Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

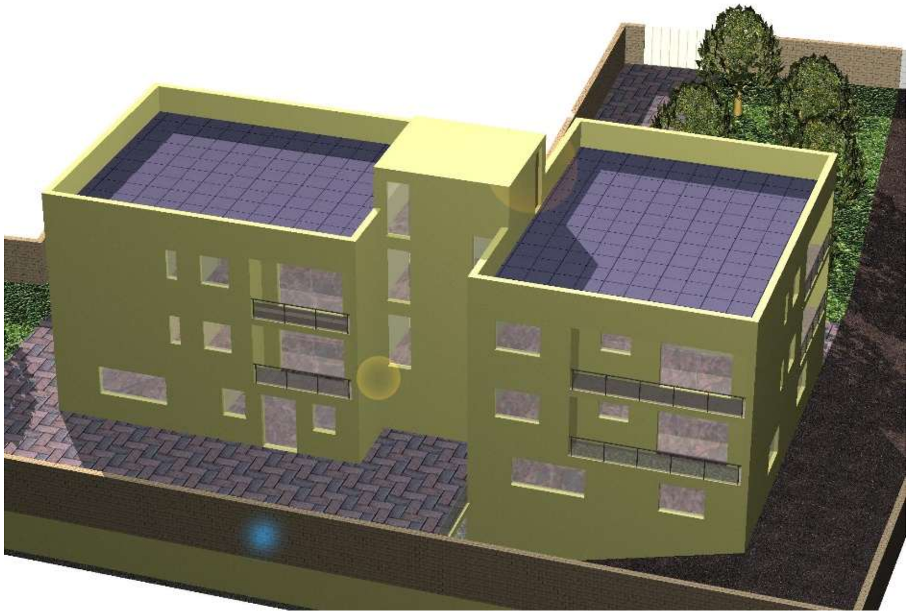
Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

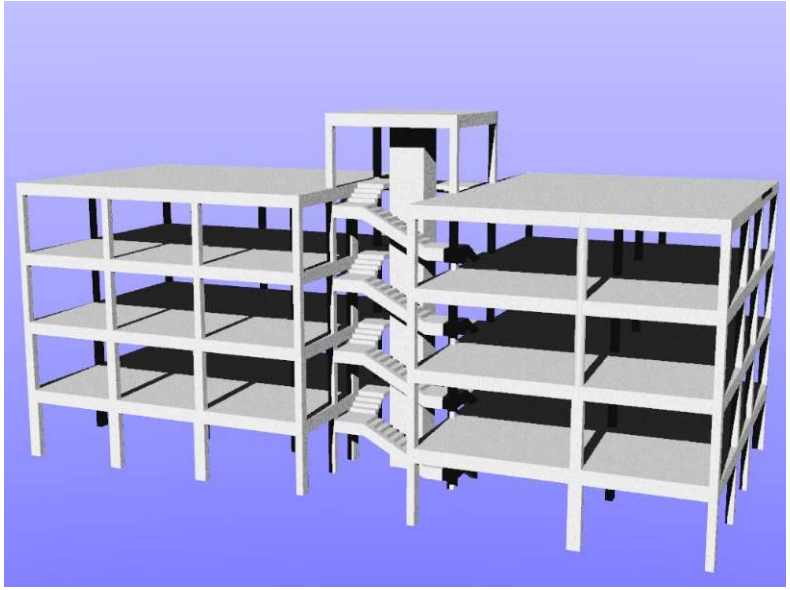
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Contenuti del corso

Ci occupiamo della struttura portante delle costruzioni. La struttura è quella parte della costruzione che ha la funzione di resistere alle sollecitazioni dell'ambiente esterno garantendo che la costruzione nel suo complesso sia **sicura e efficiente**



Costruzione

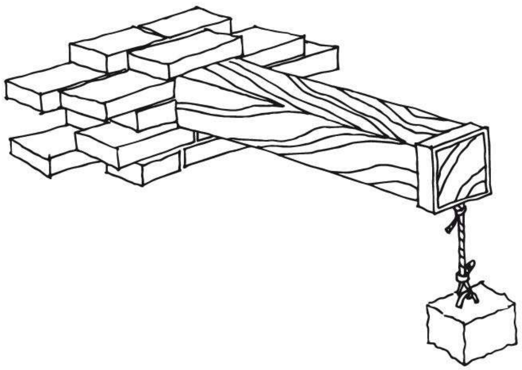


Struttura portante

2.1 Parole chiave

Risposta strutturale: comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne.

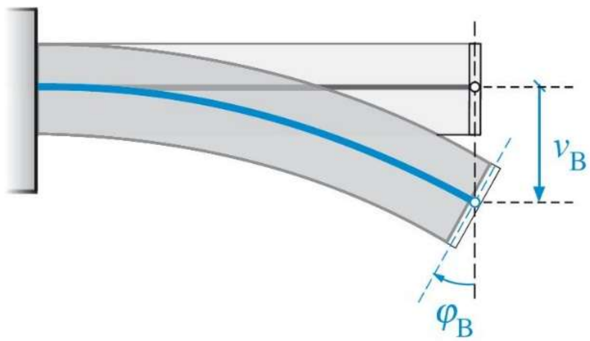
Esempio

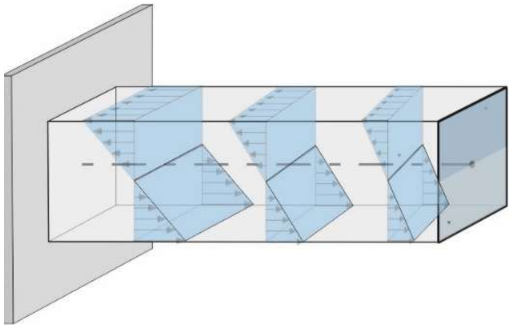


Struttura:
Trave di legno incastrata

Azioni esterne:
Carico all'estremo libero
Peso proprio trave
Forze reattive all'incastro

Risposta strutturale





Risposta cinematica:
Spostamenti, deformazioni

Risposta statica:
Forze interne, tensioni

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

Azioni Esterne → **Struttura** → **Risposta Strutturale**

- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,

etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,

etc.

INCOGNITE

- spostamenti, deformazioni
- forze interne, tensioni

2.3 Programma del corso

disponibile su www.pcasini.it/disg/sdc

Parte I – Modello di corpo rigido: travi rigide

Parte II - Travi elastiche monodimensoniali (1D)

Parte III - Continuo tridimensionale di Cauchy (3D)

Parte IV - Cilindro di Saint Venant, problema di Saint Venant

Parte V - Stabilità e resistenza strutturale

Lezione

Parte I - Il modello di corpo rigido

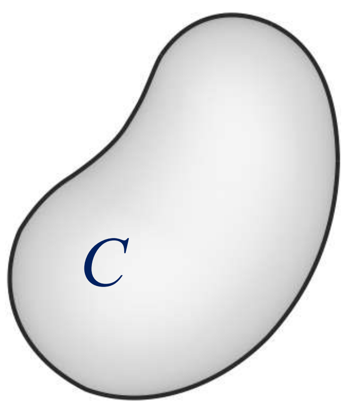
- Definizioni, notazioni, limiti del modello
- Sistemi di corpi rigidi
- Cinematica del corpo rigido
- Statica del corpo rigido

Il modello di corpo rigido

Corpo rigido: corpo ideale *esteso* e *continuo* che gode della seguente proprietà: la mutua distanza fra due suoi punti *comunque scelti* è immutabile.

Proprietà. 1. Esteso: Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione* C.

Configurazione:

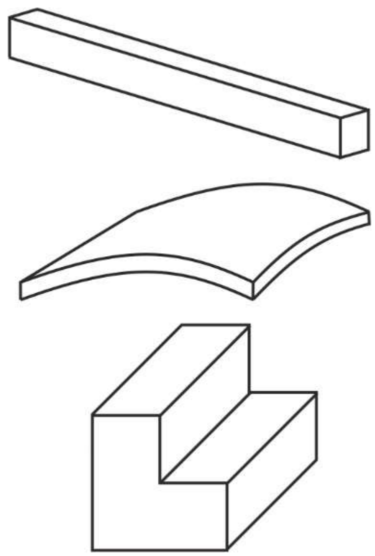


Possibili geometrie:

1D

2D

3D

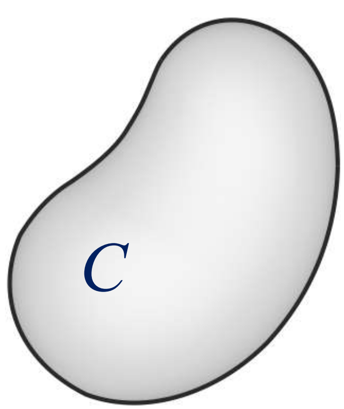


Il modello di corpo rigido

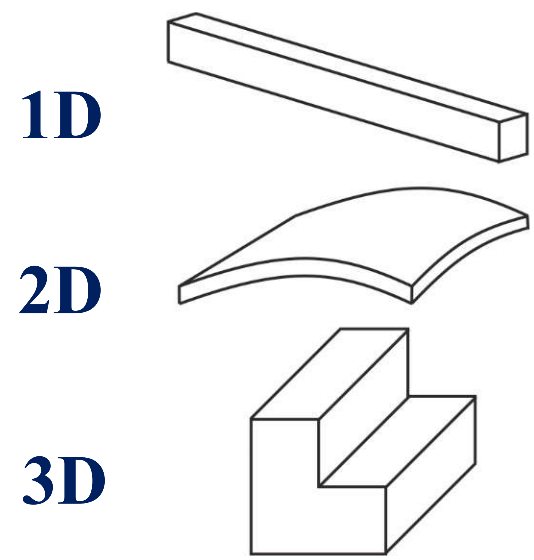
Corpo rigido: corpo ideale *esteso* e *continuo* che gode della seguente proprietà: la mutua distanza fra due suoi punti *comunque scelti* è immutabile.

Proprietà. **1. Esteso:** Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione* C.
2. Continuo: La materia costitutiva è distribuita *con continuità* (cioè senza lasciare vuoti) all'interno dello spazio occupato dal corpo: di conseguenza è possibile definire una corrispondenza biunivoca fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Indeformabile:** Il corpo (o qualsiasi sua parte) non può mai cambiare forma e dimensioni: *indeformabilità* sia a livello globale che locale.

