, 0) \quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0) \quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



*Componenti scalari rispetto all'asse y*

$$v = v_0 + \theta x$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

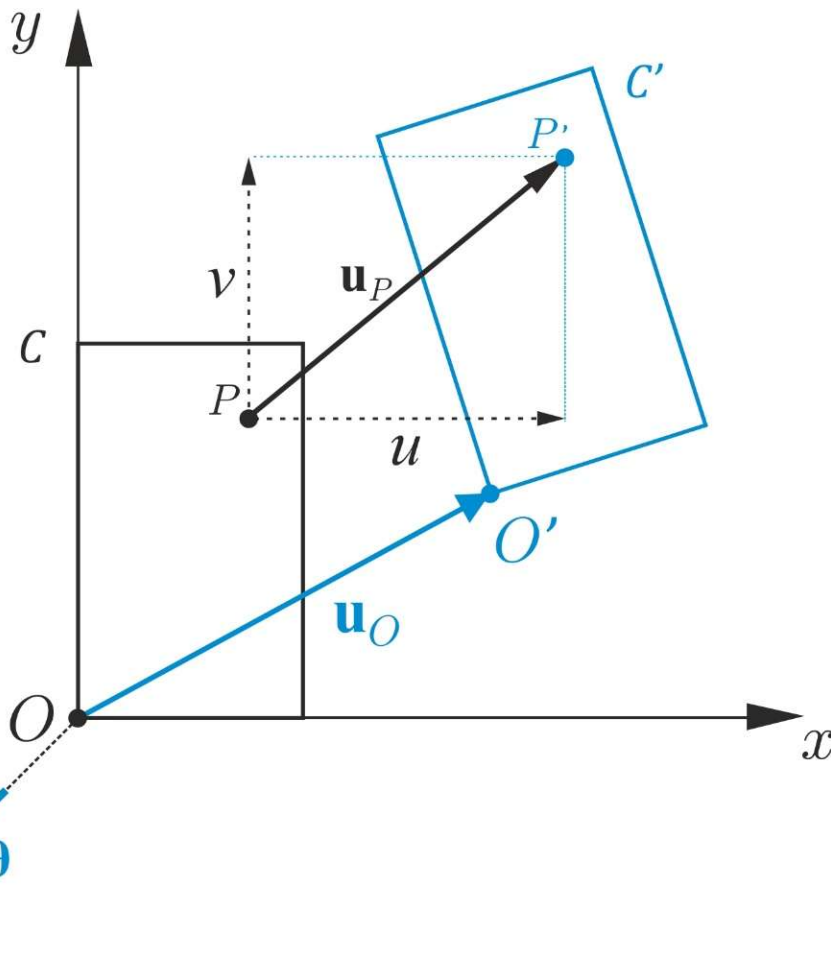
**FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)***

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo  $O$ , si ha:

$$\begin{aligned} O &\equiv (0,0,0) & \mathbf{u}_P &\equiv (u, v, 0) & \boldsymbol{\theta} &\equiv (0,0, \theta) \\ P &\equiv (x, y, 0) & \mathbf{u}_O &\equiv (u_0, v_0, 0) & \mathbf{OP} &\equiv (x, y, 0) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



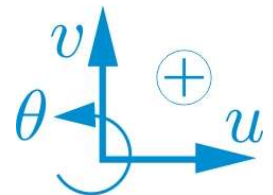
*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

*Parametri lagrangiani dello spostamento*

$$u_0, v_0, \theta$$





# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & x \\ & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{array}{cc} x & y \\ \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x} \end{array}$$

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

*Tensore della rotazione rigida  
(emisimmetrico)*

$$\boldsymbol{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_R = -\boldsymbol{\Omega}_R^T$$

