

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

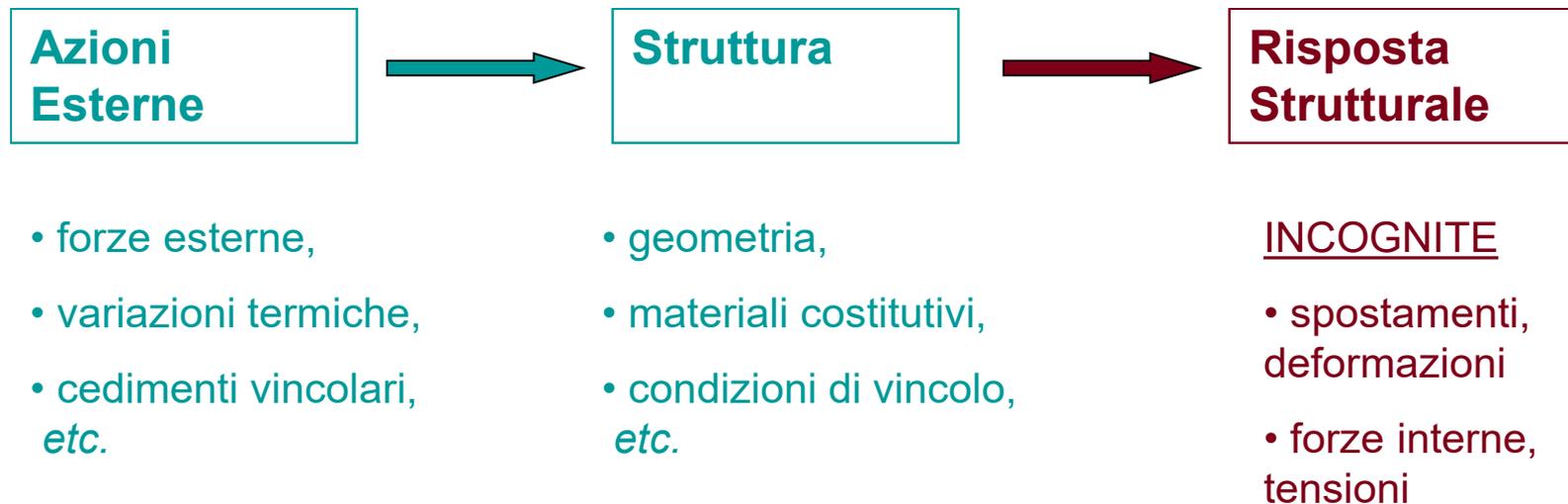
Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



2.1 Parole chiave

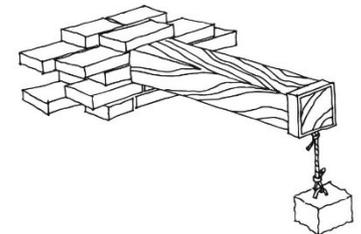
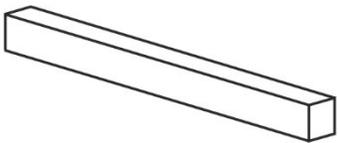
Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.



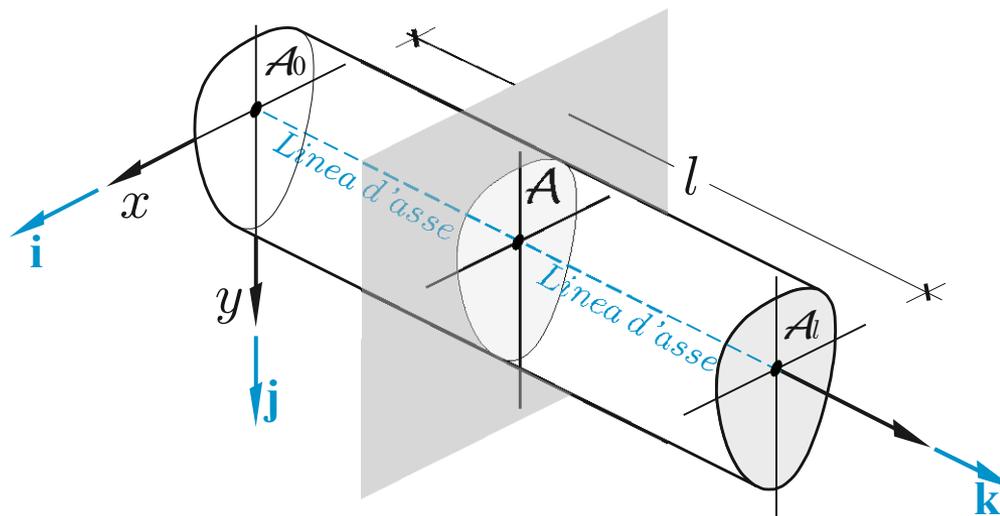
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

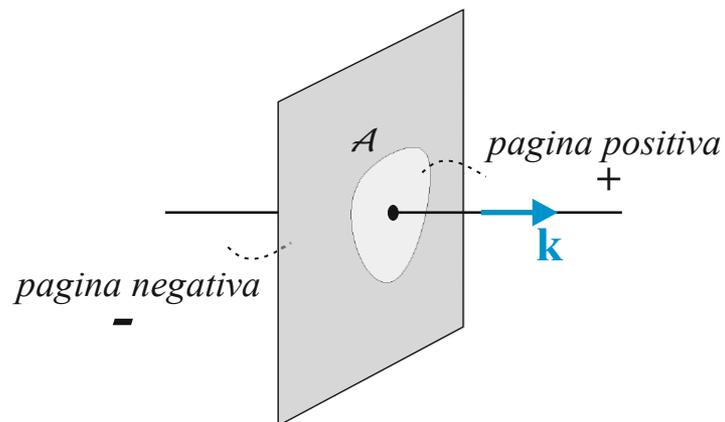
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



- RIEPILOGO NOTAZIONI TRAVE AD ASSE RETTILINEO



Orientazione delle sezioni

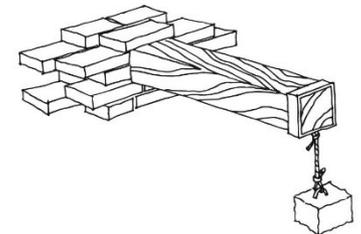
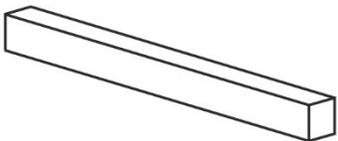