Configurazione:



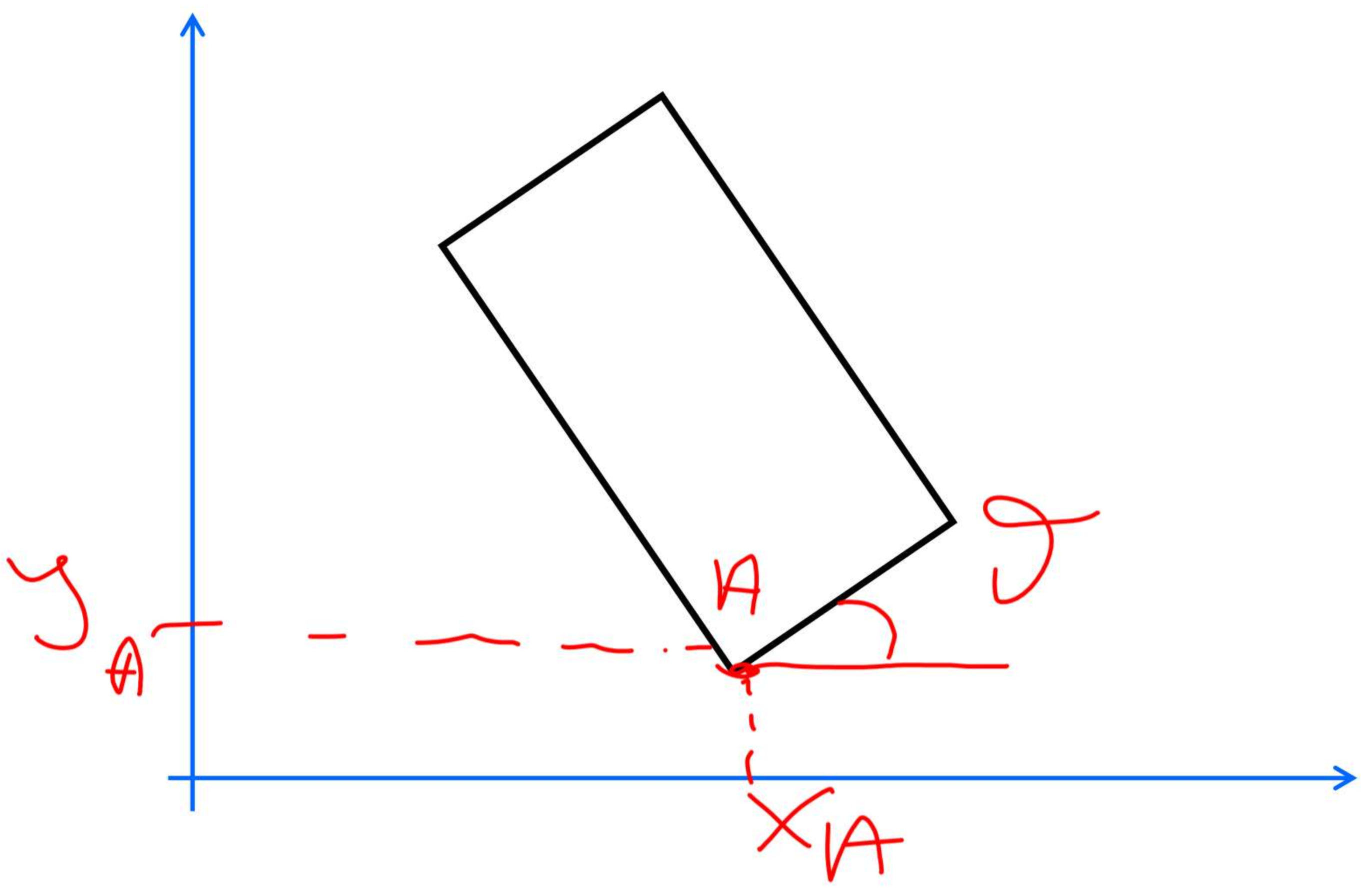
Possibili geometrie:



Il modello di corpo rigido

Numero di gradi di libertà *n*: numero di parametri indipendenti strettamente necessari a individuare in modo univoco la configurazione di un corpo rigido nello spazio. Nel piano n=3; nello spazio $n = 6$.

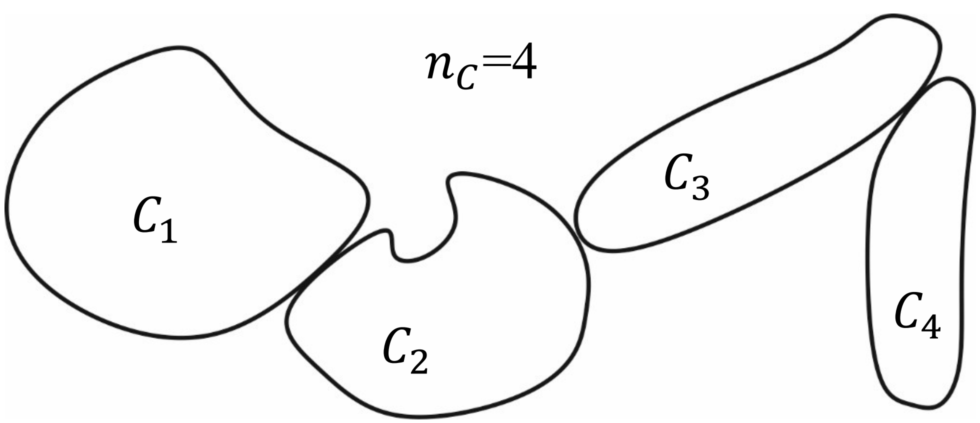
Esempio



x_A
y_A
ϑ

Sistemi di corpi rigidi

Sistemi di corpi rigidi. Le strutture sono generalmente costituite da più elementi strutturali collegati fra di loro; se si adotta per ciascun elemento il modello di corpo rigido, è utile definire la nozione di *sistema di corpi rigidi*: insieme di n_C corpi rigidi, dove n_C è il numero di corpi rigidi costituenti il sistema.
Si definisce configurazione C del sistema l'unione delle singole configurazioni C_i degli n_C corpi: $C = \bigcup C_i,\ i = 1, \dots,\ n_C$
Il numero di gradi di libertà di un sistema è $n = 3n_C$ nel piano e $n = 6n_C$ nello spazio



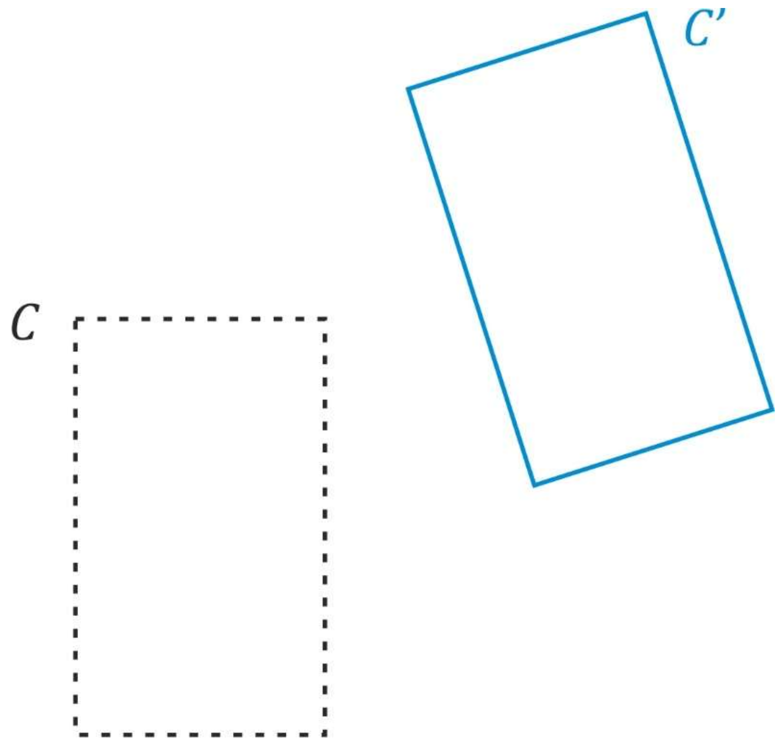
$C_i,\quad i = 1, \dots ,4$

1. Cinematica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Spostamento rigido**
  - traslazione
  - rotazione
  - rototraslazione
- **Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)**
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- **Il problema cinematico**
- **Classificazione cinematica**
- **Esercizi** (sito: E01-E03, testo: §2.7-2.8)

1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da *C* a *C'*) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



C : configurazione iniziale

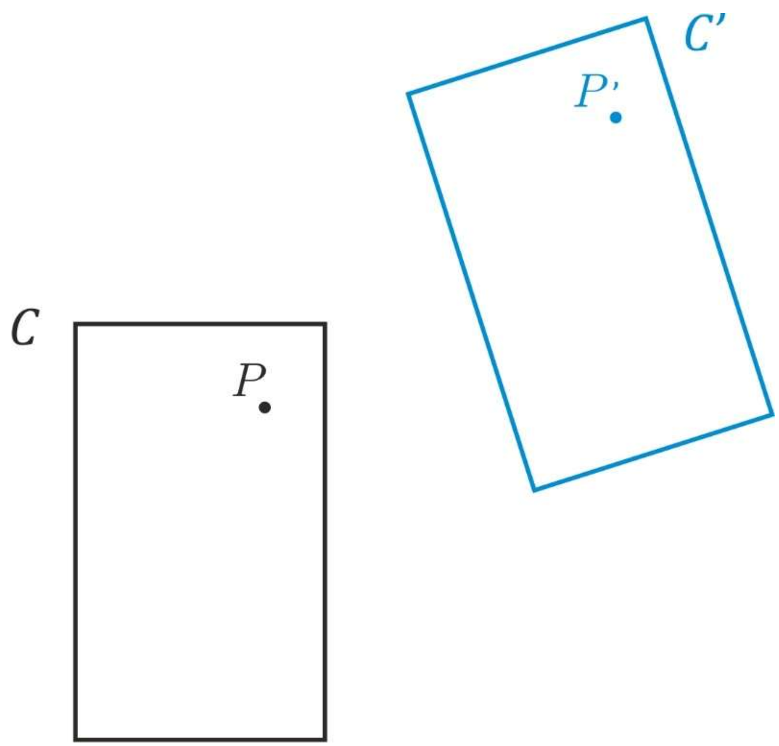
C' : configurazione finale

Trasporto f

f: C → C'

1. Cinematica del corpo rigido: obiettivi

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da *C* a *C'*) di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

Trasporto f

$f: C \rightarrow C'$

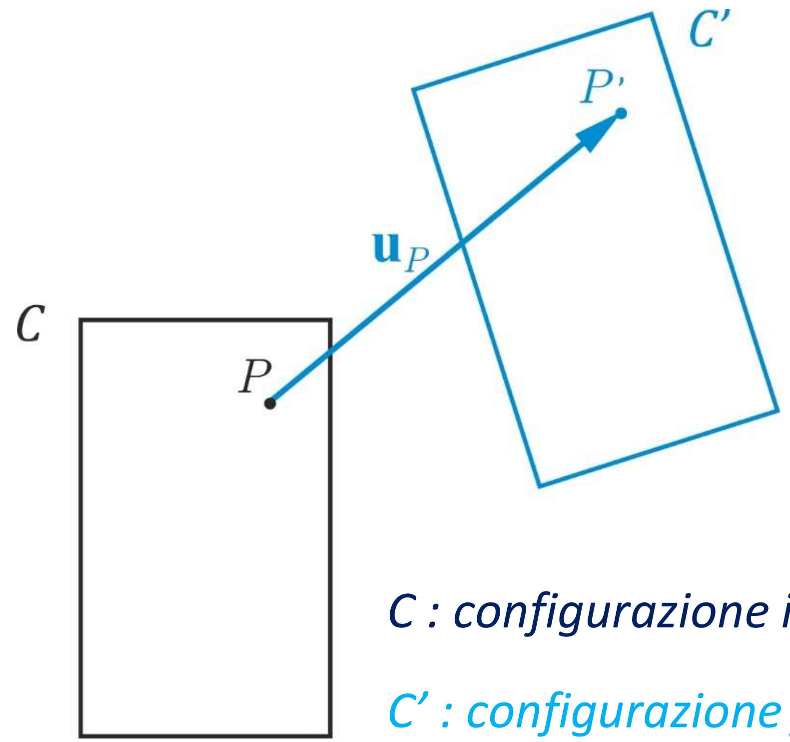
Considerato il generico punto P:

$$P \in C \ \rightarrow \ P' \in C'$$

$$P' = f(P)$$

1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Vettore spostamento. Campo di spostamenti: Assegnato un punto $P \in C$, si definisce spostamento $\mathbf{u}_P$ il vettore applicato $\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}'$. **Dimensioni fisiche [L]**. Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti del corpo caratterizza il cambiamento di configurazione da *C* a *C'* del corpo rigido