*Vettore degli spostamenti generalizzati*

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

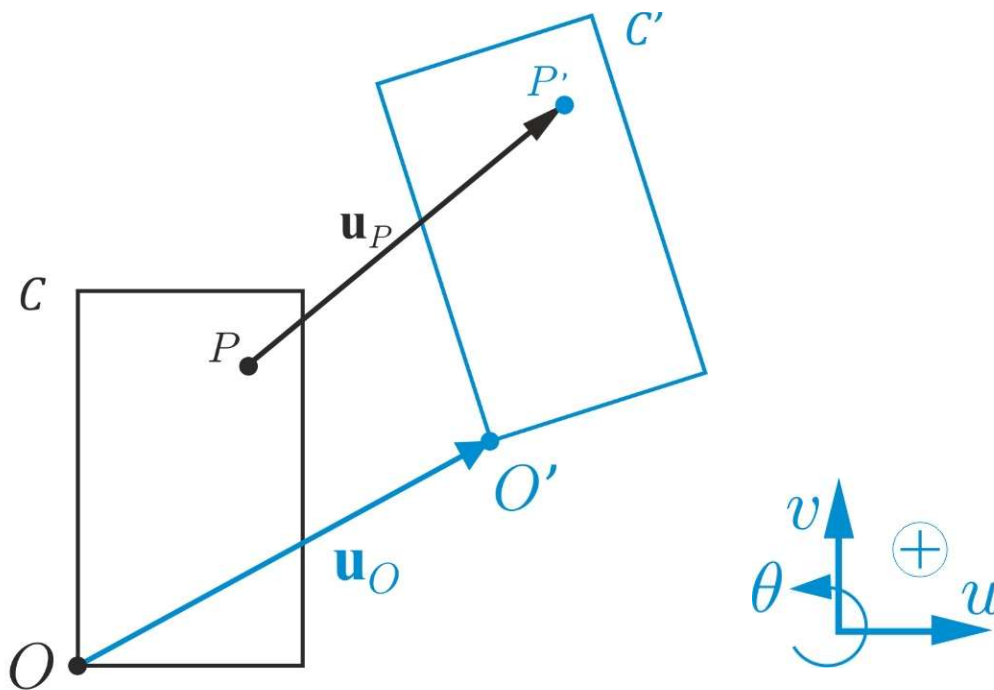
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Numero di g.d.l.:  $n = 3$

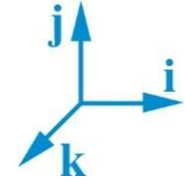


# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma scalare (3D)*

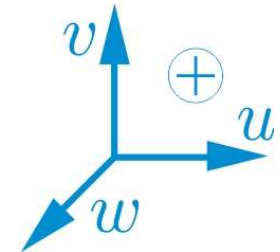
Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.



*Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR*

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\theta_y z - \theta_z y)\mathbf{i} + (\theta_z x - \theta_x z)\mathbf{j} + (\theta_x y - \theta_y x)\mathbf{k}$$

*Componenti scalari rispetto all'asse x*

$$u = u_O - \theta_z y + \theta_y z$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

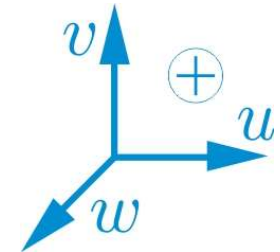
## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma scalare (3D)*

Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.

*Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR*

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\theta_y z - \theta_z y)\mathbf{i} + (\theta_z x - \theta_x z)\mathbf{j} + (\theta_x y - \theta_y x)\mathbf{k}$$

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

*Parametri lagrangiani dello spostamento*

$$u_O, v_O, w_O, \theta_x, \theta_y, \theta_z$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_0 + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_0 + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_0 - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
**u**    =    **u<sub>O</sub>**    +    **Ω<sub>R</sub>**                      **x**

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{x}$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{X}$$

*Tensore della rotazione rigida  
(emisimmetrico)*

$$\mathbf{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_R = -\mathbf{\Omega}_R^T$$

