

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020





Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- **Definizioni, ipotesi**
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- **Cinematica del continuo 3D**
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- **Statica del del continuo 3D**
- Materiale costitutivo
- Problema elastico



Lezione

2. Statica del continuo 3D

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
- **Modello delle forze interne (Cauchy)**
 - vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$
 - Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$
 - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Tensioni e direzioni principali**



2. Statica del continuo 3D: Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)



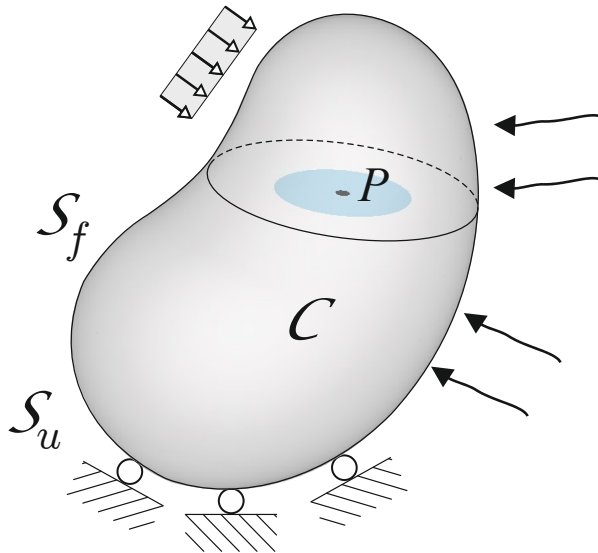
Cauchy, L.A.: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. *Bulletin des Sciences par la Société Philomatique*, 1823.

Lettura: E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, 1981 - §11.4-11.5 (vedi www.pcasini.it/disg/sdc)

2. Statica del continuo 3D: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in un continuo in risposta alle azioni meccaniche esterne.

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



$S = \partial C$: frontiera $S = S_u \cup S_f$

S_u : frontiera vincolata

S_f : frontiera libera

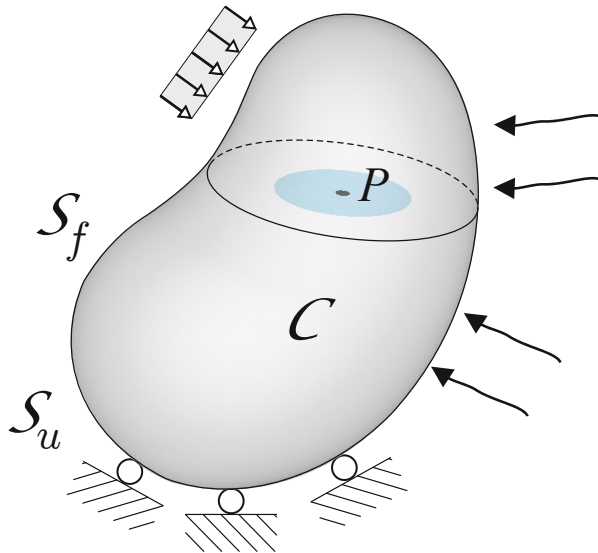
Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*)

2. Statica del continuo 3D: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in un continuo in risposta alle azioni meccaniche esterne.

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Ipotesi

Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata) C

$S = \partial C$: frontiera $S = S_u \cup S_f$

S_u : frontiera vincolata

S_f : frontiera libera

2. Statica del continuo 3D: forze esterne

Densità di forze esterne di volume: $\mathbf{b}(P), P \in \mathcal{C} \quad [FL^{-3}]$

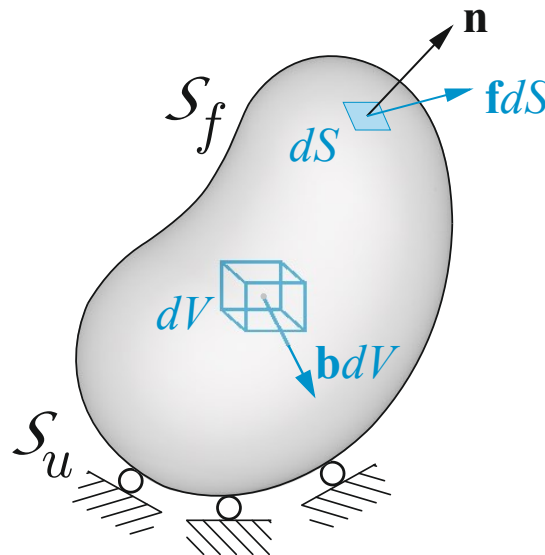
$$\mathbf{b}(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\Delta V}, \quad P \in \mathcal{C}$$

Es. Forze a distanza: campo gravitazionale, forze apparenti (forze d'inerzia), campo elettromagnetico etc

Densità di forze esterne di superficie: $\mathbf{f}(P), P \in \mathcal{S} \quad [FL^{-2}]$

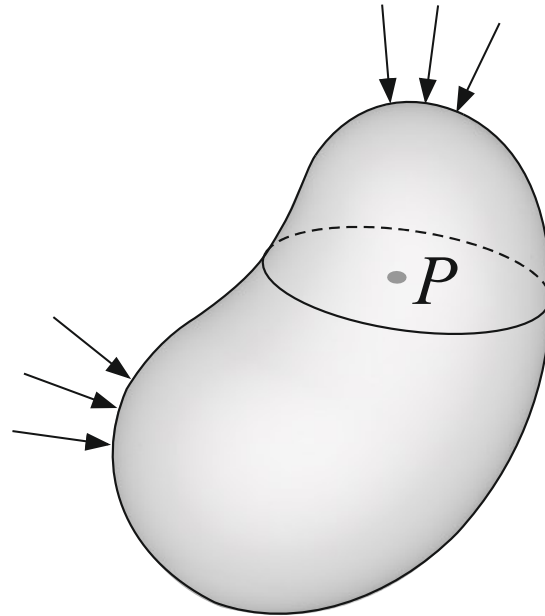
$$\mathbf{f}(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S}, \quad P \in \mathcal{S}$$