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

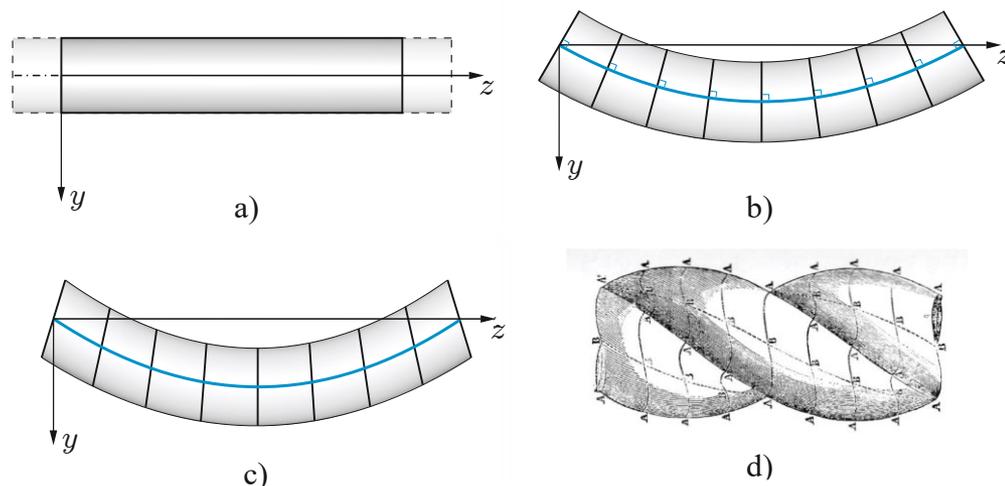
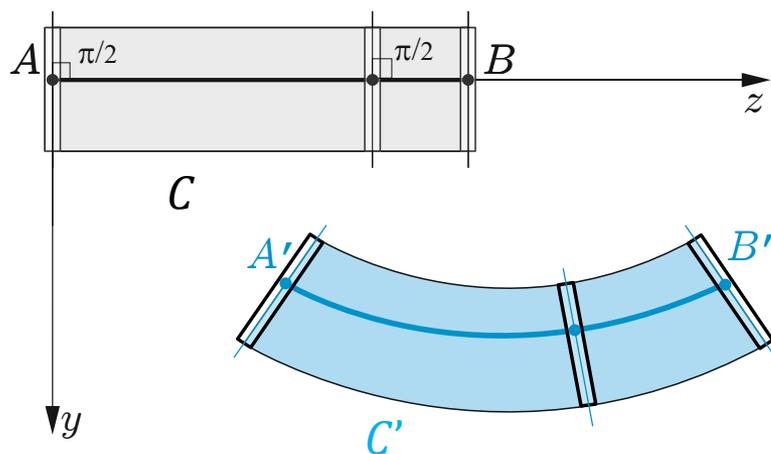
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



• RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di una trave 1D o di un sistema di travi

Obiettivo 2. Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione manifestati dalla trave nel passaggio da C a C'



C : configurazione iniziale Trasporto f
 C' : configurazione finale $f: C \rightarrow C'$

Ipotesi 0.

Le sezioni si modellano
come corpi rigidi piani

• RIEPILOGO CINEMATICA TRAVE

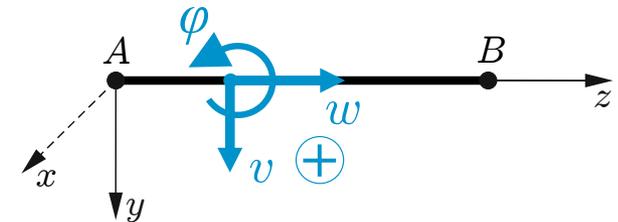
Misure di deformazione (piano zy): grandezze atte a misurare i cambiamenti di forma e/o di dimensione della trave a livello locale (generico concio di trave o sezione)

- Deformazione assiale $\varepsilon(z)$ [0]
- Scorrimento angolare $\gamma(z)$ [0]
- Curvatura flessionale $\chi(z)$ [L^{-1}]

Equazioni implicite di congruenza (piano zy): stabiliscono un legame differenziale fra spostamenti e rotazioni e misure di deformazione.

Forma scalare

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c. c.$$

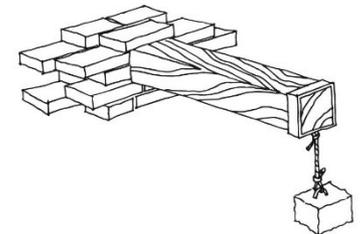
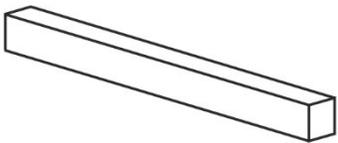




Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

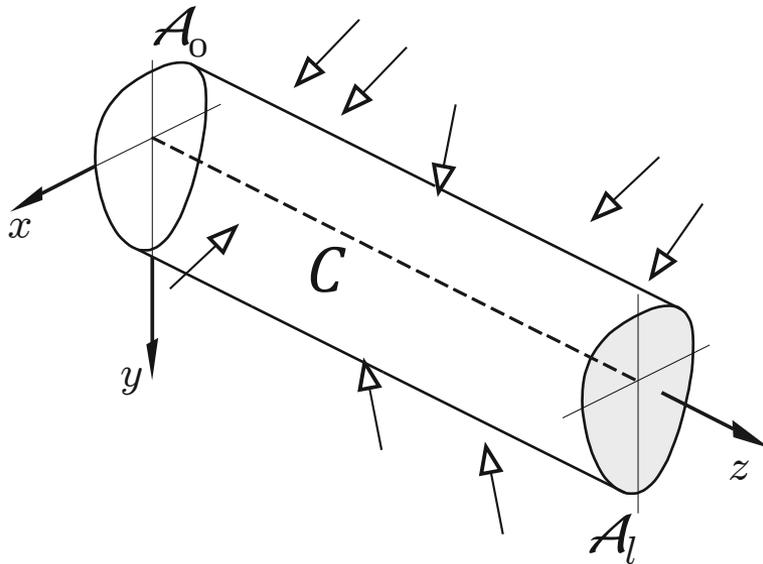
- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



- RIEPILOGO STATICA TRAVE

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle forze esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

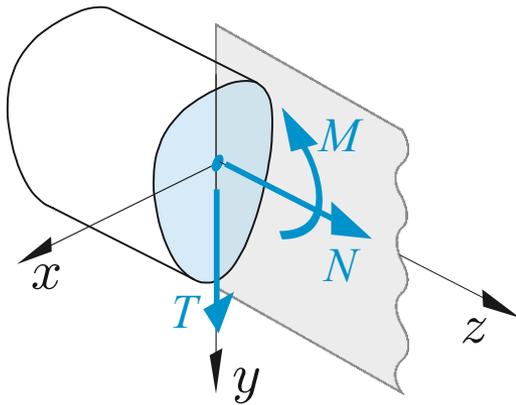
- RIEPILOGO STATICA TRAVE

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

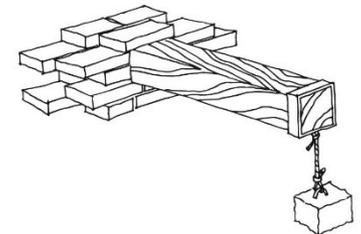
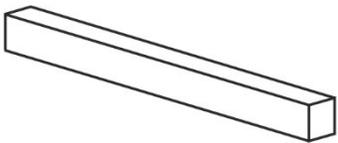
(obiettivo 2)



Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo**
- Problema elastico



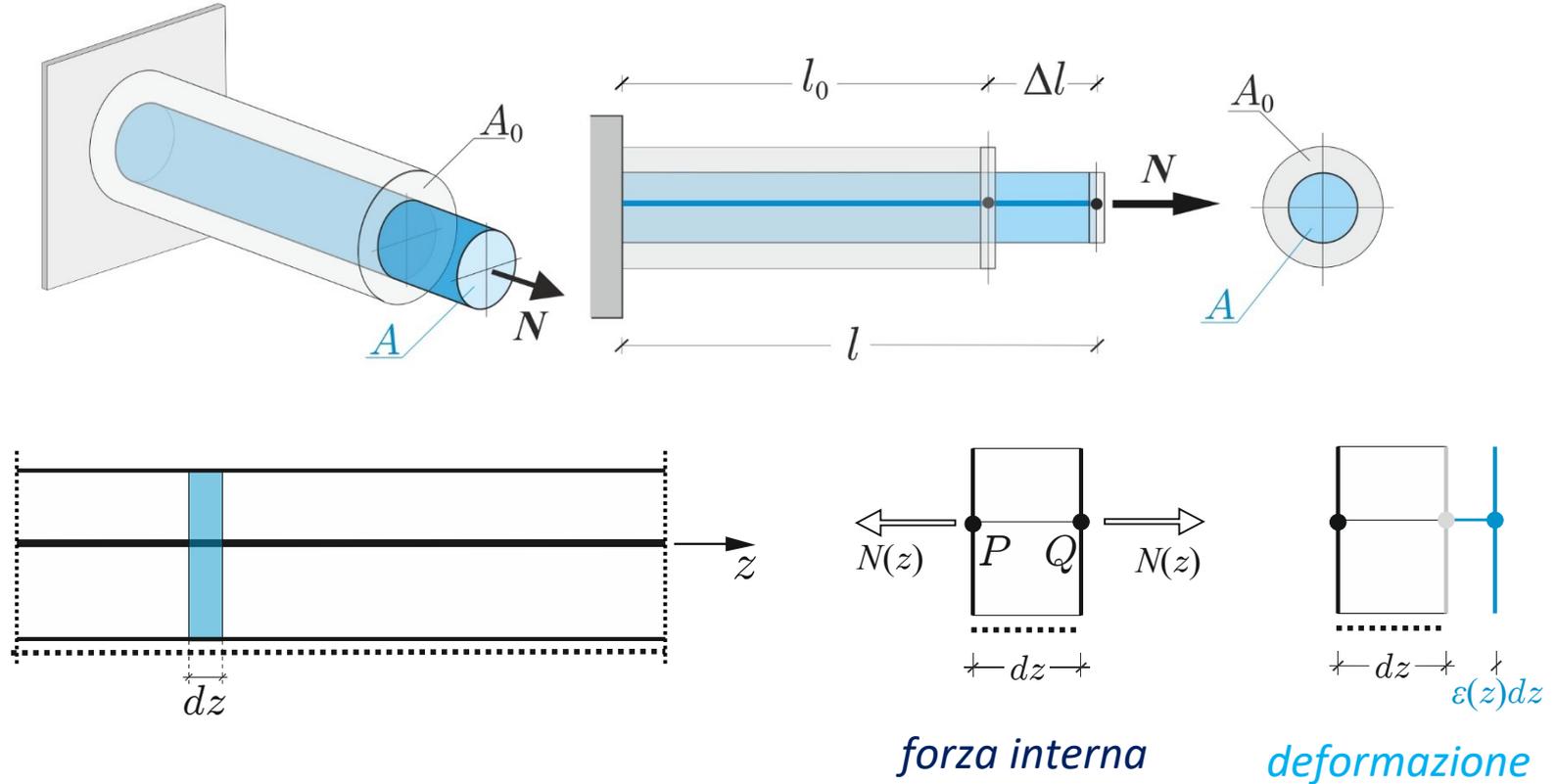


Parte III - Il modello di trave elastica 1D

3. Legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
 - materiali duttili
 - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
 - Legge di Hooke
- **Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi**
- **Fenomenologia e caratterizzazione sperimentale 3D**
 - prova uniassiale
 - prova a torsione
- **Leggi di legame costitutivo per la trave**

3. Legame costitutivo: obiettivi



$$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z) \quad ?$$

$$T(z) \leftrightarrow \gamma(z) \quad ?$$

$$M(z) \leftrightarrow \chi(z) \quad ?$$

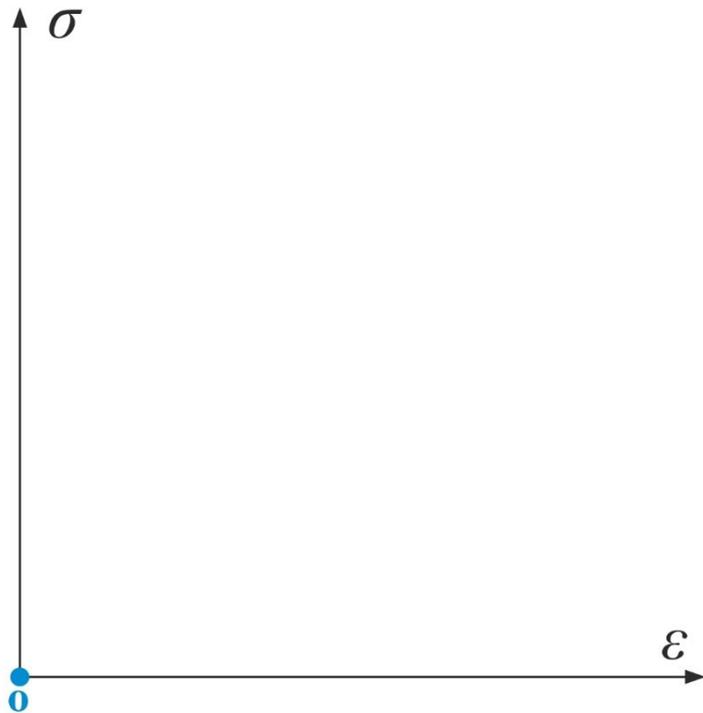
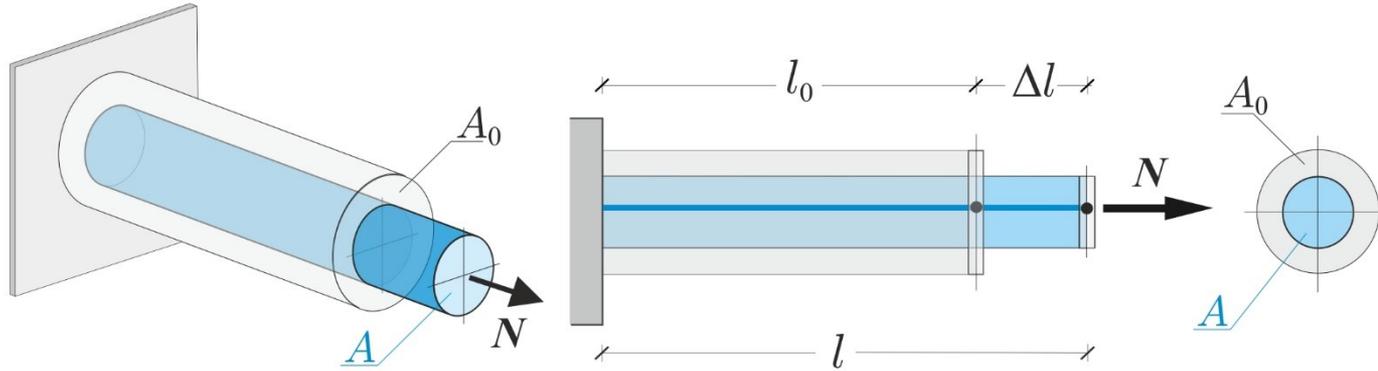
Materiale?

Indagini sperimentali:

- prova uniassiale
- prova a torsione



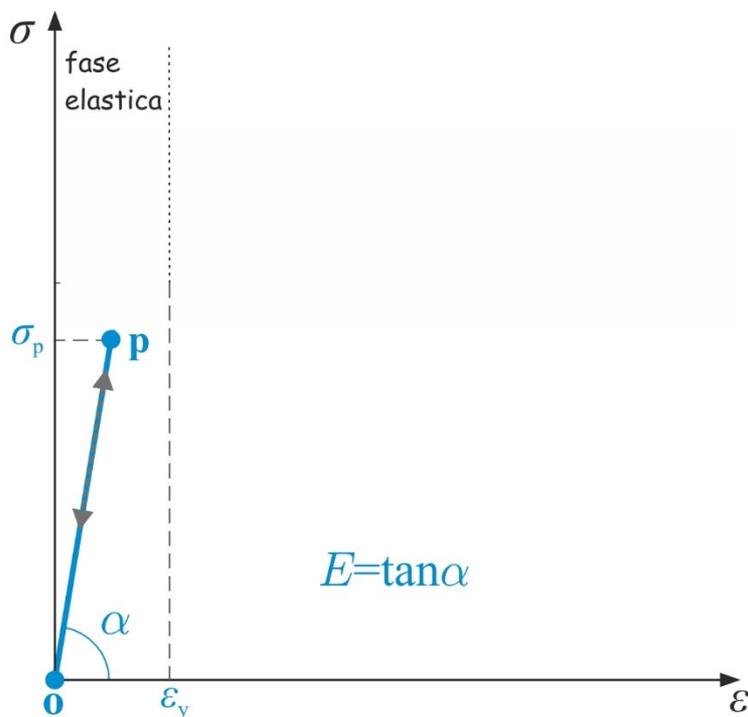
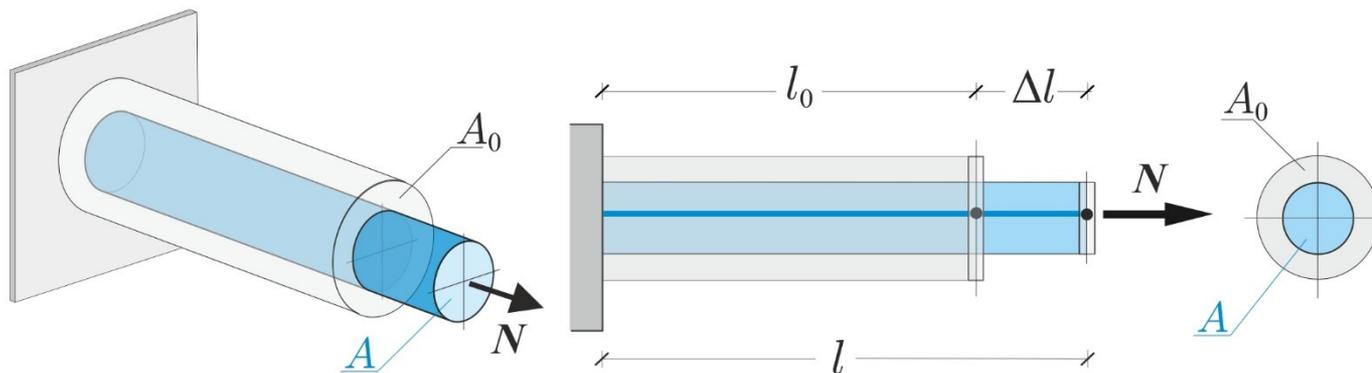
3. Legame costitutivo: prova uniassiale



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

o-p → comportamento elastico lineare

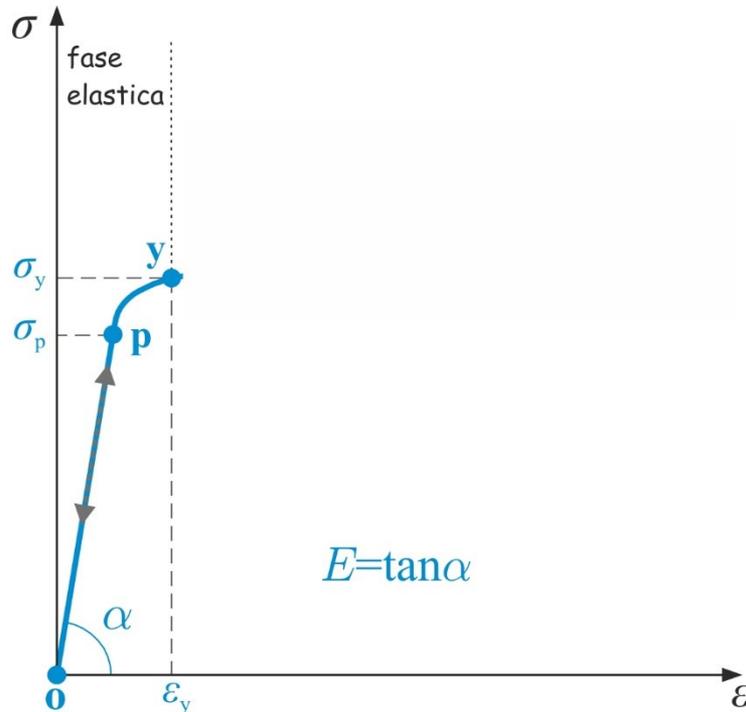
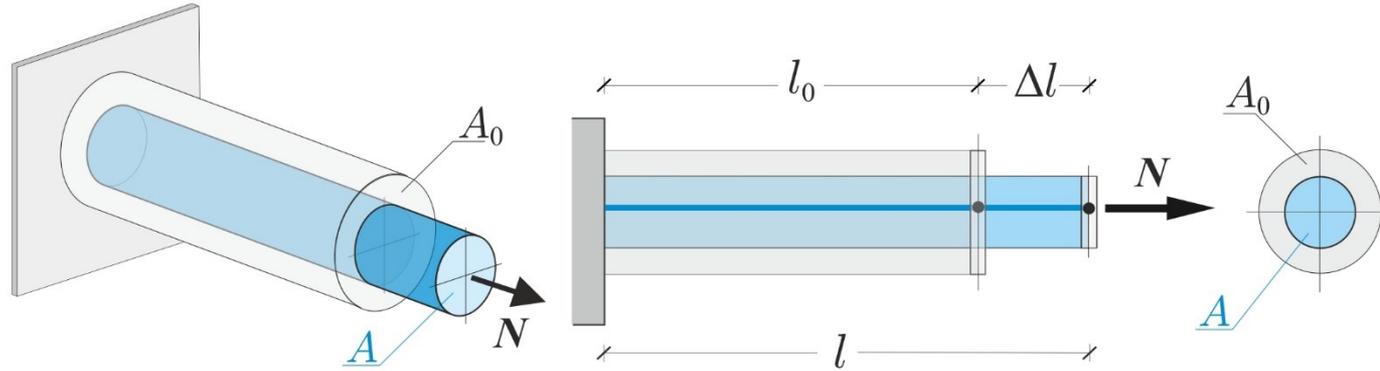
o → stato iniziale