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

Vettore spostamento

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{PP}' \qquad [\mathrm{L}]$$

Campo di spostamenti

$$\mathbf{u}_P \quad \forall\, P \in C$$

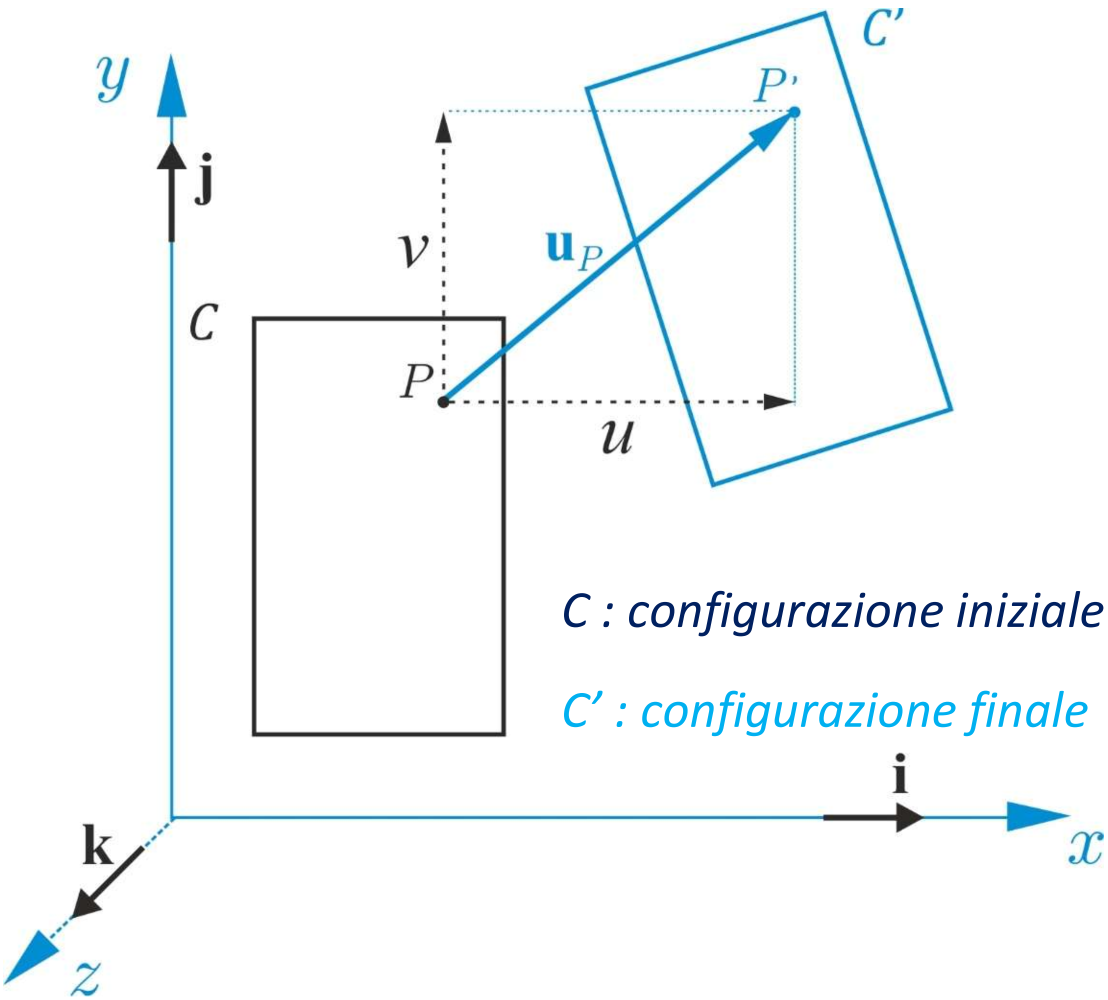
Campo di spostamenti piano

Si ha un campo di spostamenti piano (o semplicemente *spostamento piano*) quando gli spostamenti di tutti punti hanno direzione parallela ad un unico piano π.

$$\mathbf{u}_P \,//\, \pi \quad \forall\, P \in C$$

1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Componenti cartesiane del vettore spostamento



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

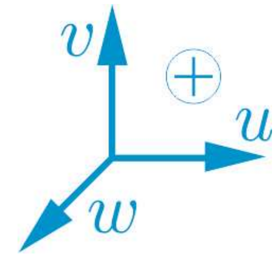
Spazio 3D

Vettore spostamento di $P \equiv (x, y, z)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

Rappresentazione matriciale

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



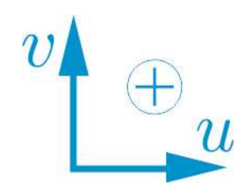
Spostamento piano

Vettore spostamento di $P \equiv (x, y)$

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Rappresentazione matriciale

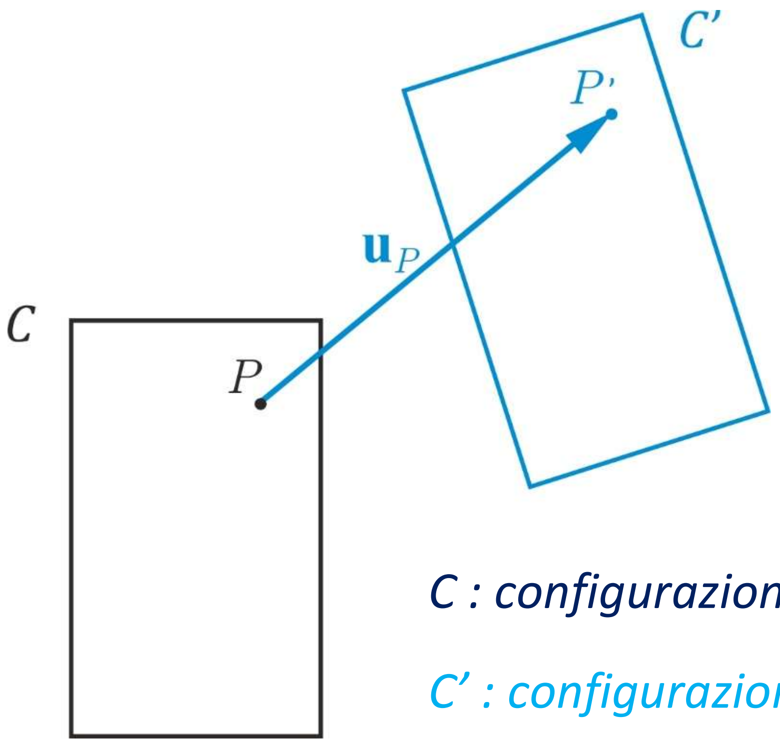
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi

Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale $\boldsymbol{f}(P)$ o per le sue componenti scalari $f_u(x,y,z), f_v(x,y,z), f_w(x,y,z)$.



Campo di spostamenti

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{f}(P) \quad \forall\, P \in C$$

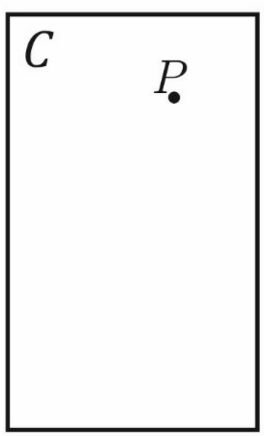
Componenti scalari dello spostamento

$$\begin{cases} u = f_u\,(x,y,z) \\ v = f_v(x,y,z) \\ w = f_w(x,y,z) \end{cases}$$

C : configurazione iniziale

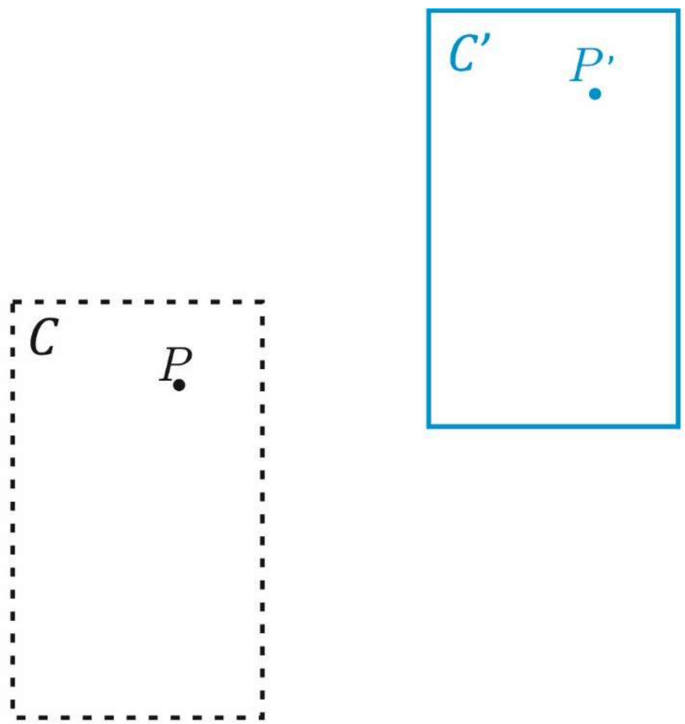
C' : configurazione finale

1. Cinematica del corpo rigido: traslazione



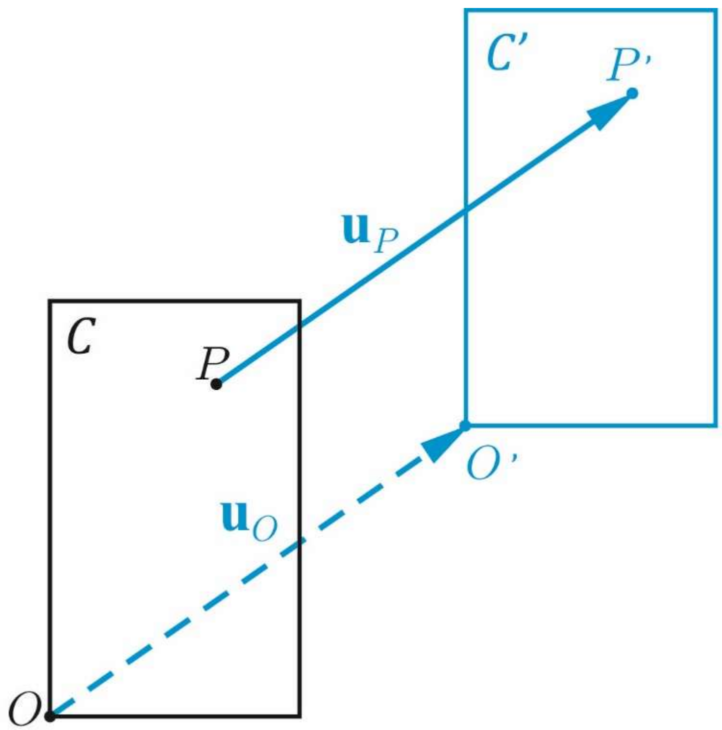
1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