Es. Forze di contatto: pressione di fluidi, forze vincolari etc



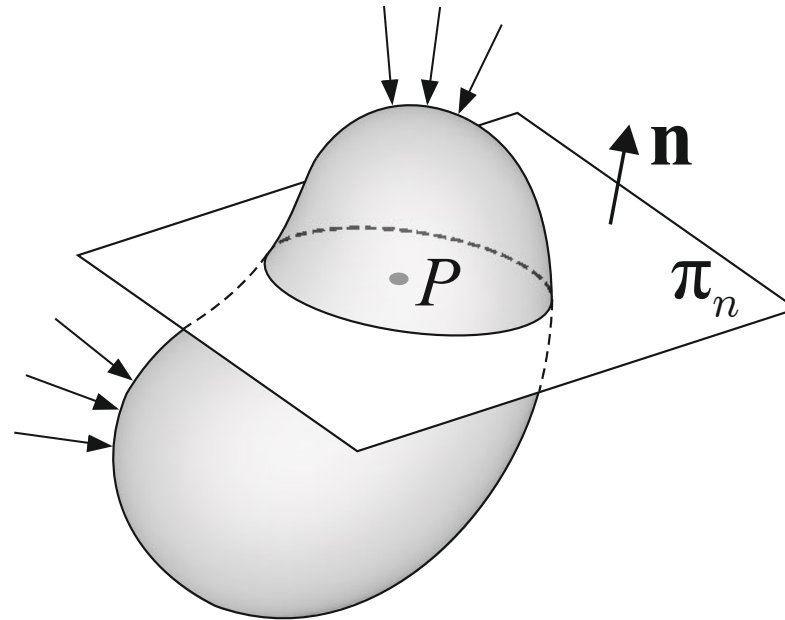
2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy: considerazioni preliminari



2. Statica del continuo 3D: forze interne

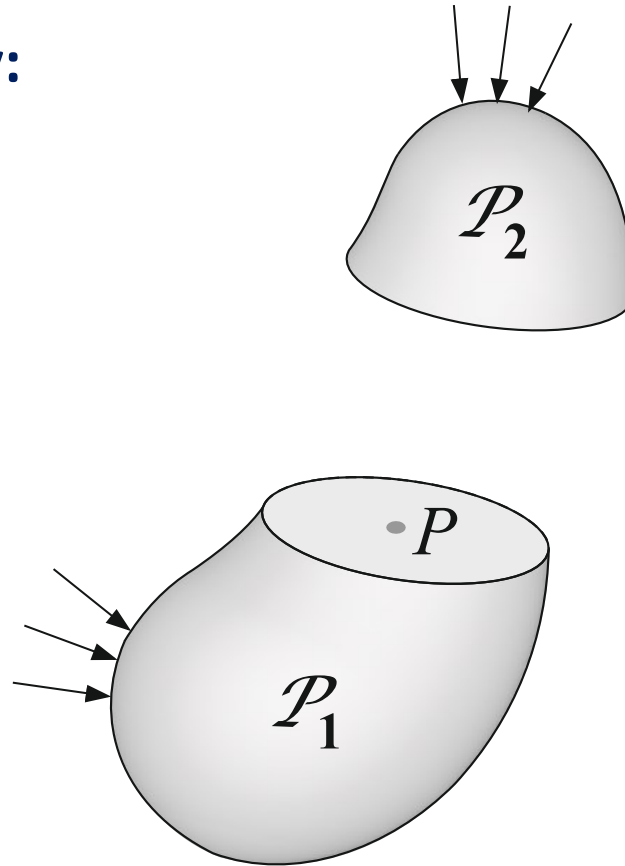
Modello di Cauchy: considerazioni preliminari



π_n *uno degli ∞^2 piani ideali passanti per P, individuato dal versore $\mathbf{n}$ perpendicolare al piano stesso (giacitura π_n)*

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy:

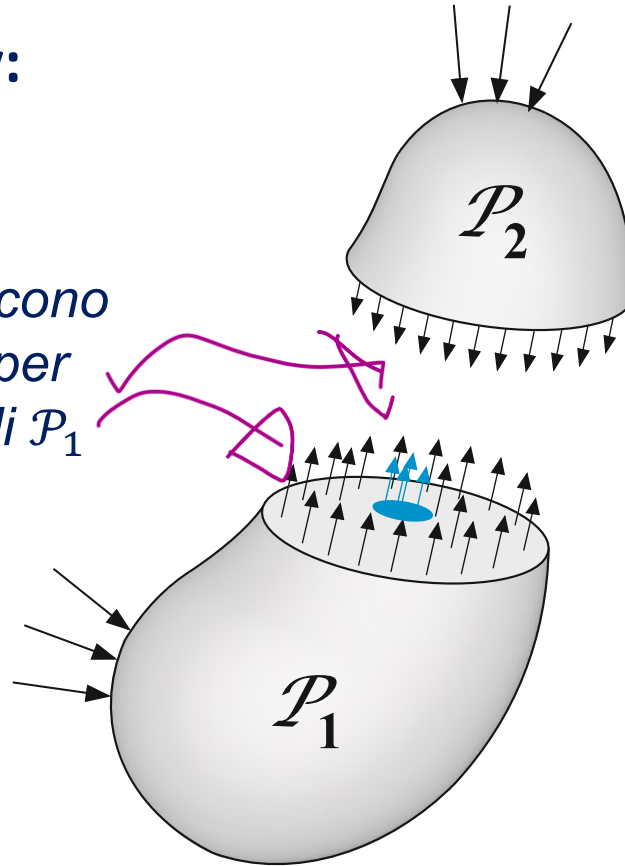


Le porzioni $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ non sarebbero in equilibrio se fosse effettuato un taglio reale.

2. Statica del continuo 3D: forze interne

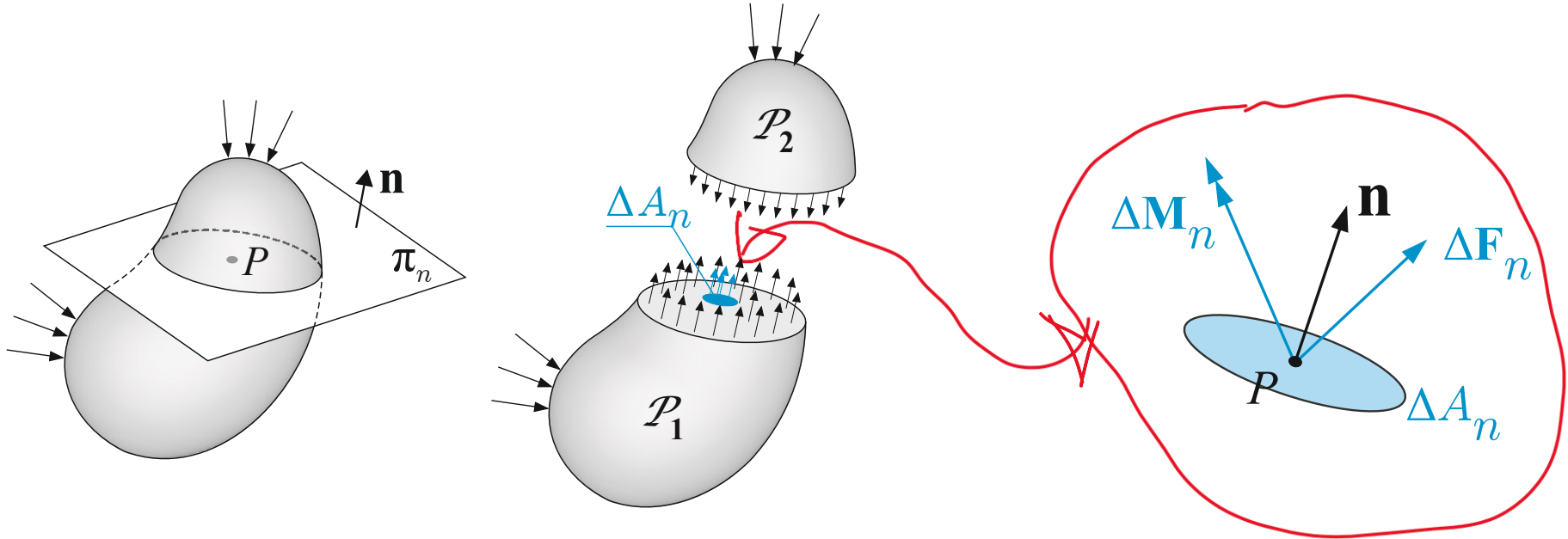
Modello di Cauchy:

*forze interne che nascono
sulle facce del taglio per
garantire l'equilibrio di $\mathcal{P}_1$
e $\mathcal{P}_2$ in accordo con il
postulato di Eulero*



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



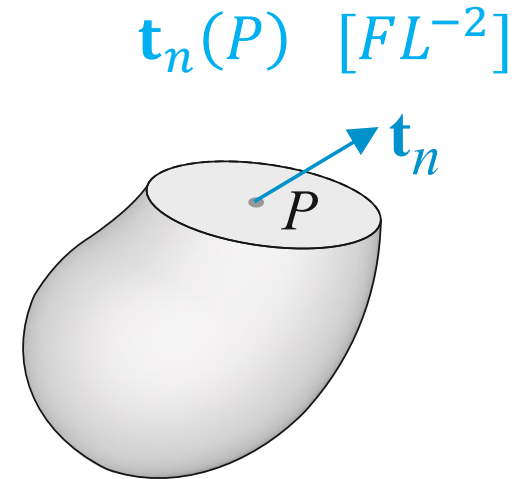
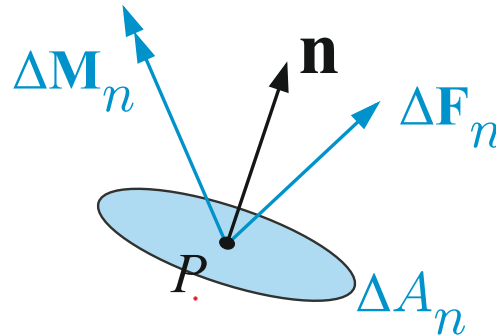
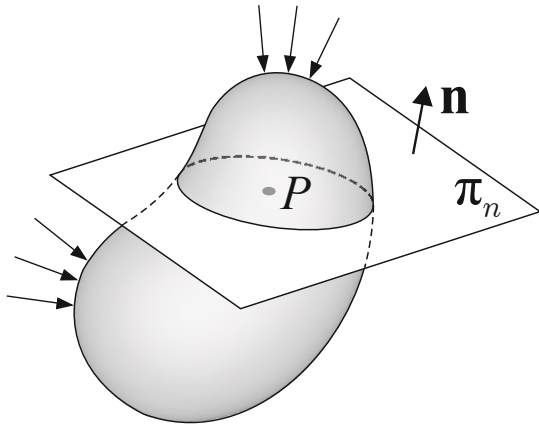
ΔA_n area di un intorno finito ΔS_n del punto P sulla giacitura π_n

$\Delta \mathbf{F}_n$ risultante delle forze interne agenti sull'intorno ΔS_n del punto P

$\Delta \mathbf{M}_n$ momento risultante delle forze interne agenti sull'intorno ΔS_n di P

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



Modello di Cauchy: esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n} = \mathbf{t}_n(P)$$

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta A_n} = \mathbf{0}$$

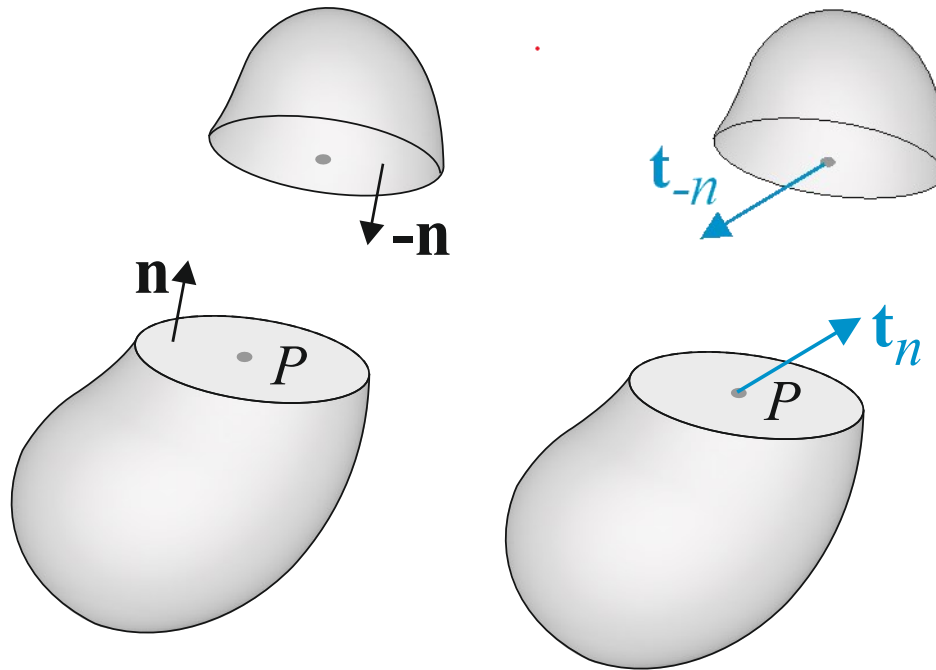
2. Statica del continuo 3D: forze interne

Vettore della tensione di Cauchy:

$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$

Il vettore della tensione dipende non solo dal posto P ma anche dalla giacitura π_n (ce ne sono ∞^2 passanti per P).