*Vettore degli spostamenti generalizzati*

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (6 \times 1)$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## OSSERVAZIONI (caso piano)

*FGSR in forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

*(origine coincidente con il polo)*

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

## Osservazione 1

*Se in uno spostamento rigido è nulla la rotazione ( $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ ), allora dalla FGSR si ha:*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$

*che è l'equazione della traslazione rigida.*

*La traslazione rigida si può dunque interpretare come uno spostamento rigido ad ampiezza di rotazione nulla.*



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## OSSERVAZIONI (caso piano)

*FGSR in forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

*(origine coincidente con il polo)*

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

## Osservazione 2

*Guardando la forma scalare Eq. (2), si osserva che il punto del piano di coordinate*

$$x = -\frac{v_0}{\theta}, \quad y = \frac{u_0}{\theta}$$

*non si sposta. Infatti sostituendo le precedenti equazioni nella Eq. (2) si ottiene  $u = 0$ ,  $v = 0$ .*

*Poiché non subisce spostamenti, tale punto è per definizione un centro di rotazione.*

*Se ne deduce che ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno al punto  $C_R$  di coordinate  $x_{CR} = -\frac{v_0}{\theta}$  e  $y_{CR} = \frac{u_0}{\theta}$ .*

*Il punto  $C_R$  è detto **centro assoluto di rotazione** o semplicemente **centro di rotazione**.*



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## OSSERVAZIONI (caso piano)

*FGSR in forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

*(origine coincidente con il polo)*

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

## Osservazione 3

*In caso di traslazione rigida, per l'osservazione 1 è  $\theta = 0$ . Quindi, per l'osservazione 2 ( $x_{CR} = -\frac{v_O}{\theta}, y_{CR} = \frac{u_O}{\theta}$ ), risulta:*

$$x_{CR} \rightarrow \infty, y_{CR} \rightarrow \infty$$

*La traslazione rigida è dunque riconducibile a una rotazione rigida ad ampiezza nulla, il cui centro di rotazione è un punto improprio del piano.*



# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## OSSERVAZIONI (caso piano)

*FGSR in forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

*FGSR in forma scalare*

$$\begin{cases} u = u_0 - \theta y \\ v = v_0 + \theta x \end{cases}$$

*(origine coincidente con il polo)*

*FGSR in forma matriciale*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

## Osservazione 4

Si ha un campo di spostamenti nullo ( $\mathbf{u}_P = \mathbf{0} \forall P \in C$ ) se e solo se  $\mathbf{u}_O = \mathbf{0}$  e  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$

cioè se e solo se sono identicamente **nulli** i parametri lagrangiani dello spostamento  $u_0, v_0, \theta$

e quindi se e solo se è **nullo** il vettore degli spostamenti generalizzati  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta \end{bmatrix}$

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

## FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

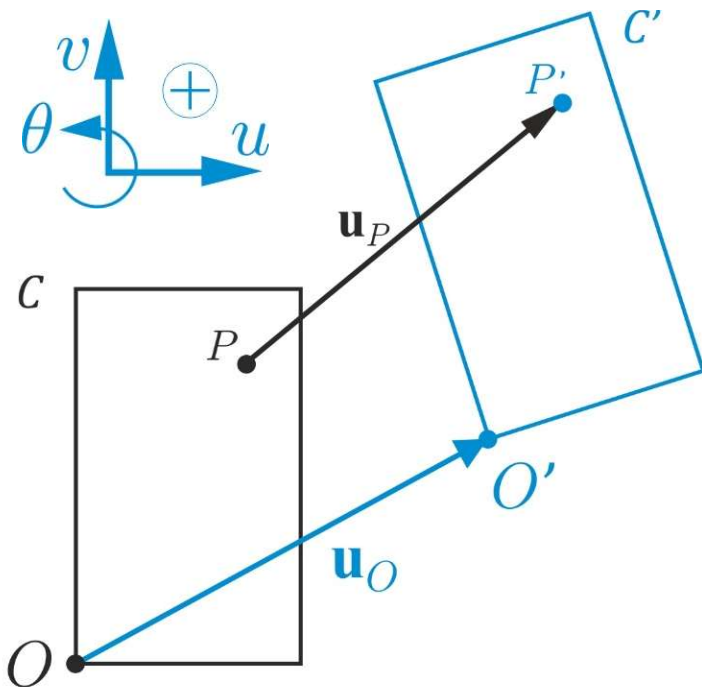
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore spostamenti generalizzati