Traslazione rigida: si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



1. Cinematica del corpo rigido: traslazione

Traslazione rigida: si definisce *traslazione* uno spostamento rigido per cui in ogni punto il vettore spostamento ha stessa direzione, verso e intensità. Avendo la stessa direzione tutti gli spostamenti sono paralleli ad un medesimo piano (*spostamento rigido piano*)



Campo di spostamenti (forma vettoriale)

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O \quad \forall\, P \in C$$

$\mathbf{u}_O$ **Vettore traslazione**

Campo di spostamenti (forma scalare)

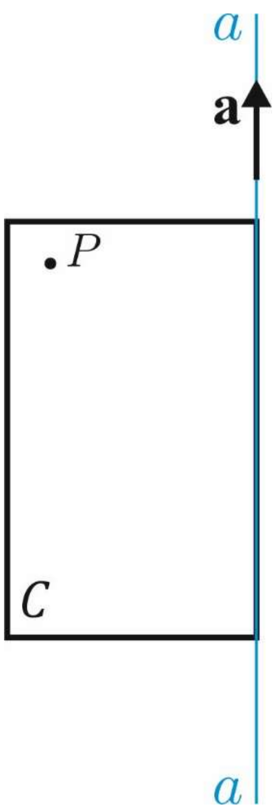
$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \\ w = w_o \end{cases}$$

Campo di spostamenti (piano xy)

$$\begin{cases} u = u_o \\ v = v_o \end{cases}$$

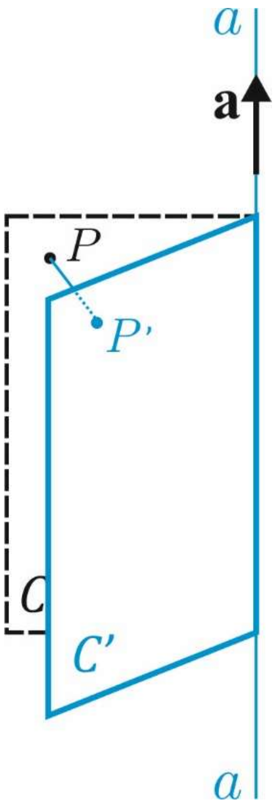
1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida:



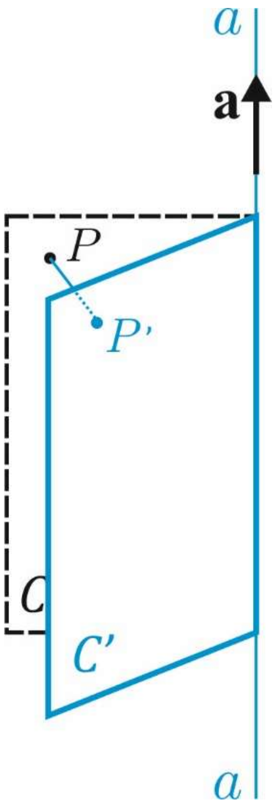
1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida:



1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

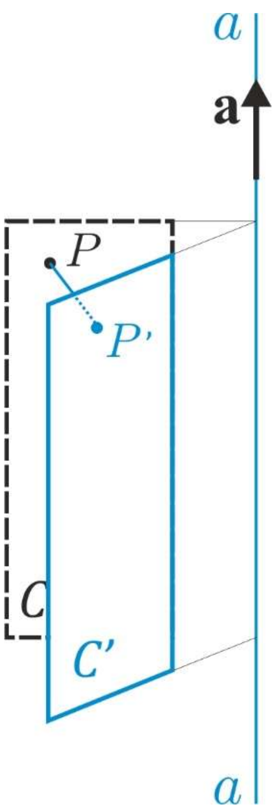
Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con *a*; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con **a** il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse *a*.



a: asse di rotazione

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

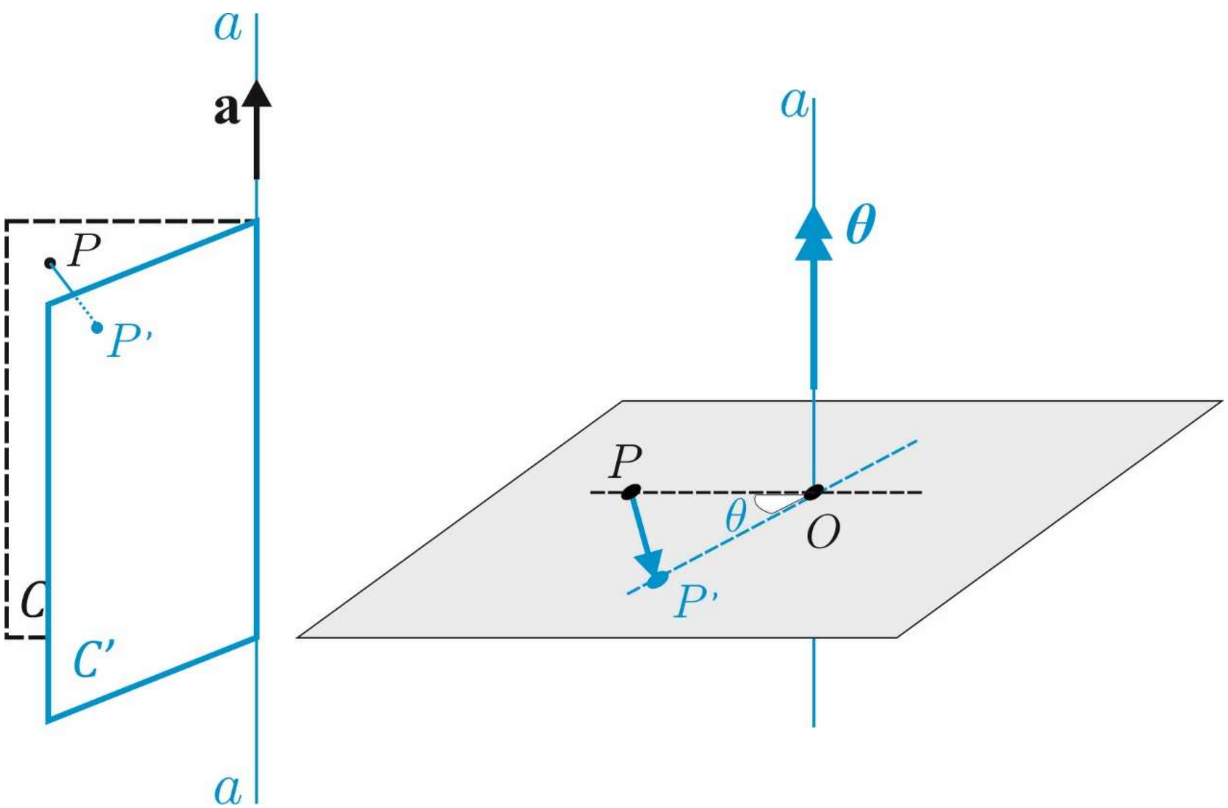
Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con *a*; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con **a** il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse *a*.



a: asse di rotazione non appartenente al corpo rigido

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: si definisce *rotazione* uno spostamento rigido per cui esiste una retta i cui punti non subiscono spostamenti: tale retta è detta *asse di rotazione* e denotata con a; fissato un verso arbitrario di percorrenza, si indica con **a** il versore dell'asse. Anche la rotazione è uno *spostamento rigido piano* poiché tutti i punti si spostano in piani perpendicolari all'asse a.



Vettore di rotazione (adimensionale)

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

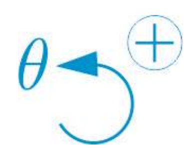
Componenti cartesiane

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x \mathbf{i} + \theta_y \mathbf{j} + \theta_z \mathbf{k}$$

Se l'asse di rotazione coincide con l'asse z:

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k} \qquad \theta_x = \theta_y = 0 \qquad \theta_z = \theta$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$$



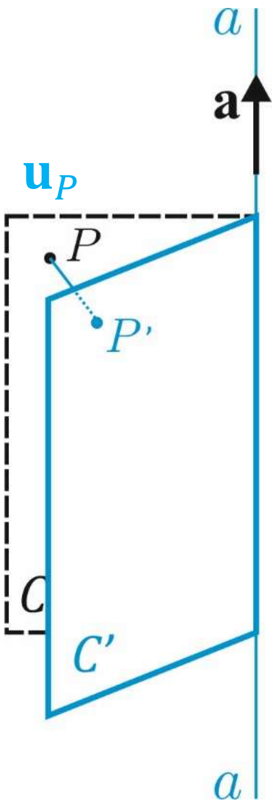
$\boxed{a\text{: asse di rotazione}}$ $\boxed{O\text{: centro di rotazione}}$

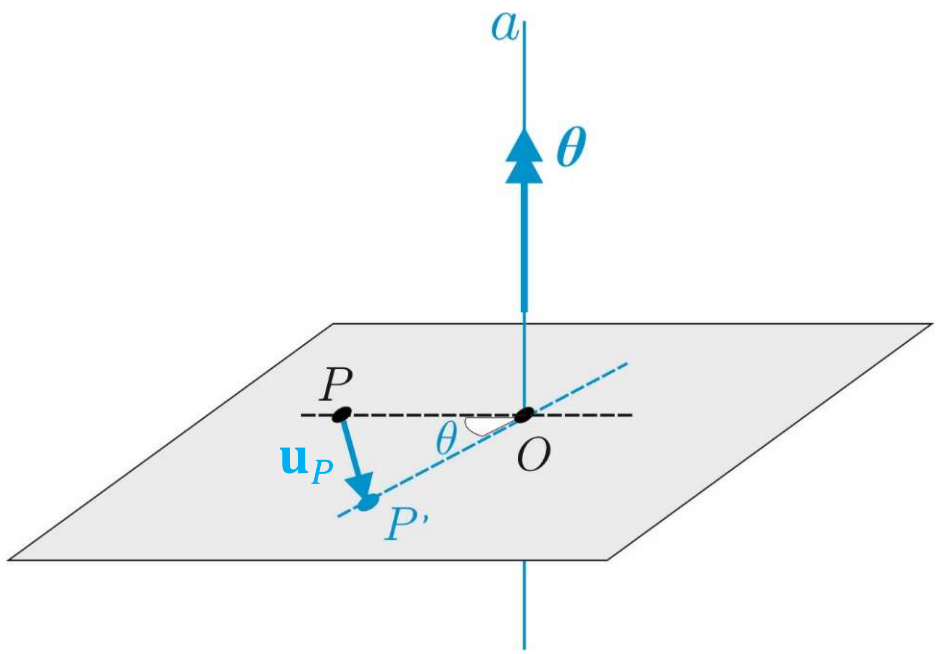
Unità di misura: rad

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: Espressione del campo di spostamenti $\mathbf{u}_P$

$$\mathbf{u}_P = (\cos\theta - 1)\mathbf{OP} + \sin\theta\,\mathbf{a}\times\mathbf{OP} \qquad \forall P \in C$$