Lemma di Cauchy: $\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

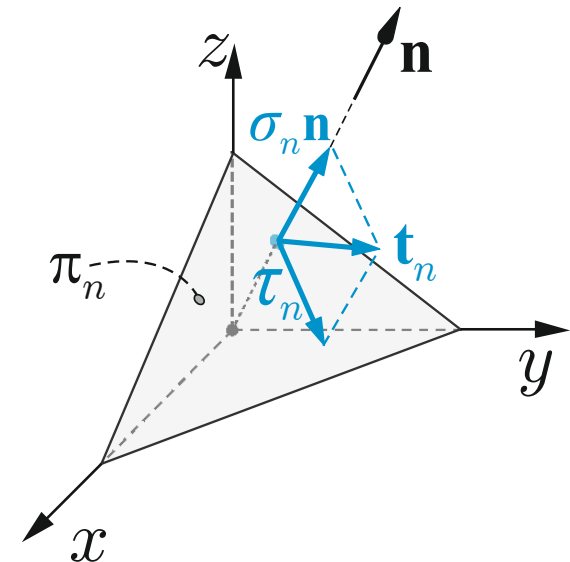
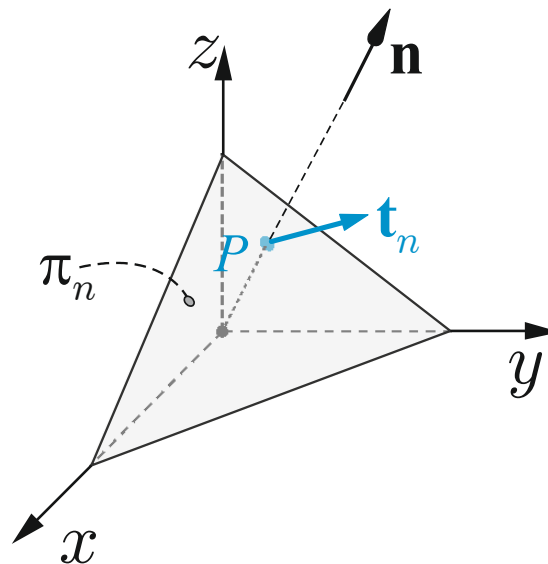
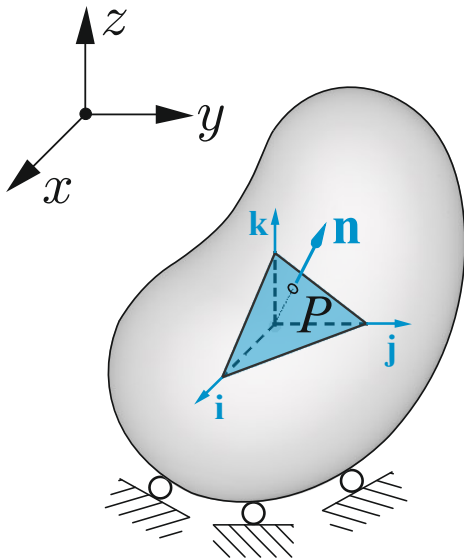
2. Statica del continuo 3D: forze interne

Decomposizione del vettore della tensione: Tensione normale e tangenziale

$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$$

$\sigma_n \rightarrow$ tensione normale [FL^{-2}]

$\boldsymbol{\tau}_n \rightarrow$ vettore della tensione tangenziale [FL^{-2}]



2. Statica del continuo 3D: forze interne

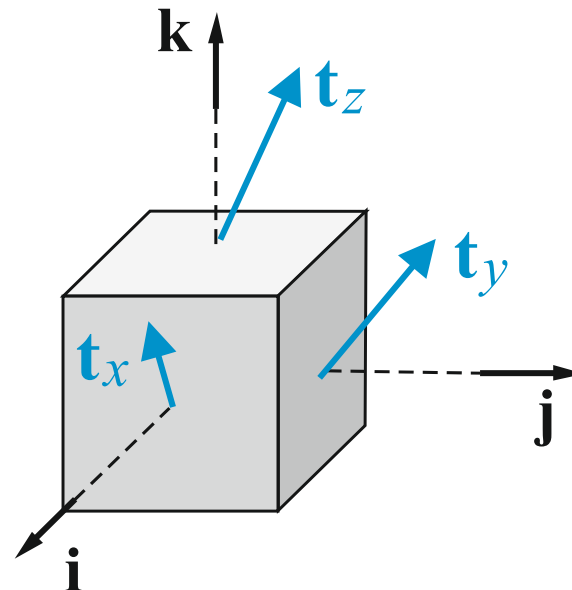
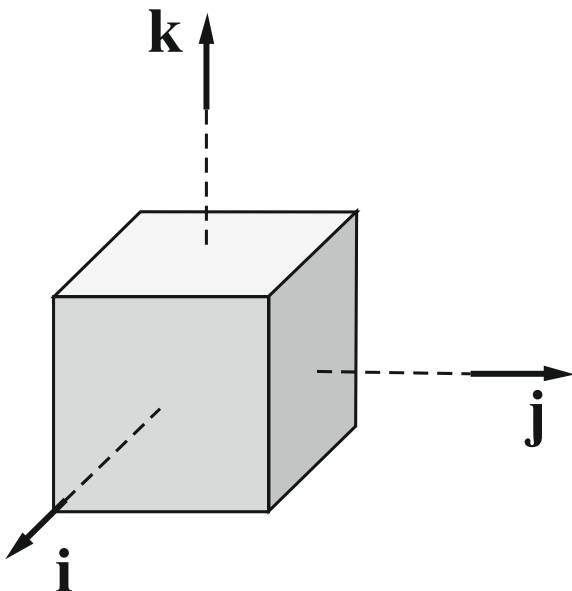
Decomposizione del vettore della tensione:

Componenti speciali di tensione

$\mathbf{t}_x(P)$ *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse x (normale uscente $\mathbf{n} = \mathbf{i}$)*

$\mathbf{t}_y(P)$ *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse y (normale uscente $\mathbf{n} = \mathbf{j}$)*

$\mathbf{t}_z(P)$ *vettore tensione agente sul piano perpendicolare all'asse z (normale uscente $\mathbf{n} = \mathbf{k}$)*