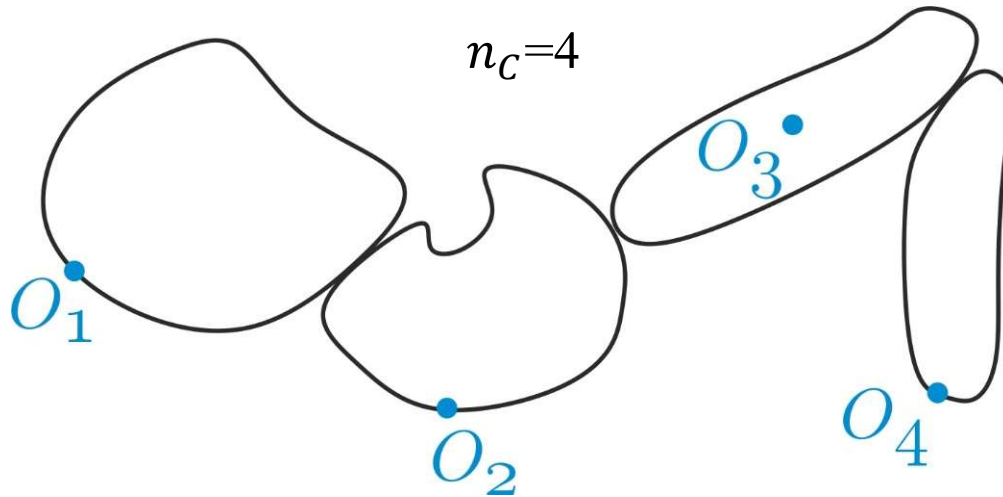
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Numero di g.d.l.:  $n = 3$

**Ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno ad un punto  $C_R$  detto centro assoluto di rotazione**

# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

**Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani.** Si estende la trattazione fatta al caso di sistemi di  $n_C$  corpi rigidi



*FGSR in forma vettoriale*

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_{O_i} + \boldsymbol{\theta}_i \times \mathbf{O}_i P$$

$$P \in C_i \quad i = 1, \dots, n_C$$

$\mathbf{O}_i$  - Polo di riduzione degli spostamenti scelto arbitrariamente (uno per ogni corpo)

*Vettore degli spostamenti generalizzati*

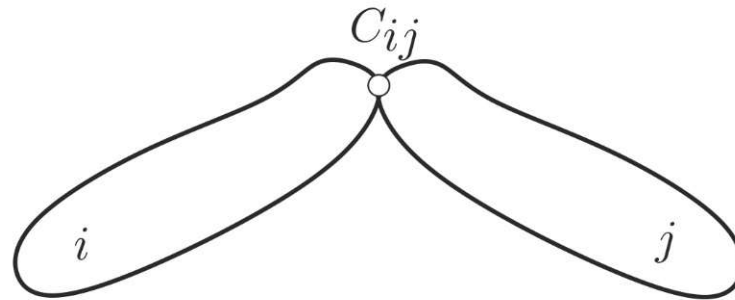
$$\mathbf{q} = [u_{O_1} \quad v_{O_1} \quad \theta_1, u_{O_2} \quad v_{O_2} \quad \theta_2, \dots, u_{O_{n_C}} \quad v_{O_{n_C}} \quad \theta_{n_C}]^T$$