p → limite di proporzionalità

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

$o-p \rightarrow$ comportamento elastico lineare

$o \rightarrow$ stato iniziale

$p \rightarrow$ limite di proporzionalità

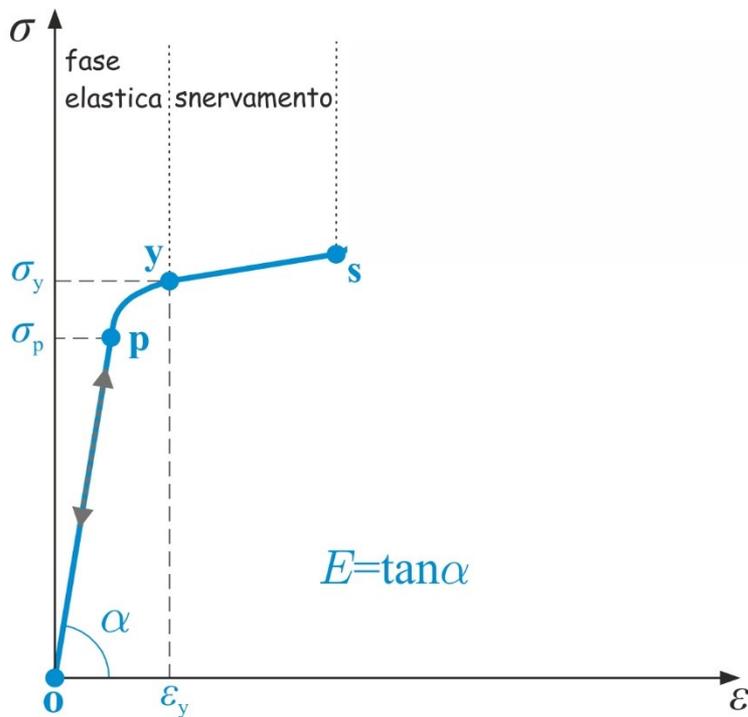
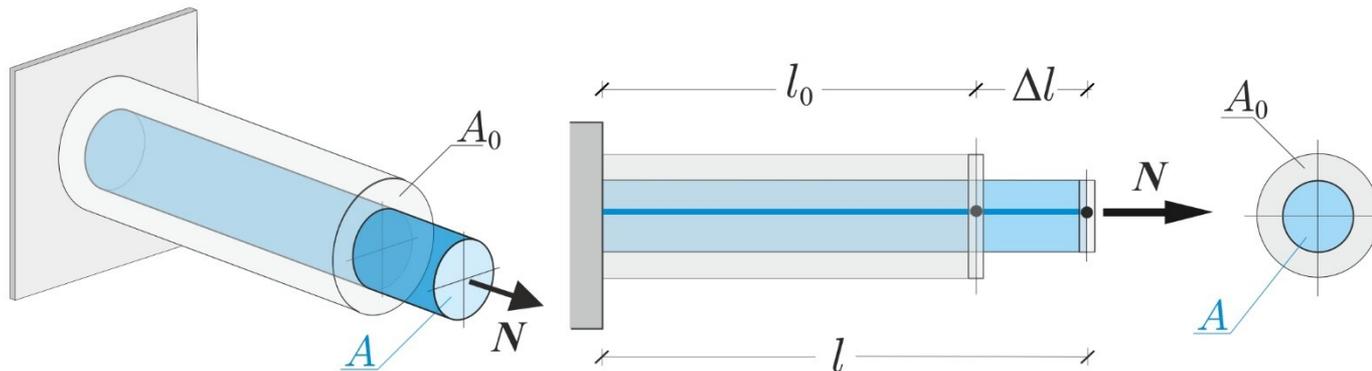
$p-y \rightarrow$ comportamento elast. non lineare

$y \rightarrow$ limite di elasticità

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



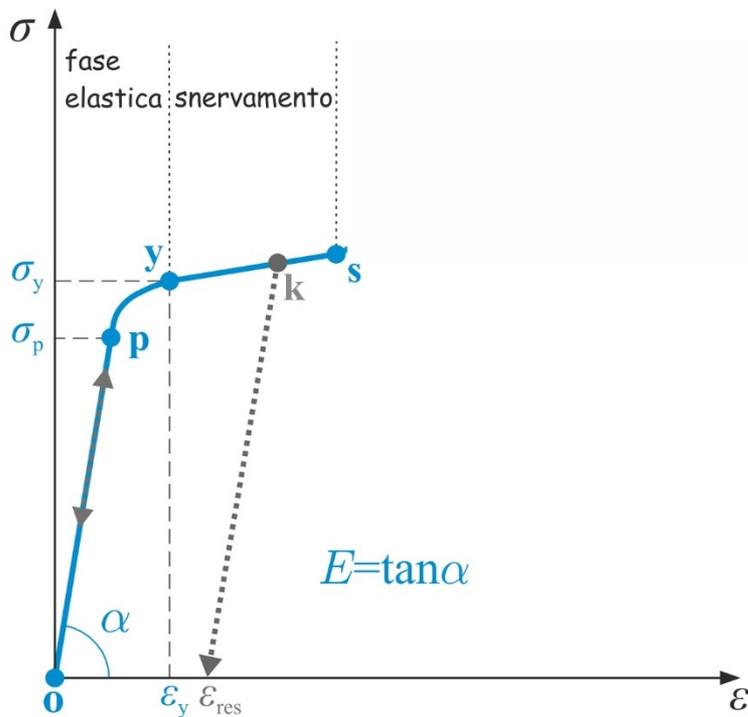
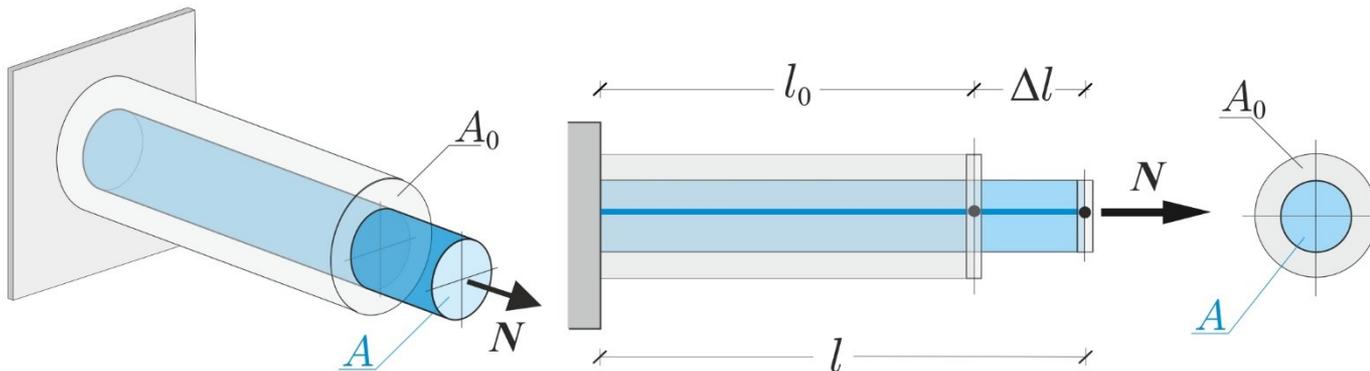
FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$ snervamento

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



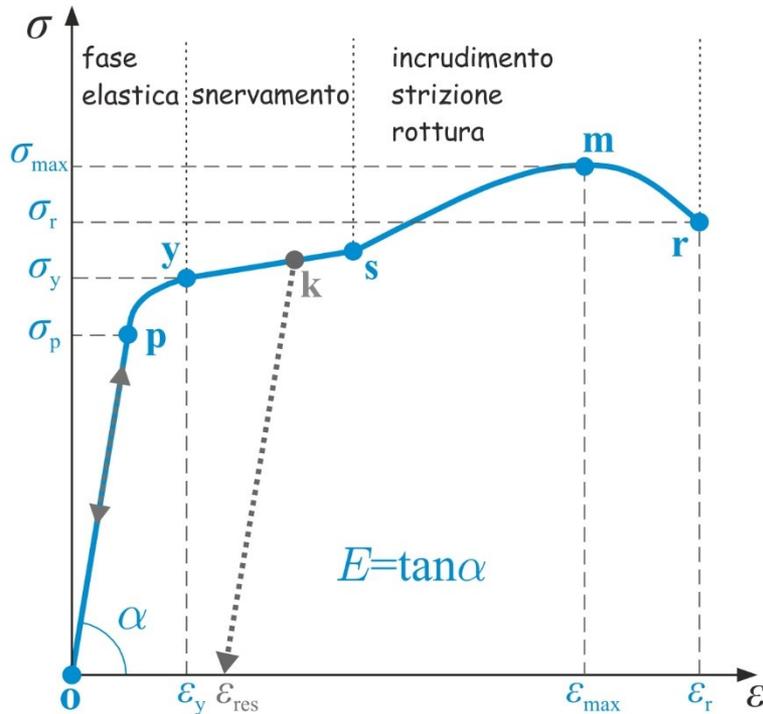
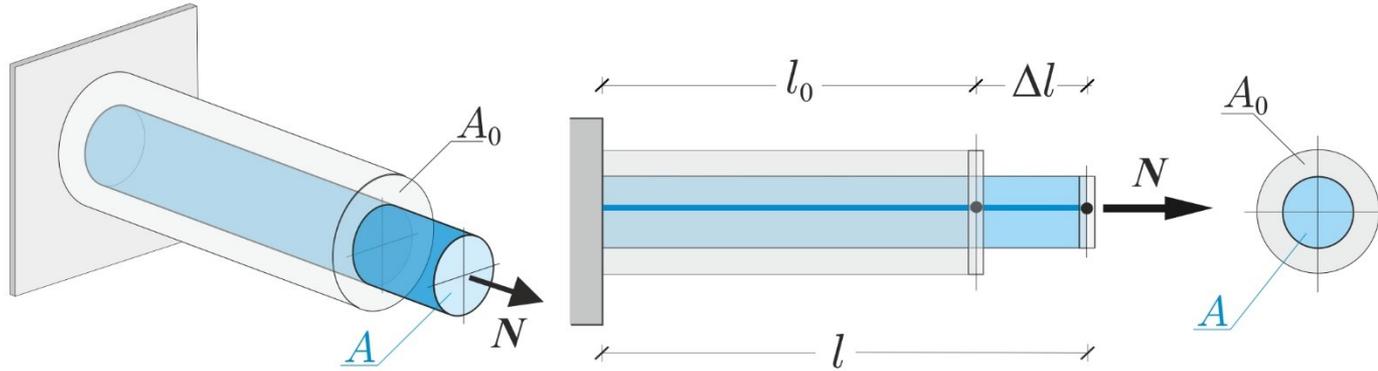
FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$ snervamento