2. Statica del continuo 3D: forze interne

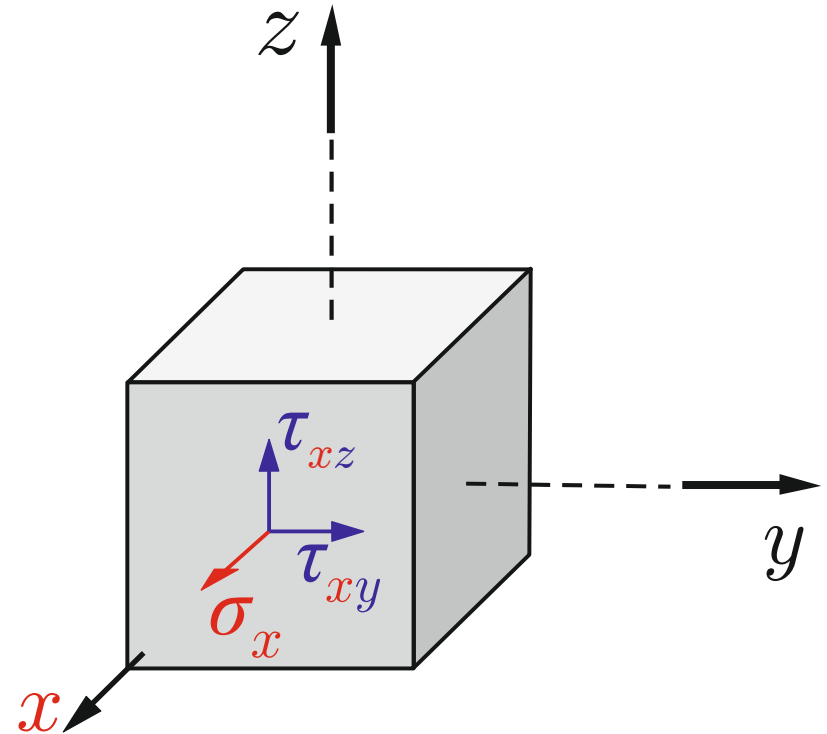
Decomposizione del vettore della tensione: Componenti scalari

$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$\sigma_x \rightarrow$ tensione normale agente sul piano di normale x

$\tau_{xy} \rightarrow$ tensione tangenziale agente sul piano di normale x e parallela all'asse y

$\tau_{xz} \rightarrow$ tensione tangenziale agente sul piano di normale x e parallela all'asse z



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Decomposizione del vettore della tensione: Componenti scalari

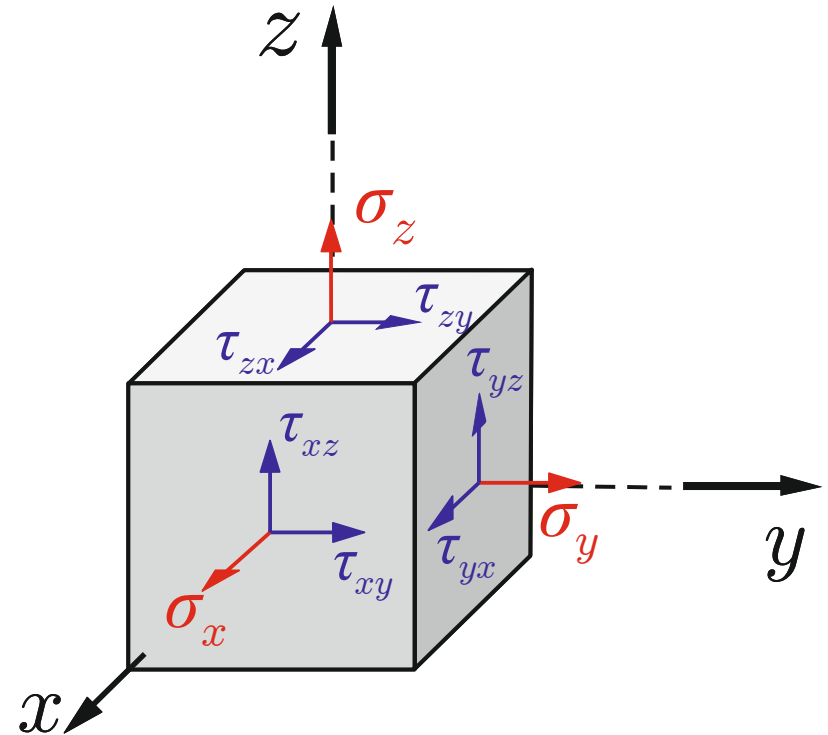
$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_y(P) = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_z(P) = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}$$

$\sigma_i \rightarrow$ tensioni normali
perpendicolari ai piani
coordinati

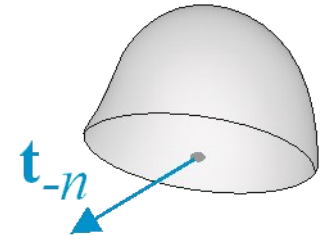
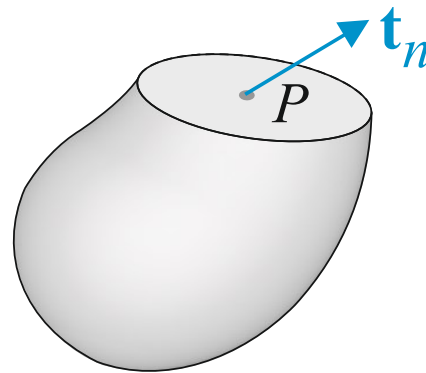
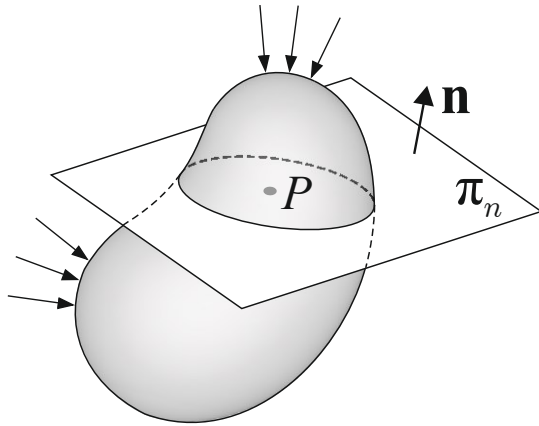
$\tau_{ij} \rightarrow$ tensioni tangenziali
parallele ai piani
coordinati



2. Statica del continuo 3D: forze interne

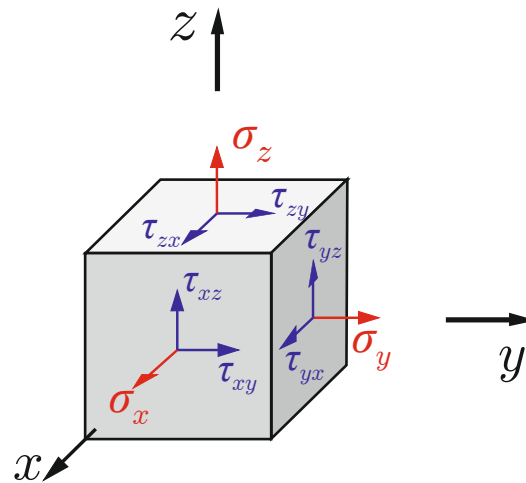
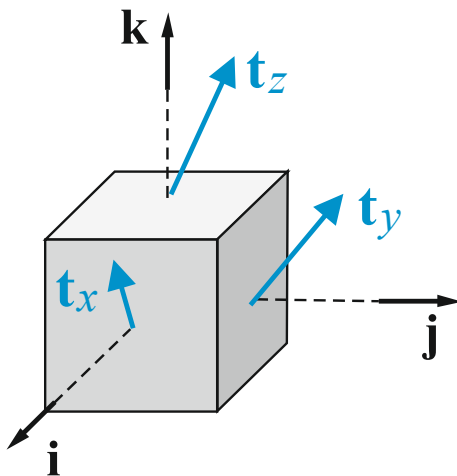
Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$

