

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

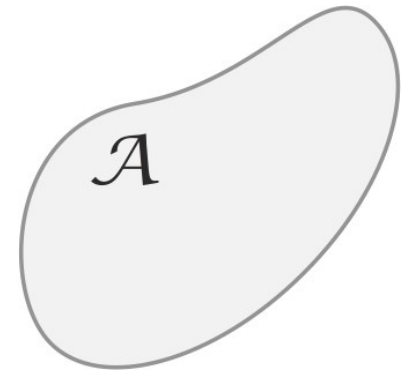
Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



Lezione

1. Geometria delle Aree

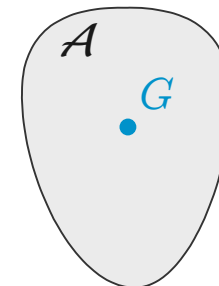
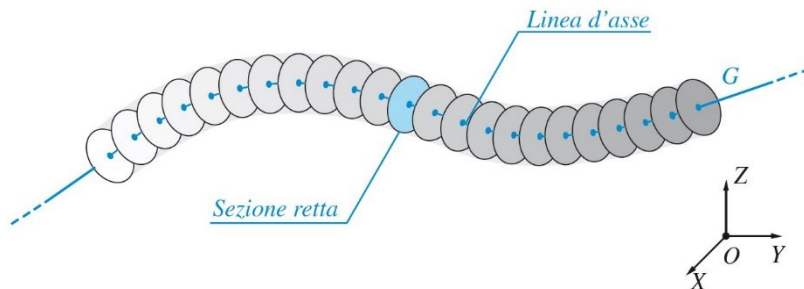
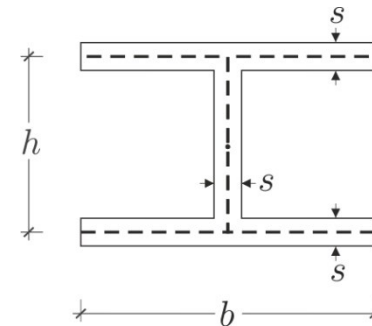
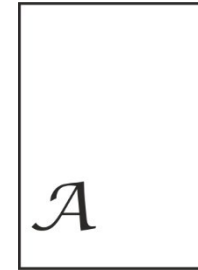
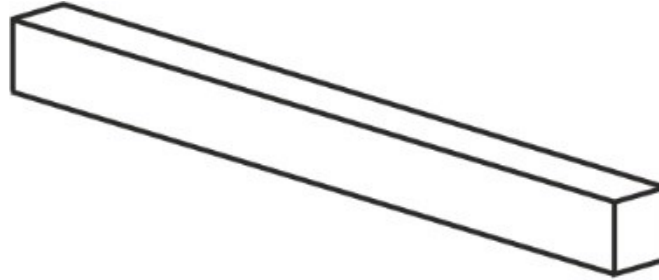


- **Obiettivi**
- **Area e Momenti statici**
- **Centro di figura (baricentro)**
- **Momenti d'inerzia, tensore d'inerzia, momento polare**
- **Assi e Momenti principali d'inerzia, raggi d'inerzia**
- **Formule di trasporto e rotazione**
- **Esercizi** (Esercitazioni E15a-E15b; testo: §A.7-A.9)



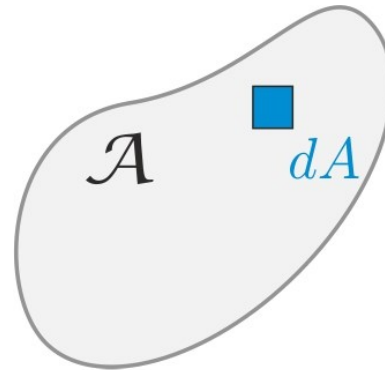
1. Geometria delle aree

Obiettivi: definire le caratteristiche geometriche delle sezioni di trave



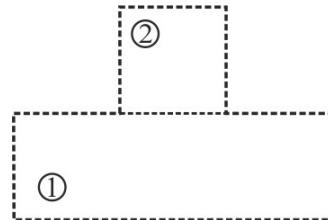
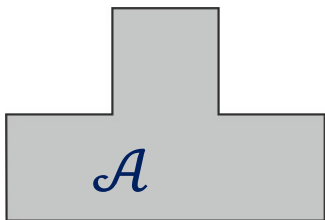
1. Geometria delle aree