Il vettore  $\mathbf{q}$  ha dimensioni  $3n_C \times 1$ , dove  $n = 3n_C$  è il numero di gradi di libertà del sistema



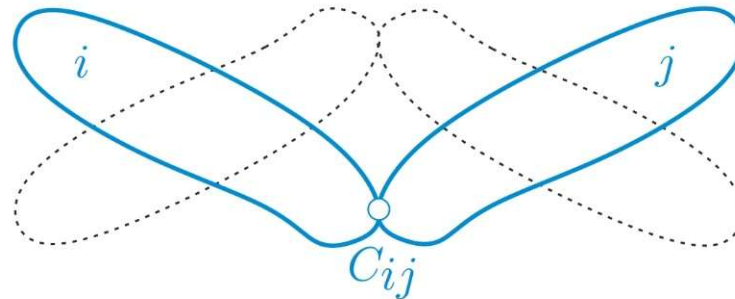
# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

**Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa.** Presi due *corpi*  $i$  e  $j$  di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo*  $C_{ij}$  il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo  $i$  vede ruotare il corpo  $j$  o viceversa.



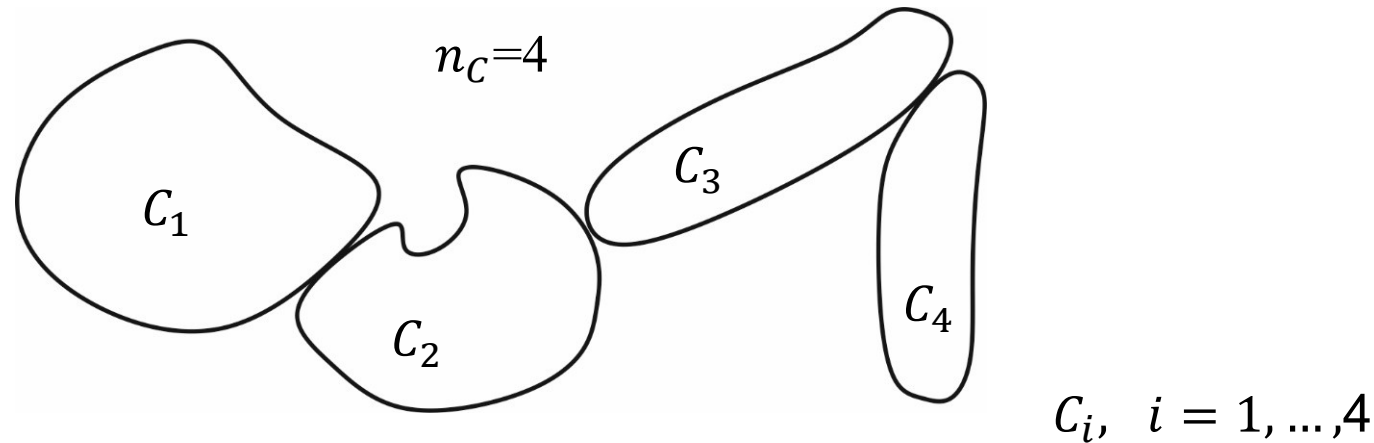
# 1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

**Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa.** Presi due *corpi*  $i$  e  $j$  di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo*  $C_{ij}$  il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo  $i$  vede ruotare il corpo  $j$  o viceversa.



# 1. Cinematica del corpo rigido: spostamenti piani

## Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani.



**Osservazione.** Se un sistema di corpi rigidi si sposta nel piano, nell'ipotesi di piccoli spostamenti allora:

- ogni corpo che non rimane fermo *ruota rigidamente* attorno ad un centro di rotazione assoluto  $C_{Ri}$  (eventualmente improprio in caso di corpo che trasla).
- Per ogni coppia di corpi  $i$  e  $j$  esiste un *centro relativo*  $C_{ij}$  definito come sopra.