$$\mathbf{t}_n(P) \quad [FL^{-2}]$$



$$\mathbf{t}_{-n}(P) = -\mathbf{t}_n(P)$$

Modello di Cauchy: componenti speciali della tensione

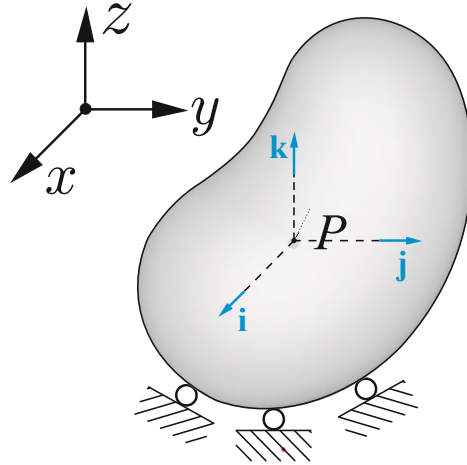


$\sigma_i \rightarrow$ tensioni normali
perpendicolari ai piani
coordinati

$\tau_{ij} \rightarrow$ tensioni tangenziali
parallele ai piani
coordinati

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Tensore della tensione secondo Cauchy



$$P \equiv (x, y, z)$$

$$\mathbf{T}(P) = [\mathbf{t}_x(P) \quad \mathbf{t}_y(P) \quad \mathbf{t}_z(P)]$$

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

σ_i Tensioni normali

τ_{ij} Tensioni tangenziali

Dim. fisiche $[FL^{-2}]$



1. CONFRONTO Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle misure di deformazione

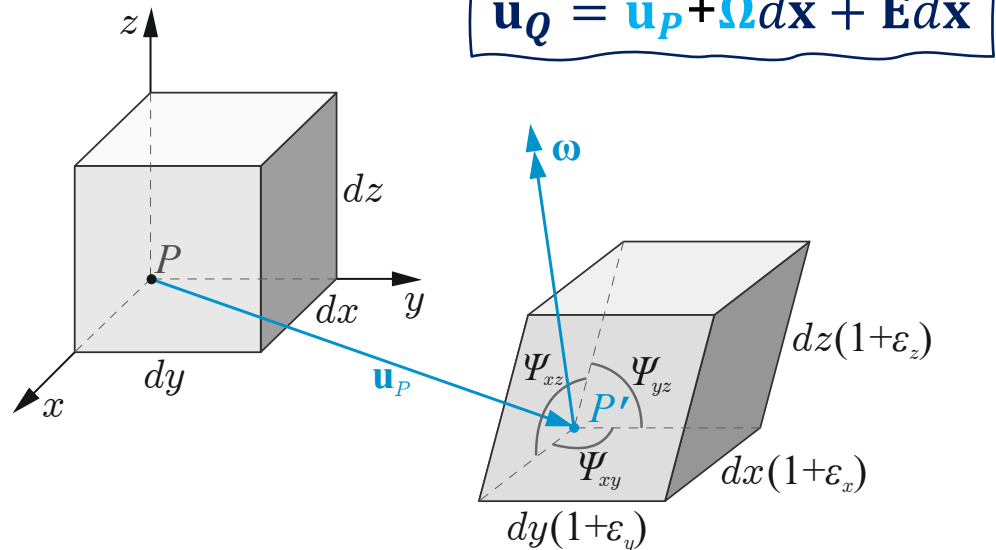
Dilatazioni assiali $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ (variazioni di dimensione)

rappresentano le dilatazioni assiali delle fibre poste secondo le direzioni x , y e z rispettivamente

Scorrimenti angolari $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (variazioni di forma)

rappresentano le variazioni angolari delle fibre disposte, prima della deformazione, secondo le direzioni (x, y) , (x, z) e (y, z) , rispettivamente

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$



Tensore della tensione secondo Cauchy

$\mathbf{T}(P) \rightarrow$ dipende solo dal posto P e non dalla giacitura

$\mathbf{T}(P) \in \text{symm} \rightarrow$ è simmetrico: $\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$ (cfr. eq. indefinite di equilibrio)

Essendo $T_{ij} = T_{ji}$, le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili, $[T_{ij}] = [FL^{-2}]$

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano le seguenti tre funzioni:

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2 \rightarrow \text{Invarianti della tensione}$$

$$I_3 = \det(\mathbf{T})$$

Formula di Cauchy

E' possibile esprimere $\mathbf{t}_n(P)$ in funzione di $\mathbf{t}_x(P)$, $\mathbf{t}_y(P)$, $\mathbf{t}_z(P)$?

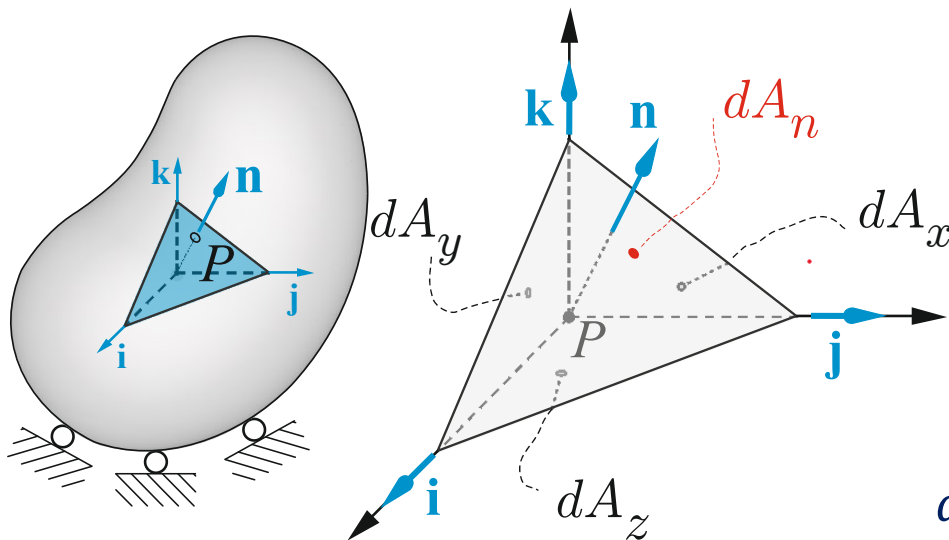
Che relazione sussiste tra $\mathbf{t}_n(P)$ e $\mathbf{T}(P)$?

Che relazione sussiste tra $\mathbf{T}(P)$ e le forze di superficie nei punti appartenenti alla frontiera del corpo?