Area



$$A = \int_{\mathcal{A}} dA \quad [A] = [L^2]$$
$$A > 0$$

Additività

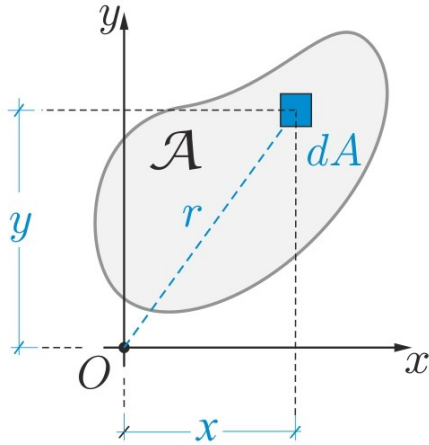


$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \Rightarrow A = A_1 + A_2$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \Rightarrow A = \sum_{i=1}^n A_i$$

1. Geometria delle aree

Momento statico rispetto ad un asse (momento del I ordine)



$$dS_x = y dA$$

$$dS_y = x dA$$

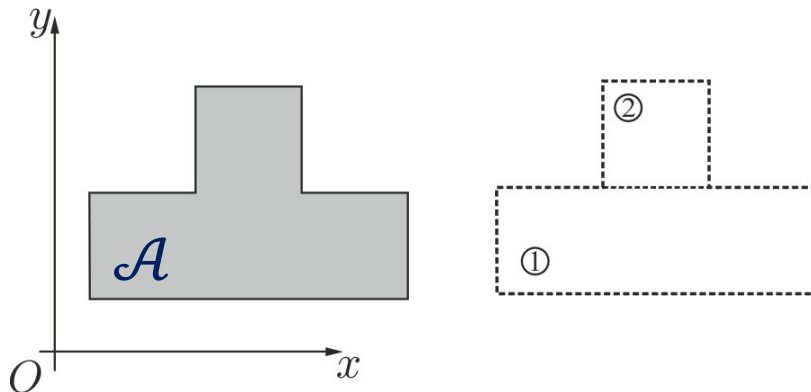
$$S_x = \int_{\mathcal{A}} y dA$$

$$S_y = \int_{\mathcal{A}} x dA$$

$$[S] = [L^3]$$

$$S \leq 0$$

Additività

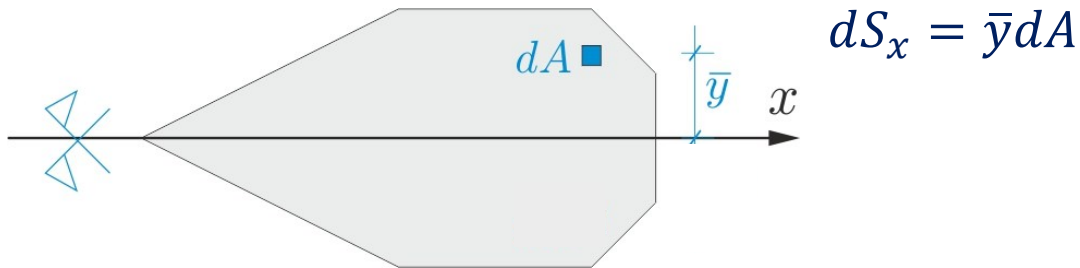


$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \Rightarrow S_x = S_x^1 + S_x^2$$

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i \Rightarrow S_x = \sum_{i=1}^n S_x^i$$