Piccole rotazioni ($\theta \to 0$)

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 \qquad \boxed{\cos\theta \cong 1}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad \boxed{\sin\theta \cong \theta}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{a}$$

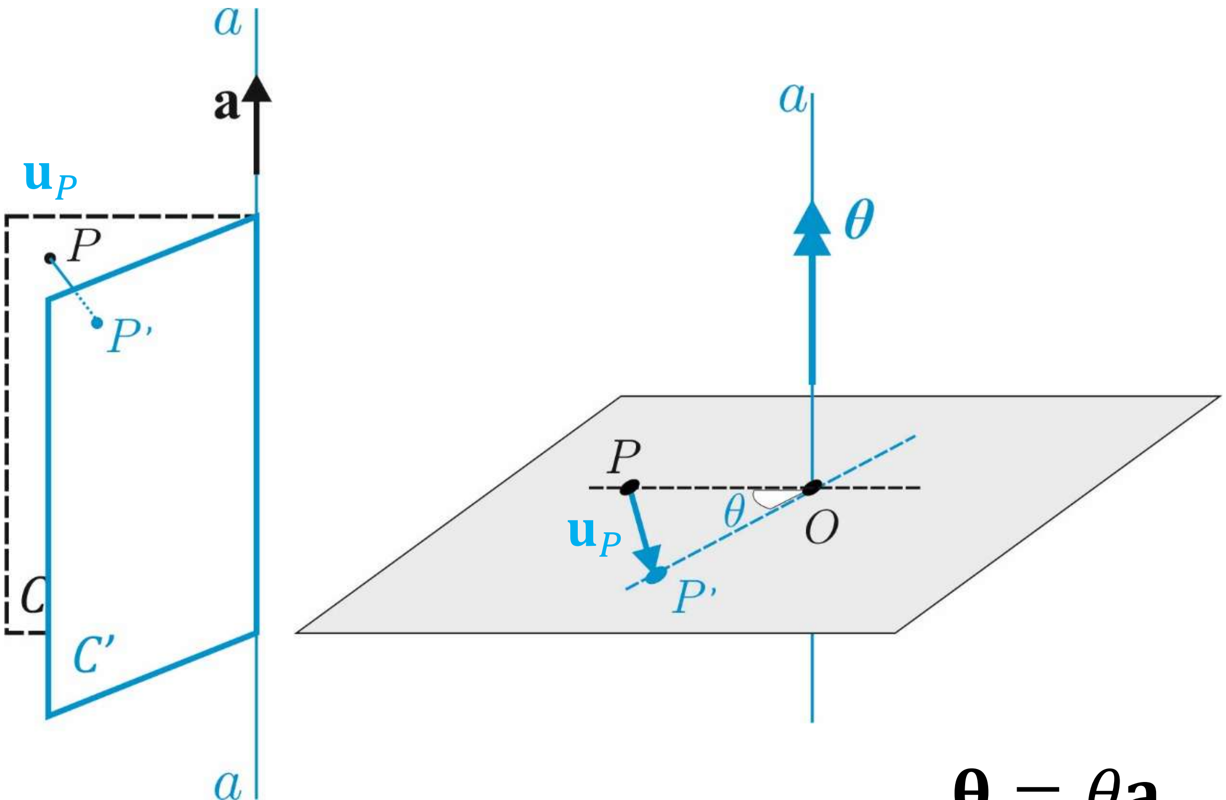
a: asse di rotazione

O: centro di rotazione

1. Cinematica del corpo rigido: rotazione

Rotazione rigida: Espressione del campo di spostamenti $\mathbf{u}_P$ se $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1\, rad$

$$\boxed{\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}} \qquad \forall P \in C$$



$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{a}$$

a: asse di rotazione

O: centro di rotazione

1. Cinematica del corpo rigido: piccoli spostamenti

IPOTESI DEI 'PICCOLI' SPOSTAMENTI

1.

$$\forall\, P \in C, |\mathbf{u_P}| \ll \ell$$

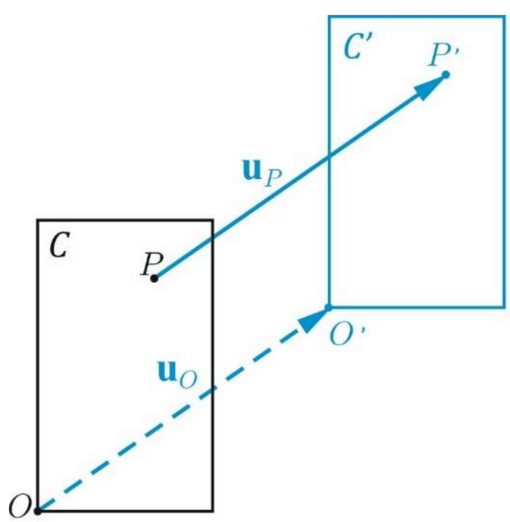
ℓ *dimensione caratteristica del corpo*

2.

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1\, rad$$

Traslazione infinitesima

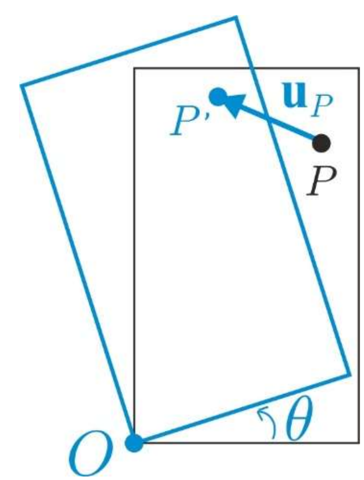
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$



(NB. D'ora in poi per chiarezza, nelle figure non si rispettano le ipotesi dei piccoli spostamenti)

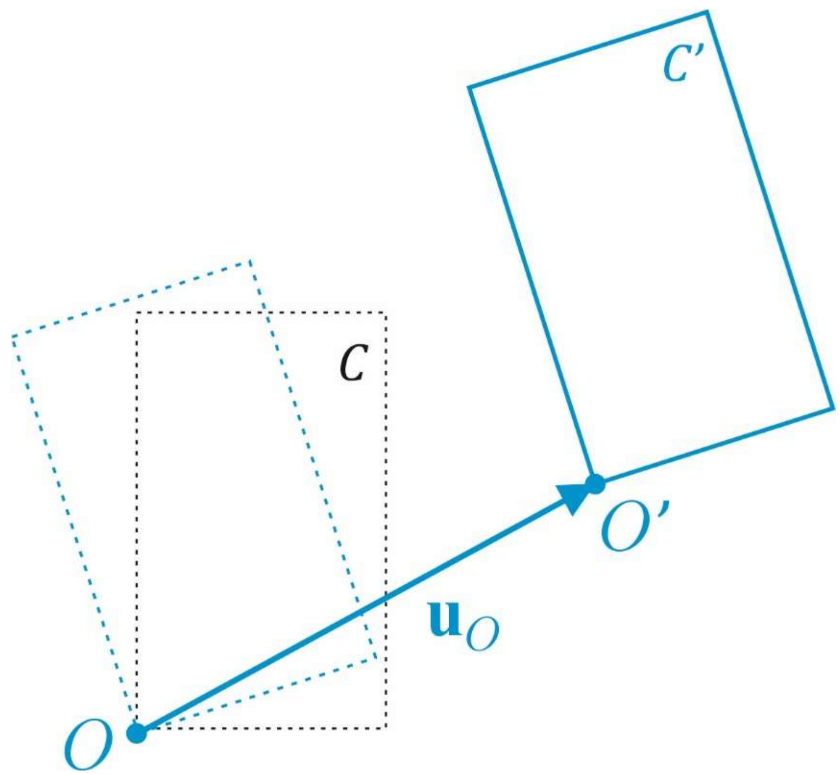
Rotazione infinitesima

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

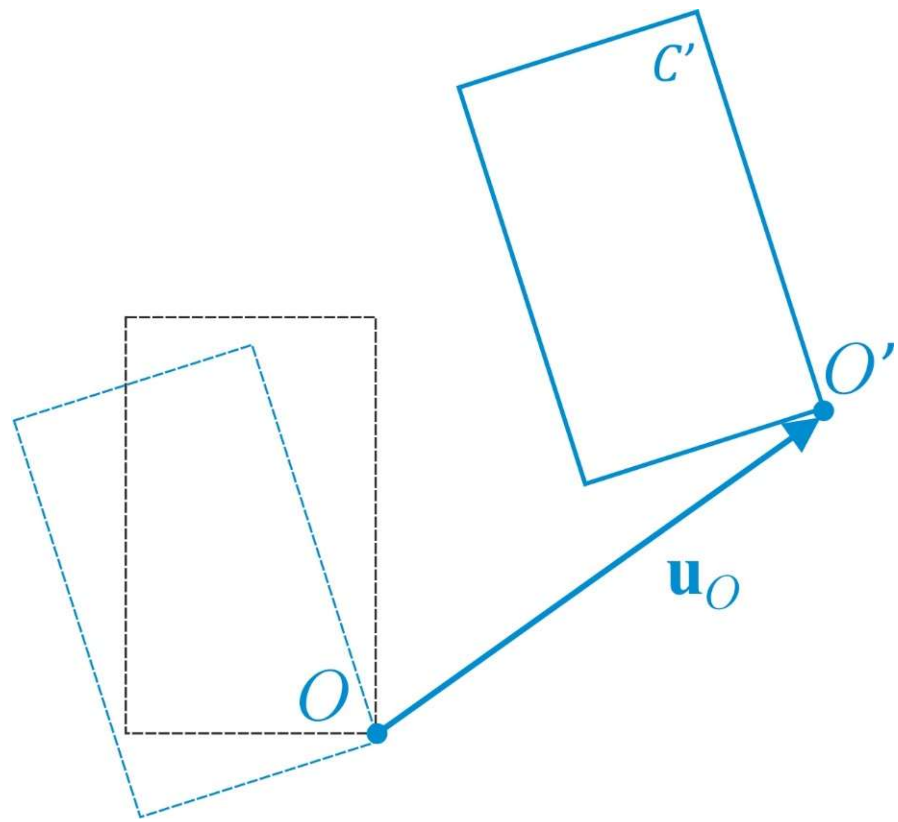


1. Cinematica del corpo rigido: spostamento

Spostamento rigido piano generico.