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

Tetraedro di Cauchy: geometria



$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

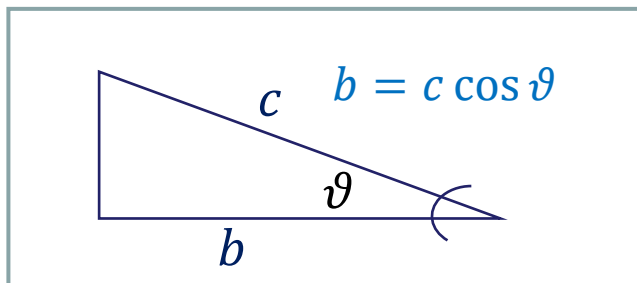
$$\alpha = \cos(nx), \beta = \cos(ny),$$

$$\gamma = \cos(nz)$$

$$dA_x = dA_n \cos(nx) \rightarrow \frac{dA_x}{dA_n} = \alpha$$

$$dA_y = dA_n \cos(ny) \rightarrow \frac{dA_y}{dA_n} = \beta$$

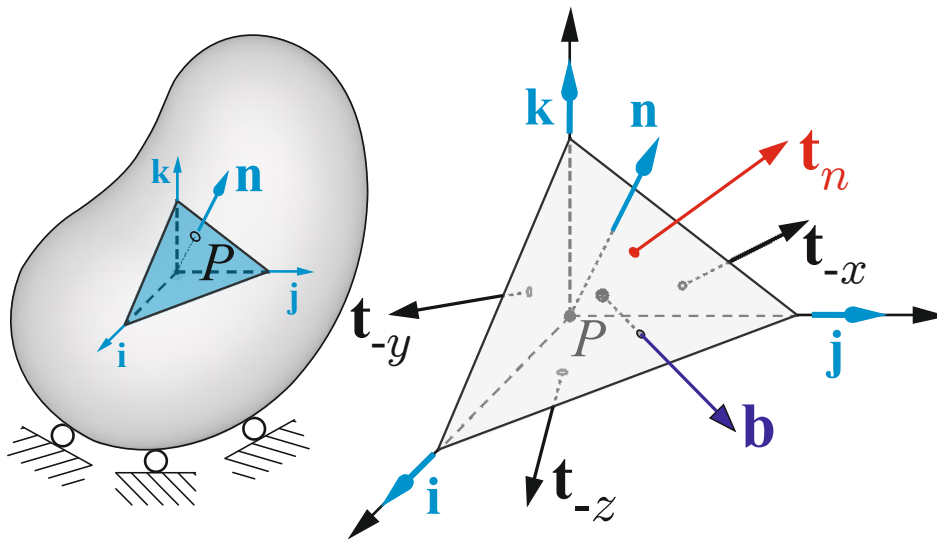
$$dA_z = dA_n \cos(nz) \rightarrow \frac{dA_z}{dA_n} = \gamma$$



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

Tetraedro di Cauchy: forze agenti



Postulato di Eulero

Se il corpo continuo è in equilibrio, è in equilibrio ogni sua parte e quindi anche l'intorno 'tetraedro' del punto P

Forze di volume

$$d\mathbf{F}_v = \mathbf{b}(P)dV$$

Forze di superficie sulle 4 facce

Giacitura π_n (normale uscente: $\mathbf{n}$)

$$d\mathbf{F}_n = \mathbf{t}_n(P)dA_n$$

Giacitura π_x (normale uscente: $-\mathbf{i}$)

$$d\mathbf{F}_x = \mathbf{t}_{-x}(P)dA_x$$

Giacitura π_y (normale uscente: $-\mathbf{j}$)

$$d\mathbf{F}_y = \mathbf{t}_{-y}(P)dA_y$$

Giacitura π_z (normale uscente: $-\mathbf{k}$)

$$d\mathbf{F}_z = \mathbf{t}_{-z}(P)dA_z$$



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

Tetraedro di Cauchy: 1° Equazione cardinale della statica $\mathbf{R} = \mathbf{0}$

$$d\mathbf{F}_n + d\mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_y + d\mathbf{F}_z + d\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P)dA_n + \mathbf{t}_{-x}(P)dA_x + \mathbf{t}_{-y}(P)dA_y + \mathbf{t}_{-z}(P)dA_z + \mathbf{b}(P)dV = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P) + \mathbf{t}_{-x}(P) \frac{dA_x}{dA_n} + \mathbf{t}_{-y}(P) \frac{dA_y}{dA_n} + \mathbf{t}_{-z}(P) \frac{dA_z}{dA_n} + \mathbf{b}(P) \frac{dV}{dA_n} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P) + \mathbf{t}_{-x}(P)\alpha + \mathbf{t}_{-y}(P)\beta + \mathbf{t}_{-z}(P)\gamma = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{t}_n(P) = -\mathbf{t}_{-x}(P)\alpha - \mathbf{t}_{-y}(P)\beta - \mathbf{t}_{-z}(P)\gamma$$

Lemma di Cauchy

$$\mathbf{t}_{-x} = -\mathbf{t}_x,$$

$$\mathbf{t}_{-y} = -\mathbf{t}_y,$$

$$\mathbf{t}_{-z} = -\mathbf{t}_z$$

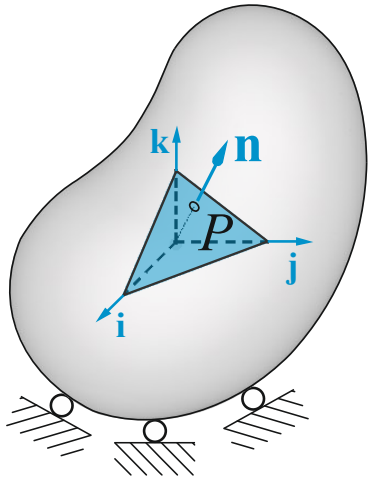
$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{t}_x(P)\alpha + \mathbf{t}_y(P)\beta + \mathbf{t}_z(P)\gamma$$

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy in forma vettoriale

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\mathbf{t}_n = \alpha \mathbf{t}_x + \beta \mathbf{t}_y + \gamma \mathbf{t}_z$$



Il vettore della tensione su una generica giacitura π_n è combinazione lineare dei vettori tensione sulle giaciture perpendicolari agli assi coordinati.