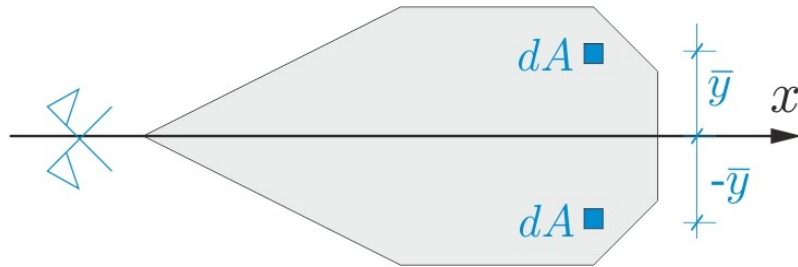
1. Geometria delle aree

Momento statico rispetto ad un asse di simmetria, ad es. x



1. Geometria delle aree

Momento statico rispetto ad un asse di simmetria, ad es. x



$$dS_x = \bar{y}dA$$

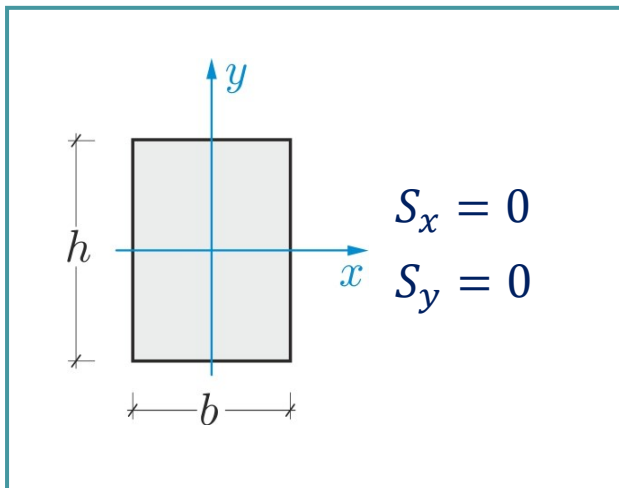
$$S_x = \int_A ydA = 0$$

$$dS_x = -\bar{y}dA$$

$$S_x = 0$$

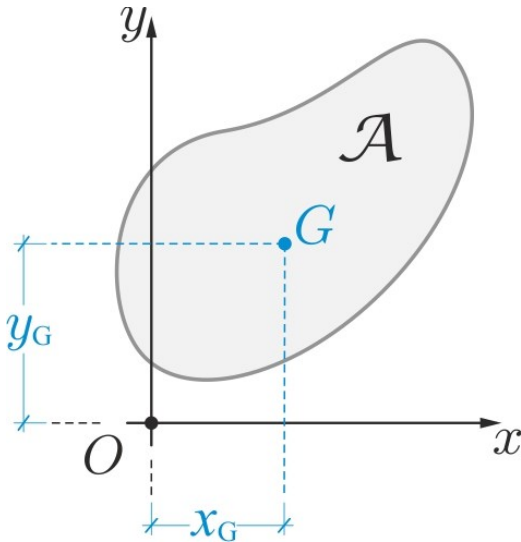
Osservazione 1

Se la figura piana $\mathcal{A}$ è simmetrica, il suo momento statico rispetto all'asse di simmetria è nullo



1. Geometria delle aree

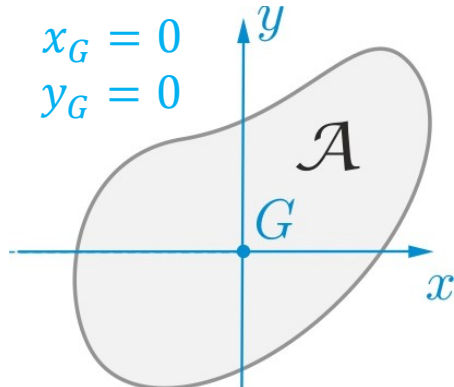
Centro di figura



$$x_G = \frac{\int_{\mathcal{A}} x dA}{\int_{\mathcal{A}} dA} = \frac{S_y}{A} \quad \Rightarrow S_y = Ax_G$$

$$y_G = \frac{\int_{\mathcal{A}} y dA}{\int_{\mathcal{A}} dA} = \frac{S_x}{A} \quad \Rightarrow S_x = Ay_G$$

Assi centrali o baricentrici



$$x_G = 0$$

$$y_G = 0$$

$$S_x = Ay_G = 0$$

$$S_y = Ax_G = 0$$

Osservazione 2

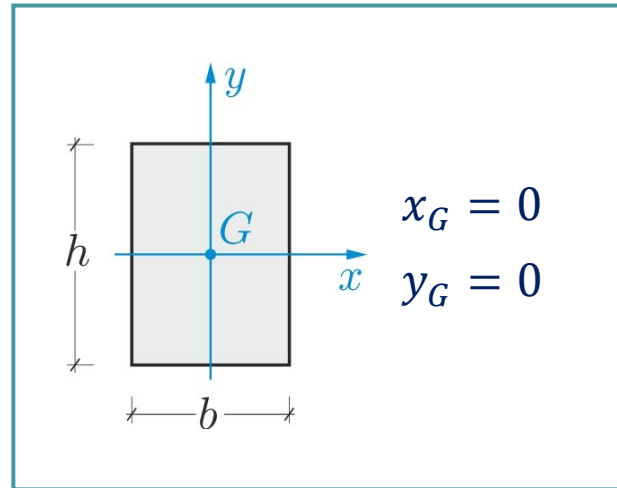
Se un asse è centrale, il momento statico di $\mathcal{A}$ rispetto a tale asse è nullo