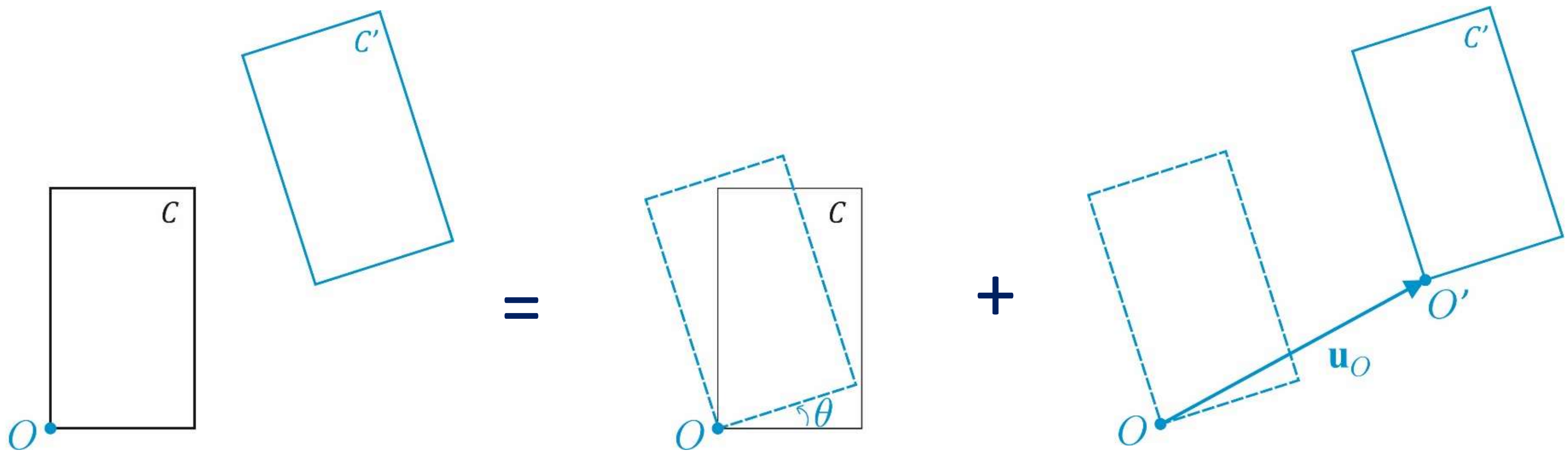


Spostamento rigido piano generico (scelta alternativa del punto O).



1. Cinematica del corpo rigido: rototraslazione

Spostamento rigido piano generico. Scelto un punto arbitrario O del corpo, un generico spostamento rigido può essere pensato come la composizione di una rotazione e di una traslazione rigida. Precisamente: a) una rotazione intorno ad O di opportuna ampiezza θ; b) una traslazione di vettore $\mathbf{u}_O$. Tale spostamento è chiamato **rototraslazione**.



Rototraslazione — $\mathbf{u}_P$

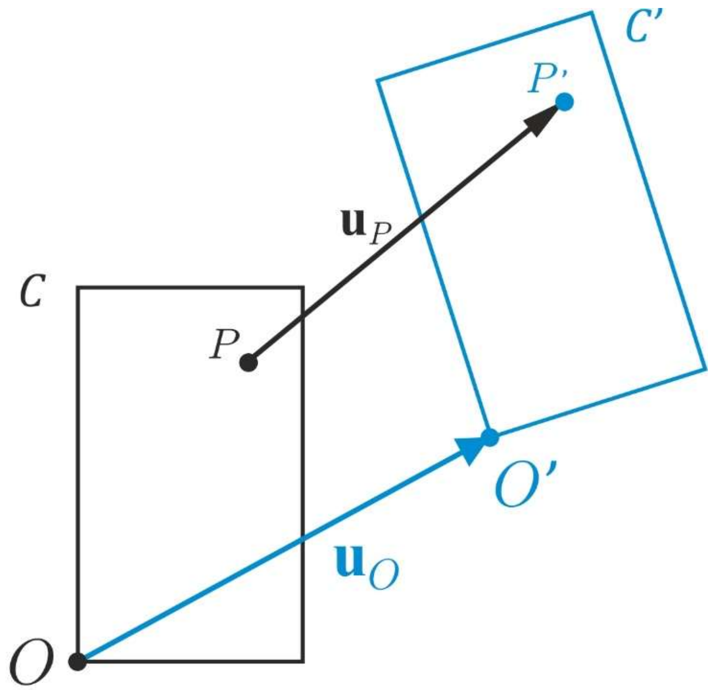
Rotazione — $\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$

Traslazione — $\mathbf{u}_O$

O: polo di riduzione degli spostamenti

Formula Generale dello Spostamento Rigido: ***forma vettoriale***

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$



$\mathbf{u}_P$ *Vettore spostamento del generico punto $P \in C$*

O Polo di riduzione degli spostamenti (scelto arbitrariamente)

$\mathbf{u}_O$ *Vettore spostamento del polo O*

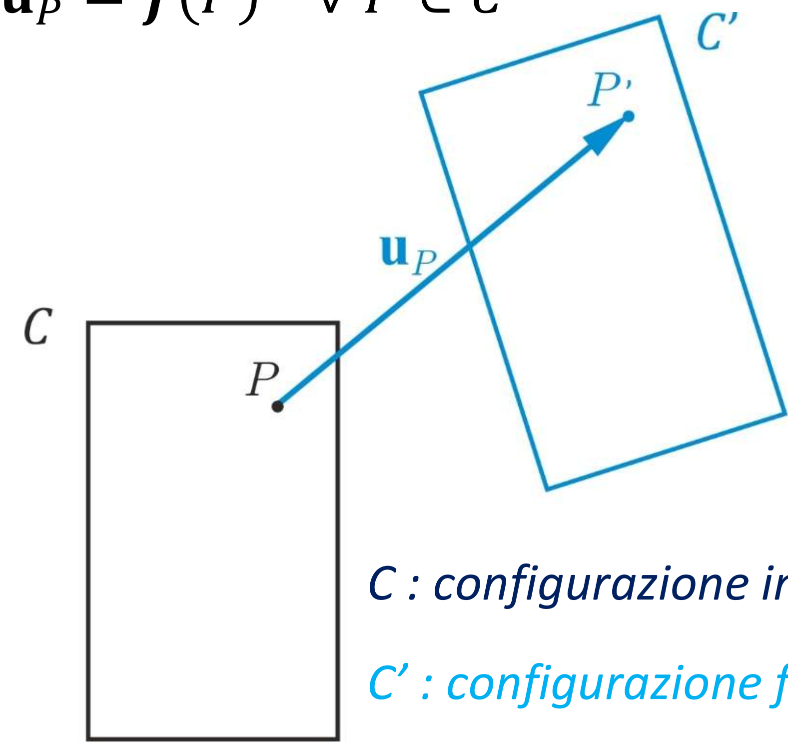
$\boldsymbol{\theta}$ *Vettore rotazione intorno a O*

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Importanza e utilità della FGSR

Obiettivi: Definire per il modello le grandezze fisiche e gli strumenti atti a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un corpo rigido o di un sistema di corpi rigidi
Per caratterizzare i cambiamenti di configurazione è necessario determinare un espressione analitica esplicita per la funzione vettoriale $\boldsymbol{f}(P)$ o per le sue componenti scalari $f_u(x, y, z), f_v(x, y, z), f_w(x, y, z)$.

$$\mathbf{u}_P = \boldsymbol{f}(P) \quad \forall\, P \in C$$



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

La FGSR risponde all'obiettivo di esplicitare la funzione $\boldsymbol{f}(P)$, nell'ipotesi dei 'piccoli spostamenti'.

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

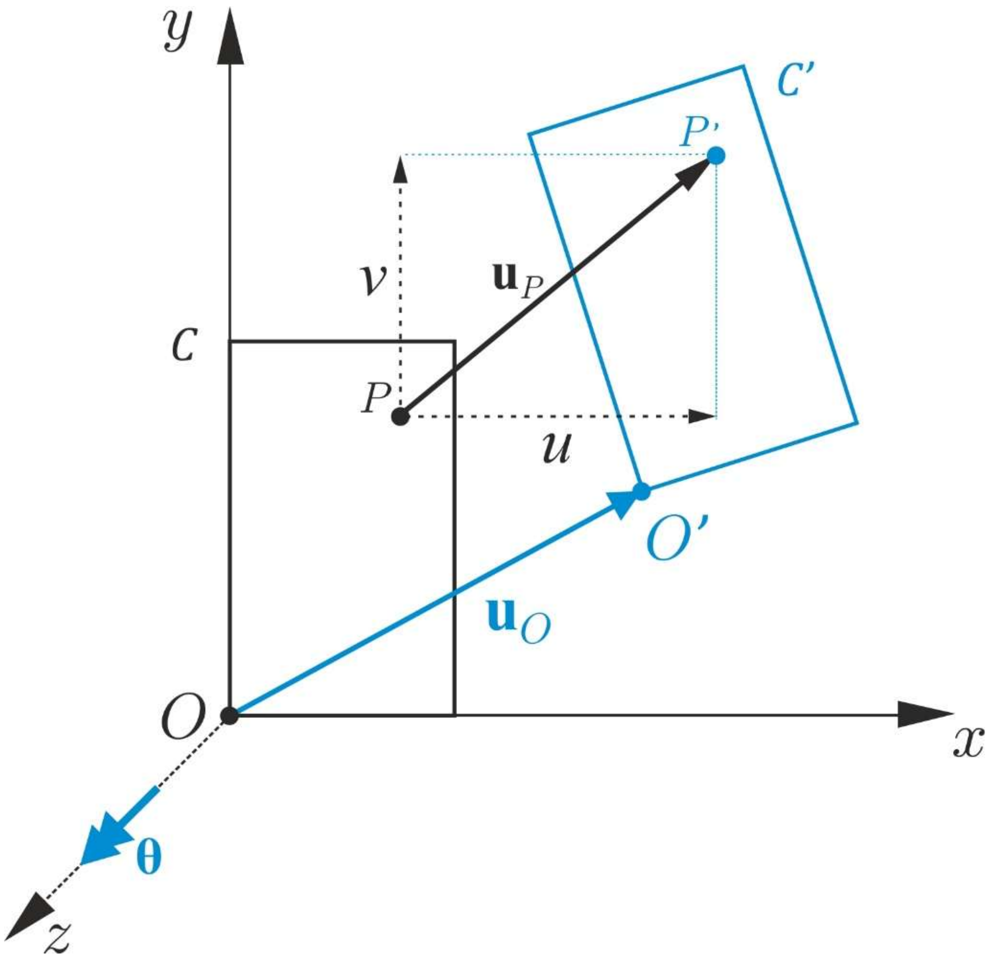
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O, si ha:

$O \equiv (0,0,0)$ $\quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0)$ $\quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$

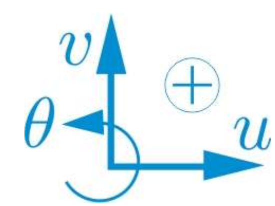
$P \equiv (x, y, 0)$ $\quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0)$ $\quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y\mathbf{i} + \theta x\mathbf{j}$$