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

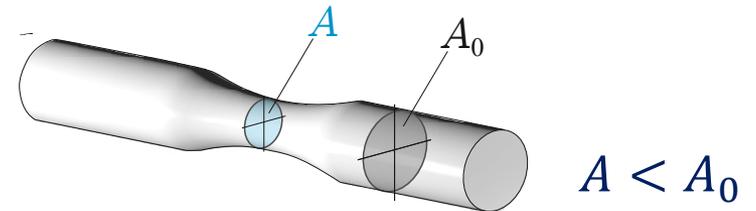
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

$s-m \rightarrow$ *incrudimento*

$r \rightarrow$ *punto di rottura*



$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

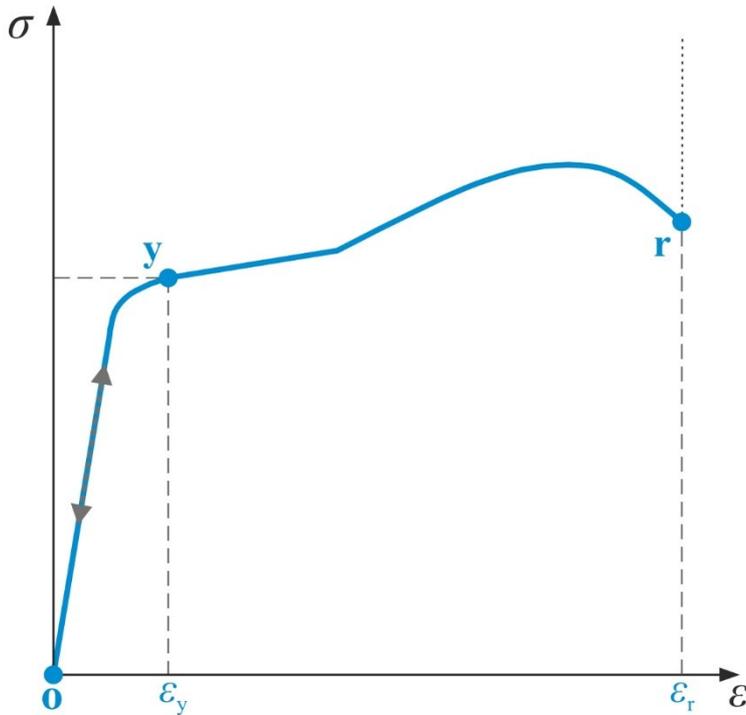
$[FL^{-2}]$ $[0]$



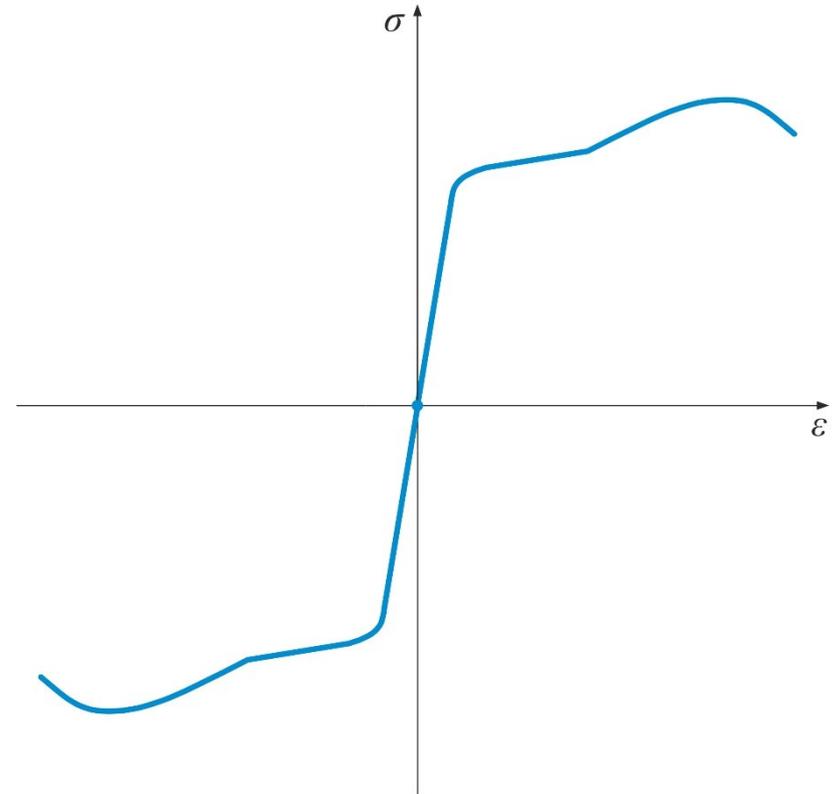
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

DUTTILITA'

$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$

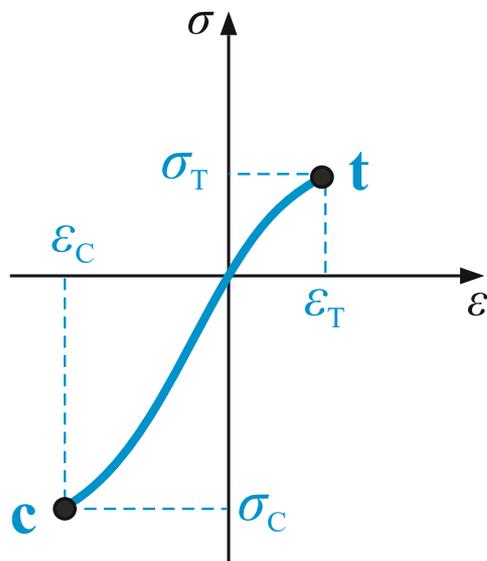
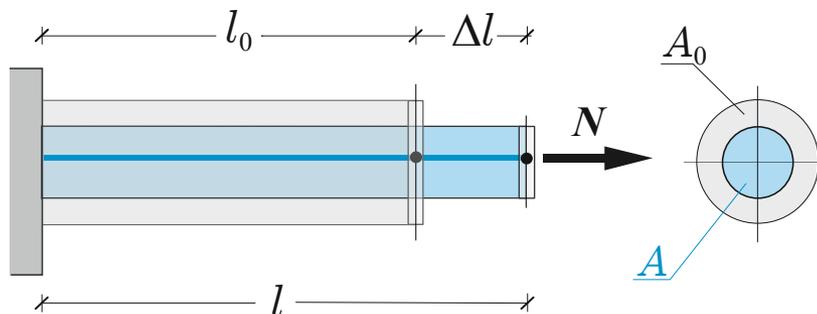
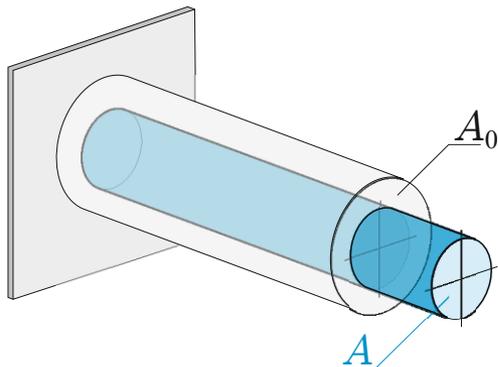