Osservazione 3

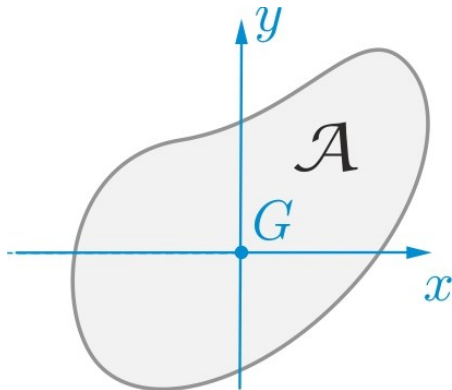
Se un asse è di simmetria per $\mathcal{A}$, tale asse passa per il baricentro: gli assi di simmetria sono anche centrali

1. Geometria delle aree

Esempio



Assi centrali o baricentrici



$$S_x = Ay_G = 0$$

$$S_y = Ax_G = 0$$

Osservazione 2

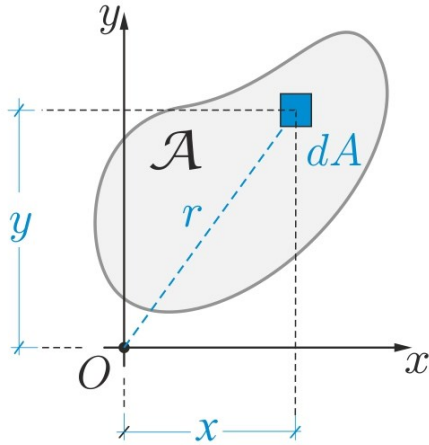
Se un asse è centrale, il momento statico di $\mathcal{A}$ rispetto a tale asse è nullo

Osservazione 3

Se un asse è di simmetria per $\mathcal{A}$, tale asse passa per il baricentro: gli assi di simmetria sono anche centrali

1. Geometria delle aree

Momenti d'inerzia (momenti del II ordine)



$$dI_x = y^2 dA$$

$$I_x = \int_{\mathcal{A}} y^2 dA > 0$$

$$dI_y = x^2 dA$$

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} x^2 dA > 0$$

$$dI_{xy} = xy dA$$

$$I_{xy} = \int_{\mathcal{A}} xy dA \lesseqgtr 0$$

$$I_{xy} = I_{yx}$$

$$[I] = [L^4]$$

Momento d'inerzia polare

$$dI_O = r^2 dA = (x^2 + y^2) dA$$

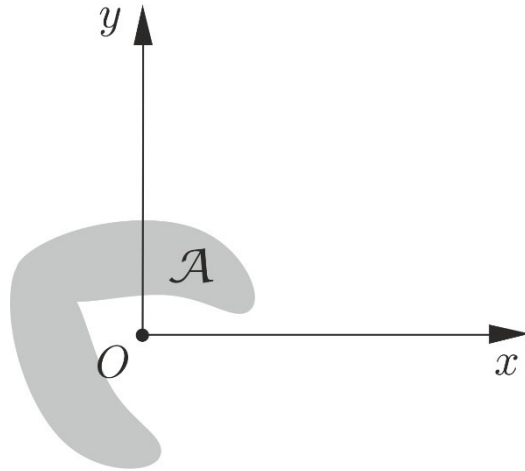
$$I_O = I_r = \int_{\mathcal{A}} r^2 dA = I_x + I_y$$

Tensore d'inerzia

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{A}} y^2 dA & \int_{\mathcal{A}} xy dA \\ \int_{\mathcal{A}} yx dA & \int_{\mathcal{A}} x^2 dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