Componenti scalari rispetto all'asse x

$$u = u_O - \theta y$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

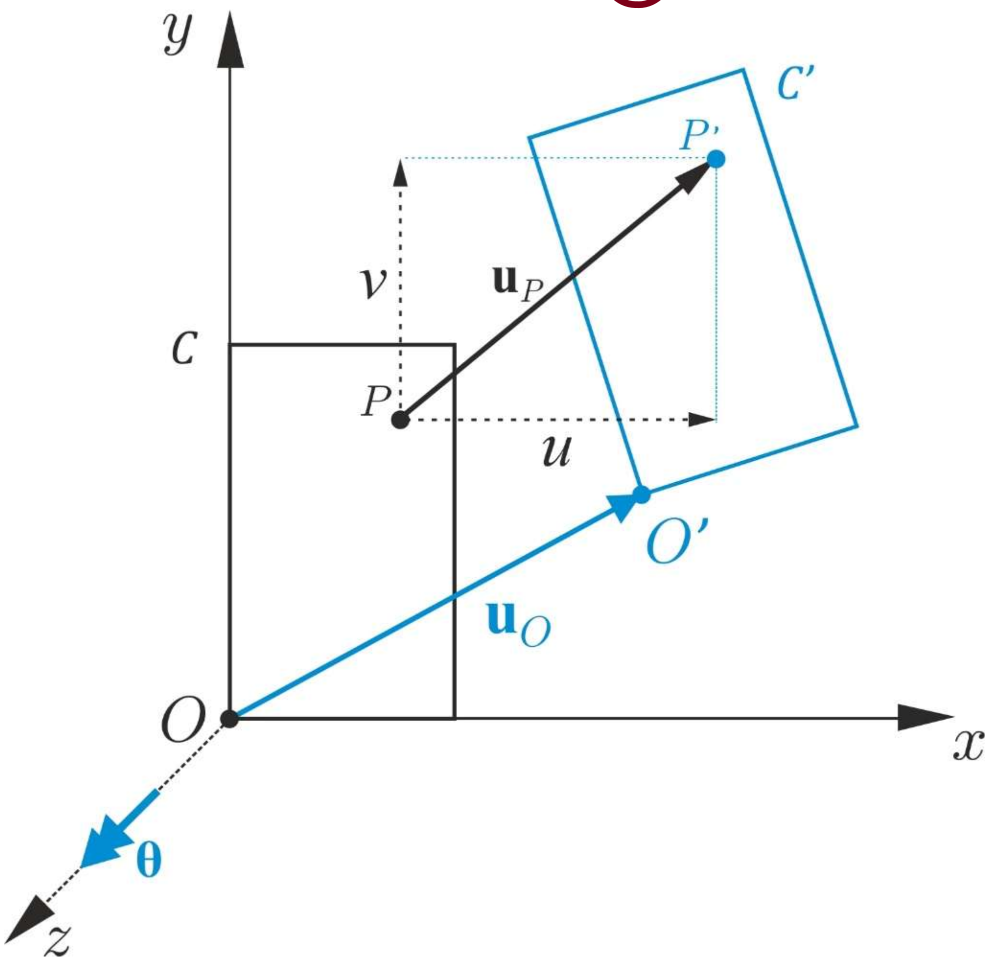
$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O, si ha:

$O \equiv (0,0,0)$ $\quad \mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0)$ $\quad \boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$

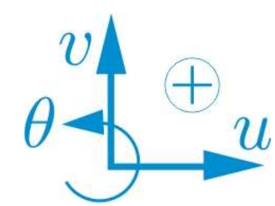
$P \equiv (x, y, 0)$ $\quad \mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0)$ $\quad \mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y \mathbf{i} + \theta x \mathbf{j}$$



Componenti scalari rispetto all'asse y

$$v = v_O + \theta\, x$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma scalare (2D)*

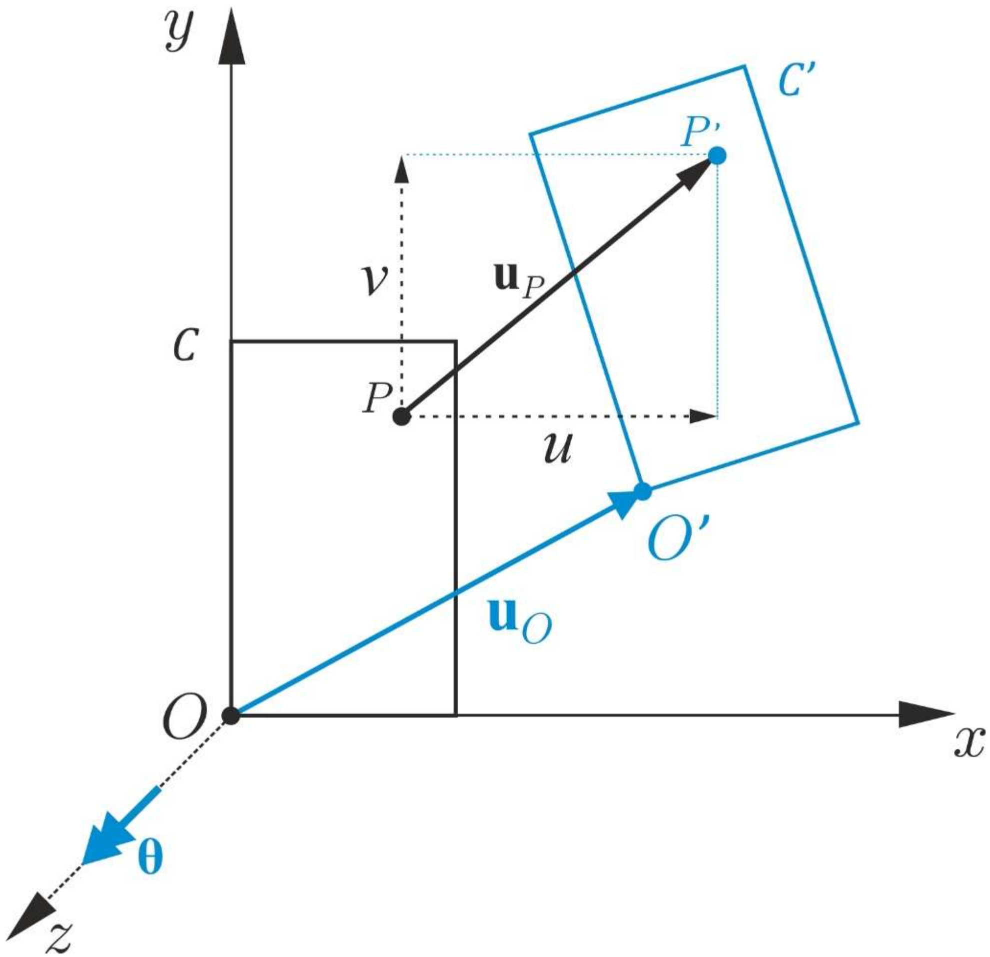
$$\boxed{\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}}$$

Scegliendo un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O, si ha:

$O \equiv (0,0,0)$ $\mathbf{u}_P \equiv (u, v, 0)$ $\boldsymbol{\theta} \equiv (0,0,\theta)$

$P \equiv (x, y, 0)$ $\mathbf{u}_O \equiv (u_0, v_0, 0)$ $\mathbf{OP} \equiv (x, y, 0)$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \theta \\ x & y & 0 \end{bmatrix} = -\theta y\mathbf{i} + \theta x\mathbf{j}$$



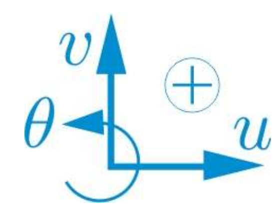
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

Parametri lagrangiani dello spostamento

$$u_O, v_O, \theta$$



1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \;=\; \mathbf{u}_O \;+\; \boldsymbol{\Omega}_R \;\; \mathbf{x}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *forma matriciale (2D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Tensore della rotazione rigida (emisimmetrico)

$$\mathbf{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_R = -\mathbf{\Omega}_R^T$$

Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3x1)$$

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

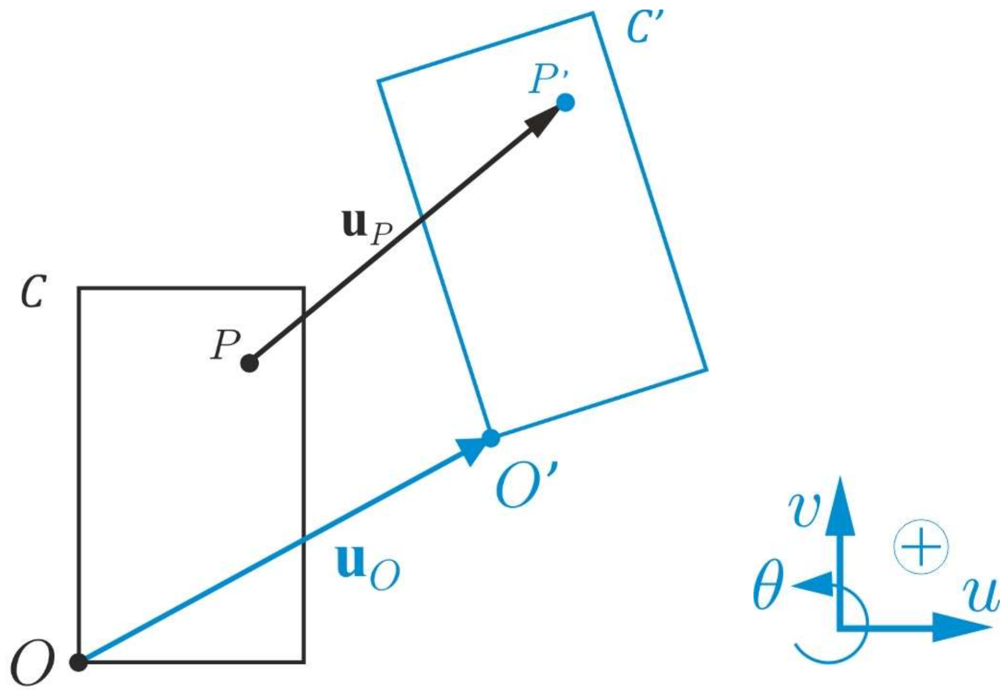
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore degli spostamenti generalizzati

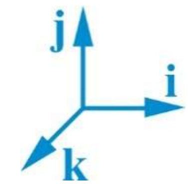
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3x1)$$

Numero di g.d.l: $n = 3$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

Formula Generale dello Spostamento Rigido: ***forma scalare (3D)***

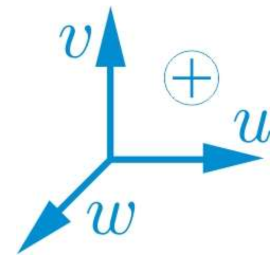


Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.

Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\theta_y z - \theta_z y\right)\mathbf{i} + \left(\theta_z x - \theta_x z\right)\mathbf{j} + \left(\theta_x y - \theta_y x\right)\mathbf{k}$$

Componenti scalari rispetto all'asse x

$$u = u_O - \theta_z y + \theta_y z$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

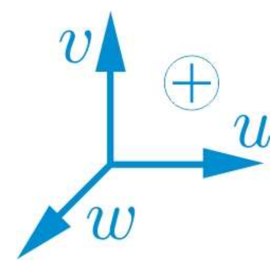
Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma scalare (3D)*

Si sceglie un sistema di riferimento con origine coincidente con il polo O.