SIMMETRIA





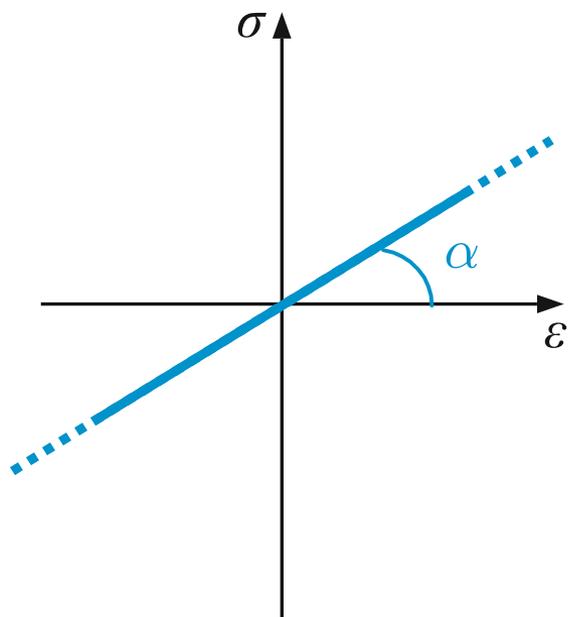
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili



t → punto di rottura a trazione

c → punto di rottura a compressione

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



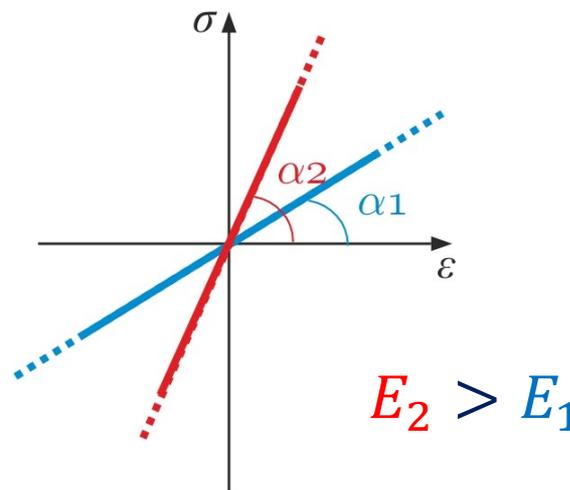
$\sigma = m \varepsilon = \tan \alpha \varepsilon$
(equazione cartesiana della retta
passante per l'origine di coefficiente
angolare m)

$E = \tan \alpha \rightarrow$ Modulo di Young [FL^{-2}]

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

\rightarrow Legge di Hooke



$$E_2 > E_1$$



3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

Materiale	ρ [kg/m³]	E [GPa]	ν	α [°C⁻¹]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

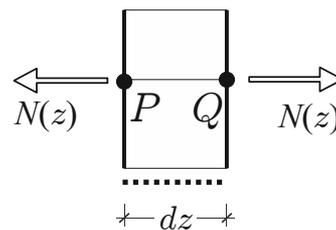
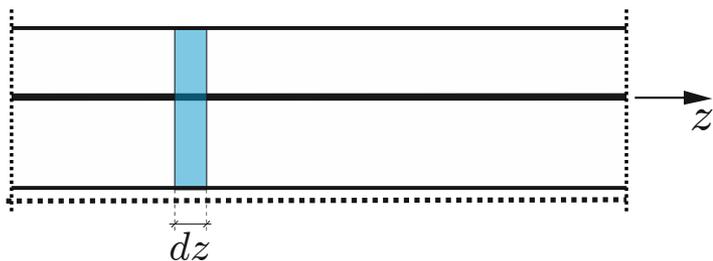
3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

provino

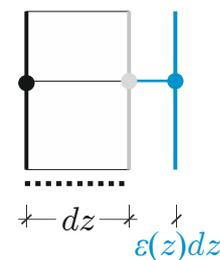
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$
$$\sigma = \frac{N}{A}$$
$$\rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

Elemento infinitesimo

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$



forza interna



deformazione



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

G → Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

Caratteristiche della sezione retta

A → Area [L^2]

A_t → Area di taglio [L^2]

$I = I_x$ → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x [L^4]

Rigidezze della trave

EA → Rigidezza assiale [F]

GA_t → Rigidezza di taglio [F]

EI → Rigidezza flessionale [FL^2]

$EA \rightarrow \infty$ Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \rightarrow \infty$ Trave indeformabile a taglio
(Eulero-Bernouilli)



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

α → coeff. di dilatazione termica [T^{-1}]



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha\Delta T$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha\Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

α → coeff. di dilatazione termica [T^{-1}]



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Comportamento elastico: *il materiale ritorna allo stato originale una volta rimossa la causa che provoca la deformazione: non rimane memoria del processo deformativo.*

Comportamento elastico lineare: *proporzionalità fra deformazioni e tensioni*

Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: sono sufficienti due soli moduli elastici (da ricavare sperimentalmente) per caratterizzare il materiale*

Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

Materiali isotropi: acciaio, leghe metalliche etc.



Materiali isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: dei 21 moduli elastici **solo due** sono indipendenti.*

Materiali omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi: definizioni e esempi

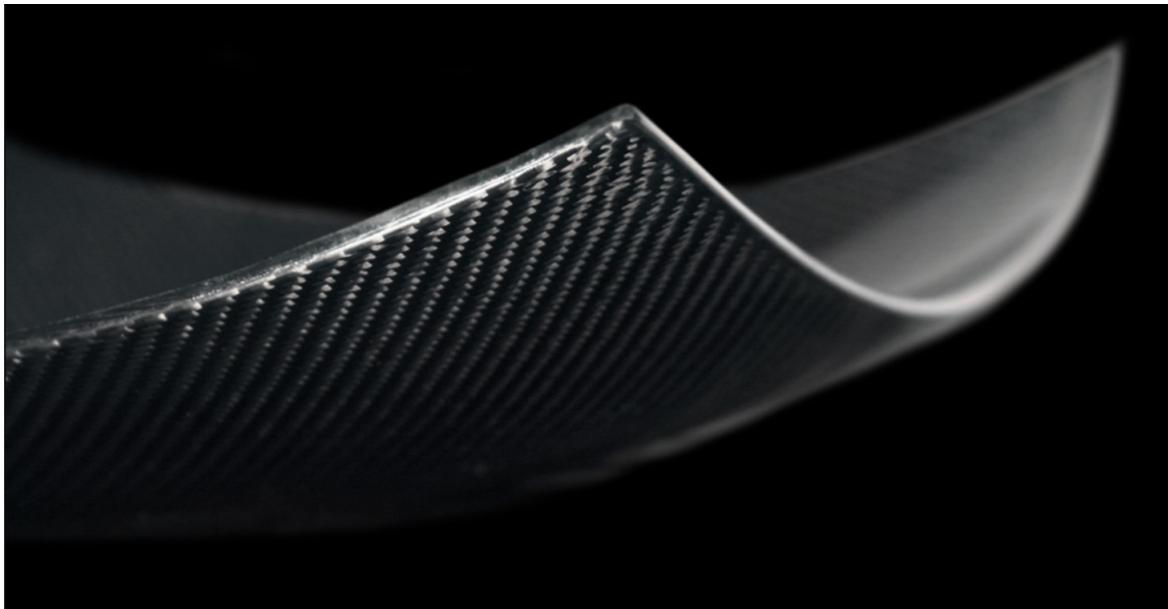
Legno (fibre naturali)