1. Geometria delle aree

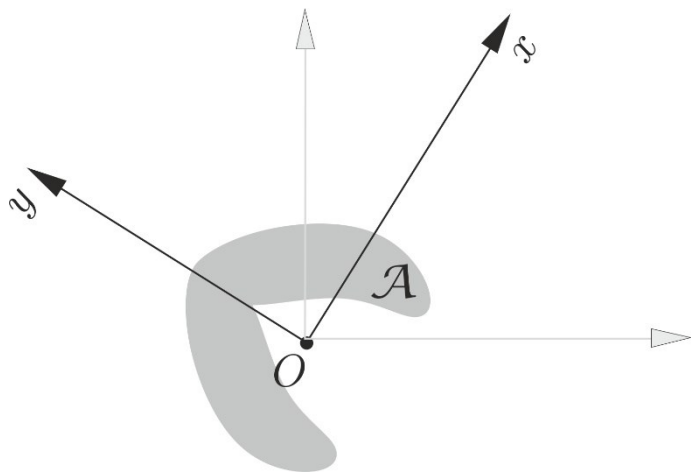
Tensore d'inerzia



$$I_{xy} \neq 0$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

Tensore principale d'inerzia



$$I_{xy} = 0$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}$$

Assi principali d'inerzia:

x, y

Momenti principali d'inerzia:

I_x, I_y

Se $O \equiv G$:

x, y

Assi centrali
principali d'inerzia

1. Geometria delle aree

Momenti e assi principali d'inerzia

$$I_{xy} = \int_{\mathcal{A}} xy dA = 0$$

$$I_x = \int_{\mathcal{A}} y^2 dA > 0$$

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} x^2 dA > 0$$

$$[I] = [L^4]$$

Raggi principali d'inerzia

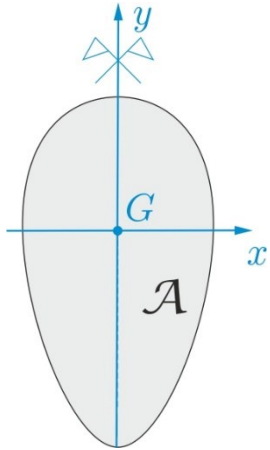
$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad [\rho] = [L]$$

Tensore principale d'inerzia

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}$$

1. Geometria delle aree

Momenti e assi principali d'inerzia in figure con assi di simmetria



$$I_{xy} = \int_{\mathcal{A}} xy dA = 0$$

$$I_x = \int_{\mathcal{A}} y^2 dA > 0$$

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} x^2 dA > 0$$

$$[I] = [L^4]$$

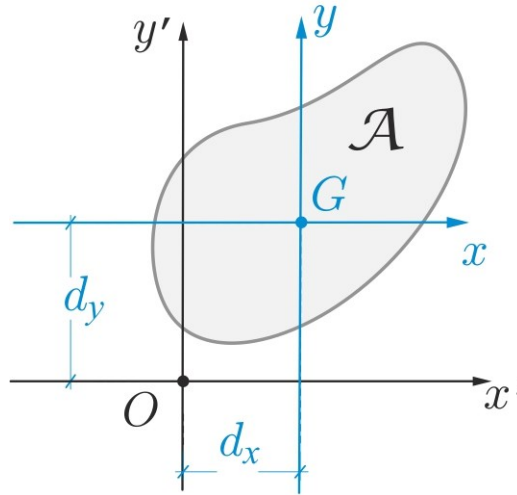
Osservazione 4

Se uno o entrambi gli assi x, y sono di simmetria per $\mathcal{A}$, allora x e y sono principali d'inerzia.

1. Geometria delle aree

Formule di trasporto (Huyghens)

Determinare $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$
in funzione di I_x , I_y , I_{xy}



$$x' = x + d_x$$

$$y' = y + d_y$$

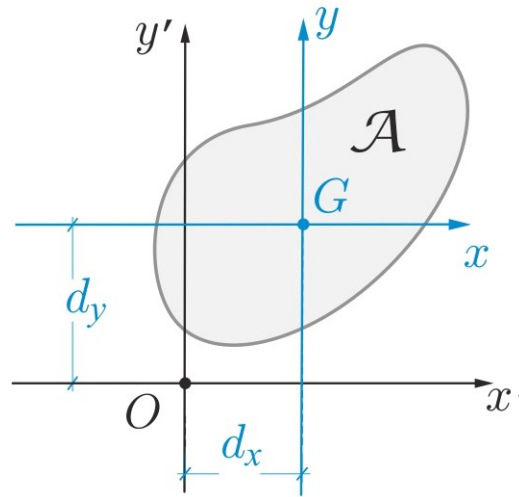
$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A (y + d_y)^2 dA = \int_A (y^2 + d_y^2 + 2yd_y) dA$$

$$I_{x'} = \int_A y^2 dA + d_y^2 \int_A dA + 2d_y \int_A y dA = I_x + d_y^2 A + 2d_y S_x$$

$$I_{x'} = I_x + d_y^2 A$$

1. Geometria delle aree

Formule di trasporto (Huyghens)