Componenti scalari dei vettori che compaiono nella FGSR

$$\mathbf{u}_P = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}_O = u_O\mathbf{i} + v_O\mathbf{j} + w_O\mathbf{k}$$

$$\theta = \theta_x\mathbf{i} + \theta_y\mathbf{j} + \theta_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



$$\theta \times \mathbf{OP} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\theta_y z - \theta_z y\right)\mathbf{i} + \left(\theta_z x - \theta_x z\right)\mathbf{j} + \left(\theta_x y - \theta_y x\right)\mathbf{k}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

Parametri lagrangiani dello spostamento

$$u_O, v_O, w_O, \theta_x, \theta_y, \theta_z$$

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_O\\v_O\\w_O\end{bmatrix} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & \quad y & \quad z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_O} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}_R} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

Formula Generale dello Spostamento Rigido: *forma matriciale (3D)*

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O + \theta_y z - \theta_z y \\ v = v_O + \theta_z x - \theta_x z \\ w = w_O - \theta_y x + \theta_x y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \mathbf{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Tensore della rotazione rigida (emisimmetrico)

$$\mathbf{\Omega}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_R = -\mathbf{\Omega}_R^T$$

Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \qquad \textit{(6x1)}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 1

Se in uno spostamento rigido è nulla la rotazione ($\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$), allora dalla FGSR si ha:

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O$$

che è l'equazione della traslazione rigida.

La traslazione rigida si può dunque interpretare come uno spostamento rigido ad ampiezza di rotazione nulla.

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 2

Guardando la forma scalare Eq. (2), si osserva che il punto del piano di coordinate

$$x = -\frac{v_O}{\theta}, \quad y = \frac{u_O}{\theta}$$

non si sposta. Infatti sostituendo le precedenti equazioni nella Eq. (2) si ottiene $u = 0,\ v = 0$.

Poiché non subisce spostamenti, tale punto è per definizione un centro di rotazione.

Se ne deduce che ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno al punto $\boldsymbol{C_R}$ ***di coordinate*** $\boldsymbol{x_{CR} = -\frac{v_O}{\theta}}$ ***e*** $\boldsymbol{y_{CR} = \frac{u_O}{\theta}}$.

Il punto C_R *è detto* ***centro assoluto di rotazione*** *o semplicemente centro di rotazione.*

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 3

In caso di traslazione rigida, per l'osservazione 1 è $\theta = 0.$ *Quindi, per l'osservazione 2* ($x_{CR} = -\frac{v_O}{\theta}, y_{CR} = \frac{u_O}{\theta}$)*, risulta:*

$$\boldsymbol{x}_{CR} \to \infty,\ \boldsymbol{y}_{CR} \to \infty$$

La traslazione rigida è dunque riconducibile a una rotazione rigida *ad ampiezza nulla, il cui centro di rotazione è un punto improprio del piano.*

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

OSSERVAZIONI (caso piano)

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

Osservazione 4

Si ha un campo di spostamenti nullo ($\mathbf{u}_P = \mathbf{0}\ \forall P \in C$) *se e solo se* $\mathbf{u}_O = \mathbf{0}$ *e* $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$

*cioè se e solo se sono identicamente **nulli** i parametri lagrangiani dello spostamento* u_O, v_O, θ

*e quindi se e solo se è **nullo** il vettore degli spostamenti generalizzati* $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix}$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{OP}$$

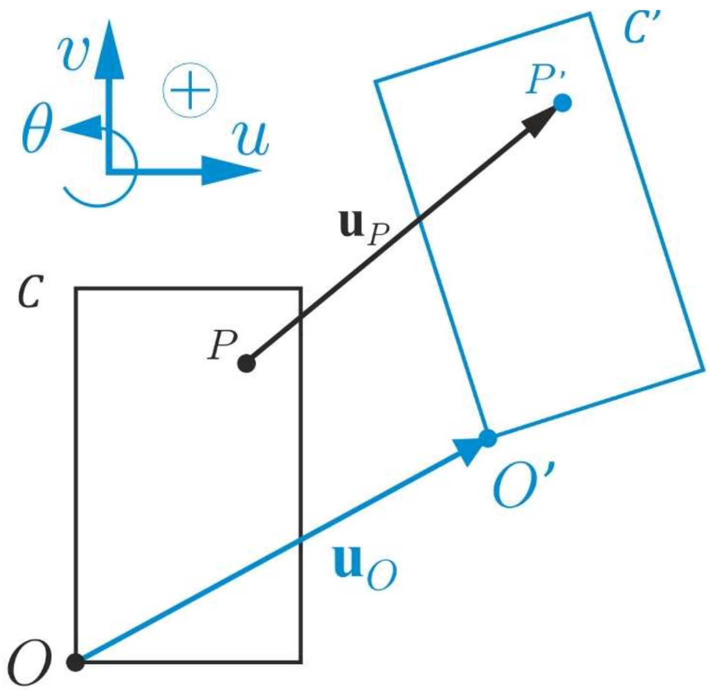
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta\, x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore spostamenti generalizzati

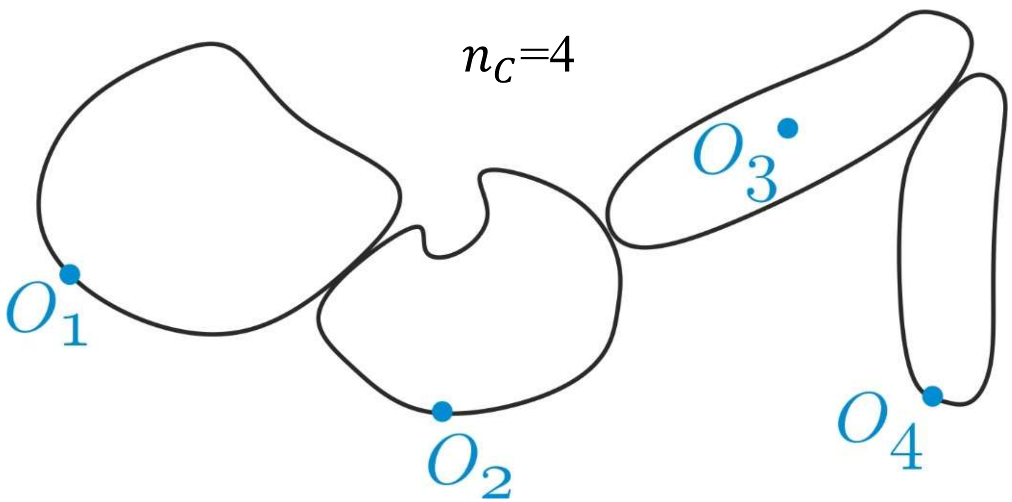
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3x1)$$

Numero di g.d.l: $n = 3$

Ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno ad un punto C_R *detto* ***centro assoluto di rotazione***

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani. Si estende la trattazione fatta al caso di sistemi di n_C corpi rigidi



FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_{Oi} + \boldsymbol{\theta}_i \times \boldsymbol{O}_i\boldsymbol{P}$$

$$P \in C_i \quad i = 1, \dots, n_C$$

$\boldsymbol{O}_i$ **-** Polo di riduzione degli spostamenti scelto arbitrariamente (uno per ogni corpo)

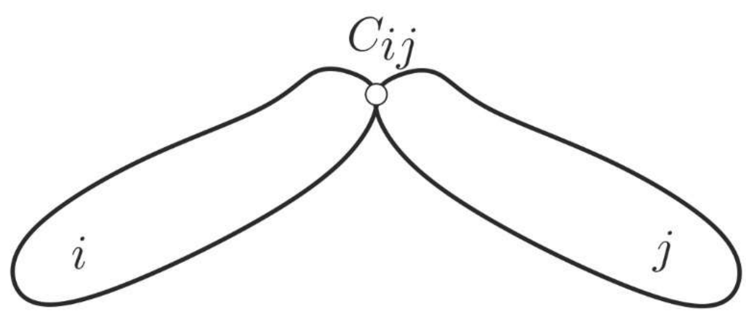
Vettore degli spostamenti generalizzati

$$\mathbf{q} = [u_{O1} \quad v_{O1} \quad \theta_1, u_{O2} \quad v_{O2} \quad \theta_2, \cdots, u_{Onc} \quad v_{Onc} \quad \theta_{nc}]^T$$

Il vettore $\mathbf{q}$ ha dimensioni $3n_C \times 1$, dove $n = 3n_C$ è il numero di gradi di libertà del sistema

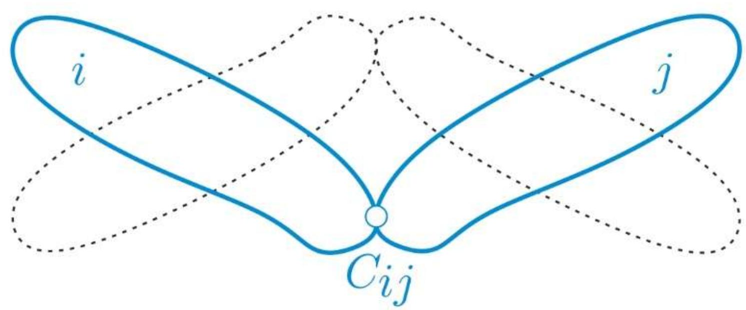
1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi i* e *j* di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo *i* vede ruotare il corpo j o viceversa.



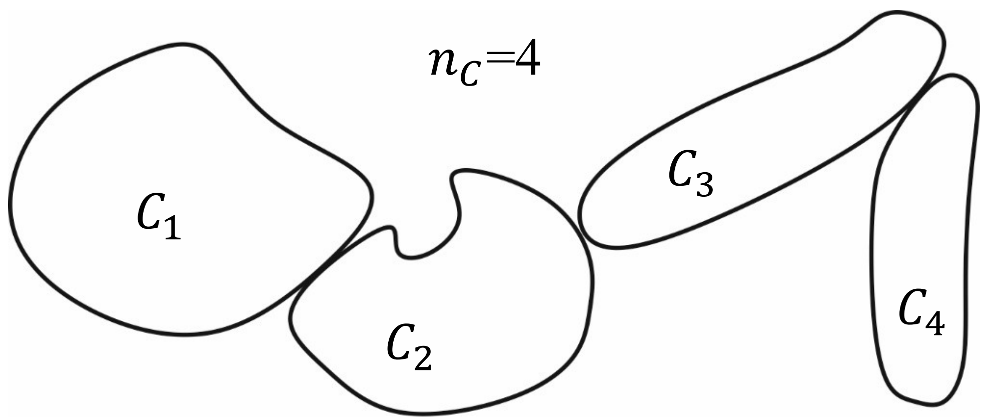
1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.



1. Cinematica del corpo rigido: spostamenti piani

Sistemi di corpi rigidi, spostamenti piani.



C_i, $i = 1, \ldots, 4$

Osservazione. Se un sistema di corpi rigidi si sposta nel piano, nell'ipotesi di piccoli spostamenti allora:

a) ogni corpo che non rimane fermo *ruota rigidamente* attorno ad un centro di rotazione assoluto C_{Ri} (eventualmente improprio in caso di corpo che trasla).

b) Per ogni coppia di corpi i e j esiste un *centro relativo* C_{ij} definito come sopra.