Compositi in fibra di carbonio, compositi fibrorinforzati

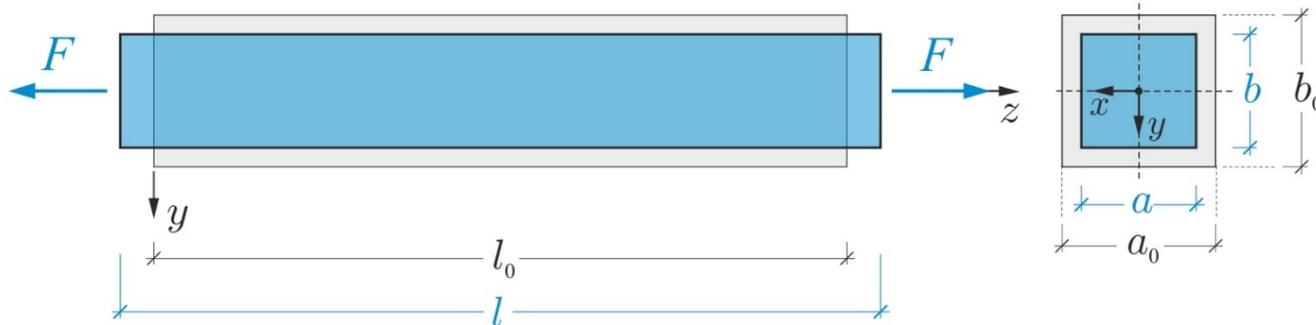
I compositi sono così chiamati in quanto sono costituiti da due o più materiali: ad esempio le fibre di carbonio e una matrice, in genere di resina, la cui funzione è quella di tenere in posa le fibre.

Il materiale composito in fibre di carbonio risulta non omogeneo e presenta spesso una spiccata *anisotropia*: le sue caratteristiche meccaniche presentano direzioni privilegiate.



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

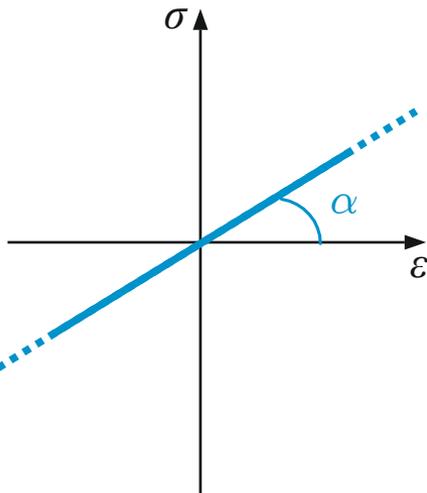
Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)



$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \sigma_z = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z \quad \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

$$E = \tan \alpha \rightarrow \text{Modulo di Young } [FL^{-2}]$$

$$\nu \rightarrow \text{Modulo di Poisson } [0] \quad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici ($\alpha\upsilon\acute{\xi}\eta\sigma\iota\varsigma$: aumento)



ν → Modulo di Poisson [0]

$$\nu < 0$$

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

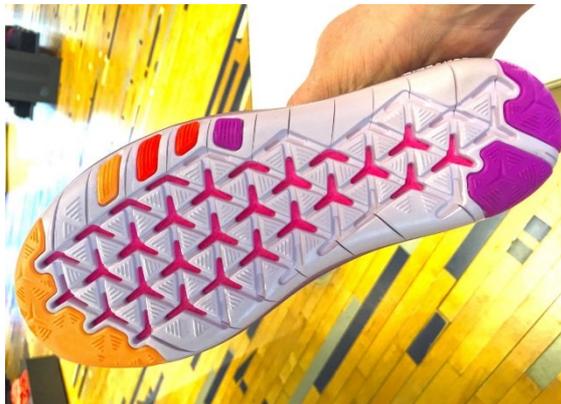
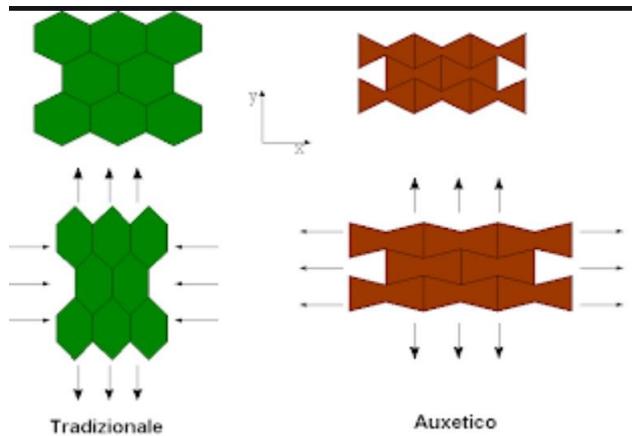


3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

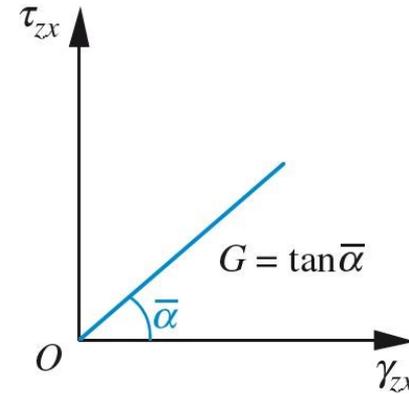
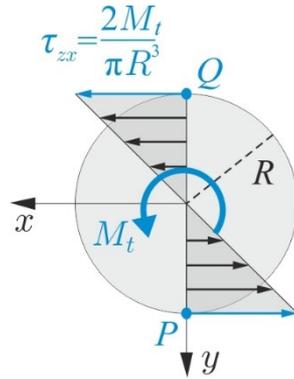
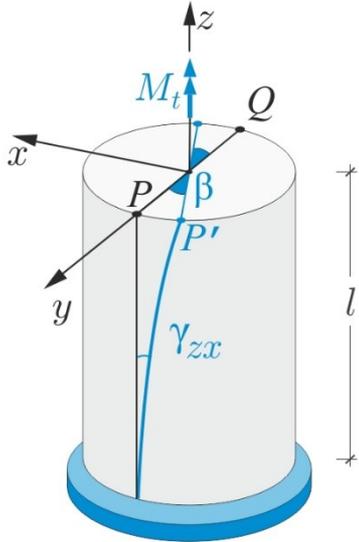
Materiali auxetici (αύξις : aumento)

$$\nu < 0$$



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale a torsione



$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$G = \tan \bar{\alpha} \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare** **Isotropo Omogeneo**: parametri sperimentali

Parametri sperimentali caratteristici (2 soli indipendenti)

$E = \tan \alpha \rightarrow$ Modulo di Young [FL^{-2}]

$G = \tan \bar{\alpha} \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

$\nu \rightarrow$ Modulo di Poisson [0]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



3. Legame 3D: materiale Elastico Lineare Isotropo Omogeneo: parametri sperimentali

Materiale	ρ [kg/m ³]	E [GPa]	ν	α [°C ⁻¹]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$