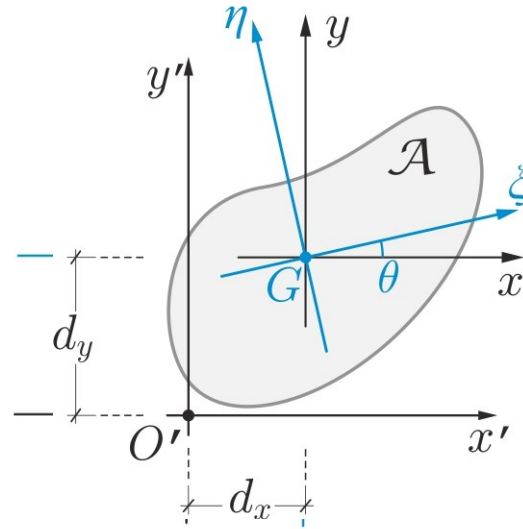
$$I_{x'} = I_x + d_y^2 A$$

$$I_{y'} = I_y + d_x^2 A$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + d_x d_y A$$

1. Geometria delle aree

Formule di Rotazione



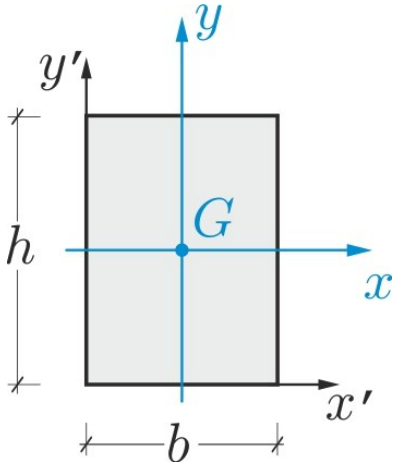
$$I_{\xi} = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$I_{\eta} = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \cos \theta \sin \theta$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (I_x - I_y) \cos \theta \sin \theta$$

1. Geometria delle aree

Rettangolo

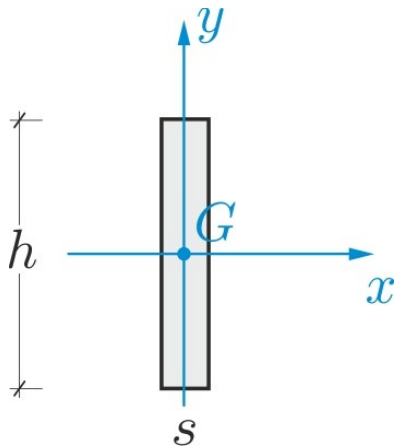


$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

$$I_{xy} = 0$$

Rettangolo sottile ($s \ll h$)



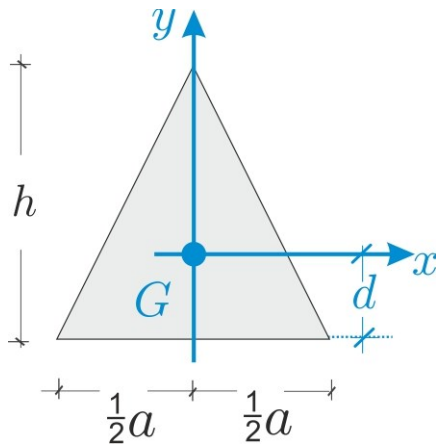
$$I_x = \frac{1}{12} s h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h s^3 \cong 0$$

$$I_{xy} = 0$$

1. Geometria delle aree

Triangolo isoscele



$$A = \frac{1}{2} ah$$

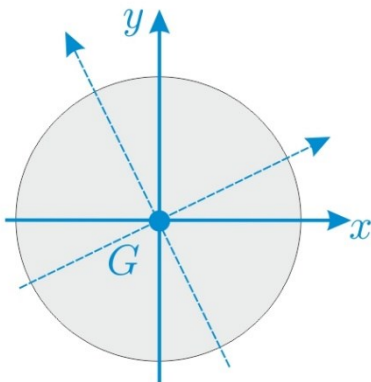
$$d = \frac{1}{3} h$$

$$I_x = \frac{1}{36} ah^3$$

$$I_y = \frac{1}{48} ha^3$$

$$I_{xy} = 0$$

Cerchio di raggio R



$$A = \pi R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$I_r = \frac{1}{2} \pi R^4$$

$$I_{xy} = 0$$