I coefficienti della combinazione lineare sono le componenti del versore $\mathbf{n}$ che individua la giacitura π_n

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy :

Componenti scalari dei vettori

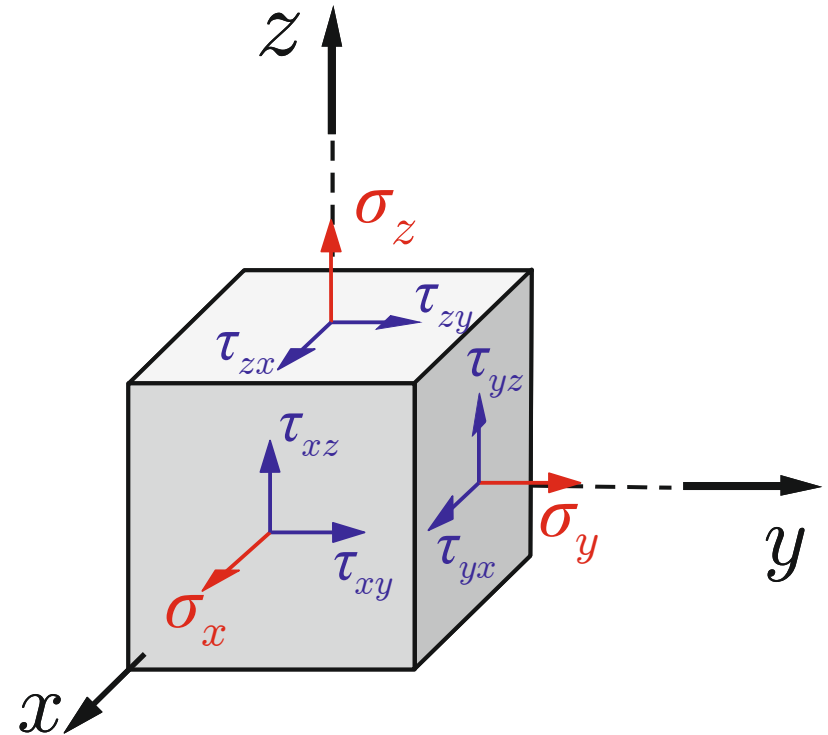
$$\mathbf{t}_x(P) = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_y(P) = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{t}_z(P) = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k}$$

$\sigma_i \rightarrow$ tensioni normali
perpendicolari ai piani
coordinati

$\tau_{ij} \rightarrow$ tensioni tangenziali
parallele ai piani
coordinati

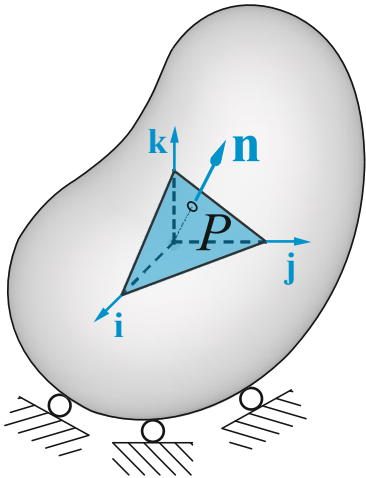


2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy in forma matriciale e compatta

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\mathbf{t}_n = \alpha \mathbf{t}_x + \beta \mathbf{t}_y + \gamma \mathbf{t}_z$$



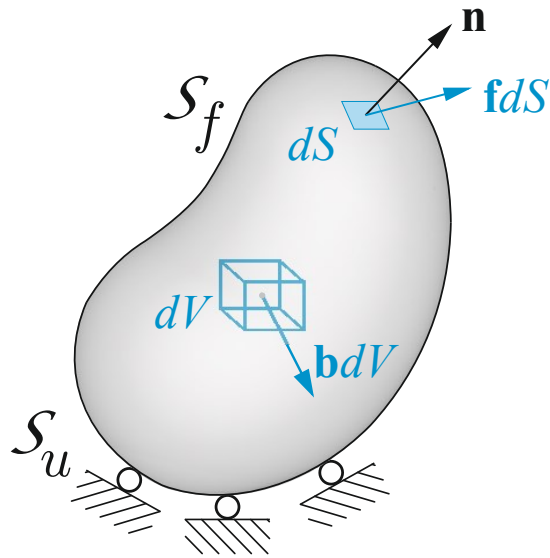
$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}(P) \mathbf{n}$$

$$P \in \mathcal{C}$$

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy sulla frontiera del corpo



$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}_a(P), \quad P \in S_f$$

$$\mathbf{T}(\dot{P})\mathbf{n} = \mathbf{f}_r(P), \quad P \in S_u$$

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

$\mathbf{T}(P) \rightarrow$ dipende solo dal posto P e non dalla giacitura

$\mathbf{T}(P) \in \text{symm} \rightarrow$ è simmetrico: $\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$ (cfr. eq. indefinite di equilibrio)

Essendo $T_{ij} = T_{ji}$, le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano gli invarianti della tensione



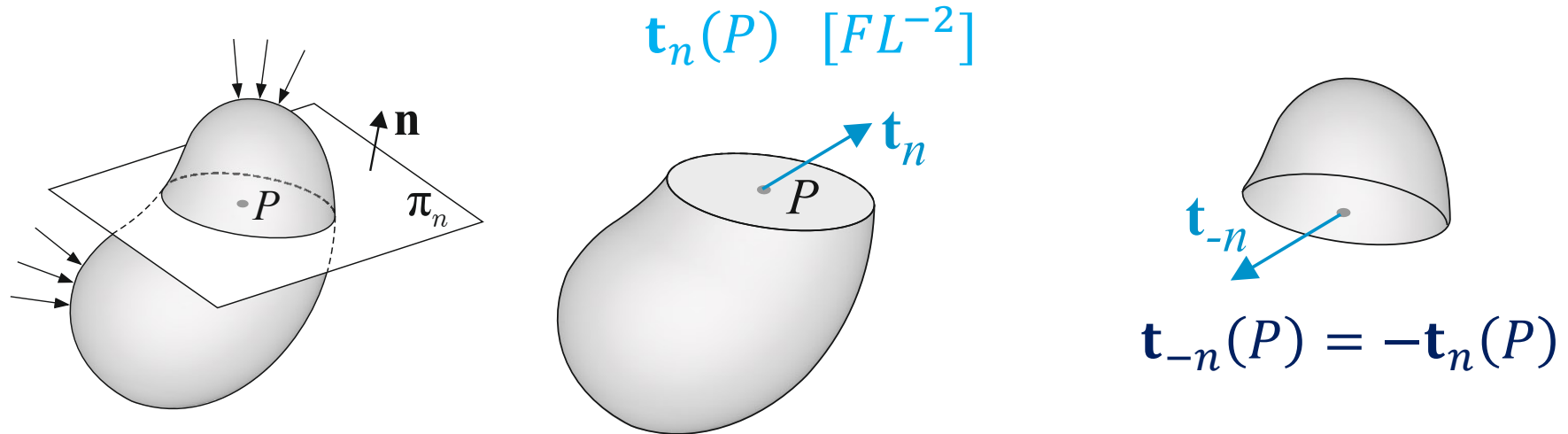
Lezione

2. Statica del continuo 3D

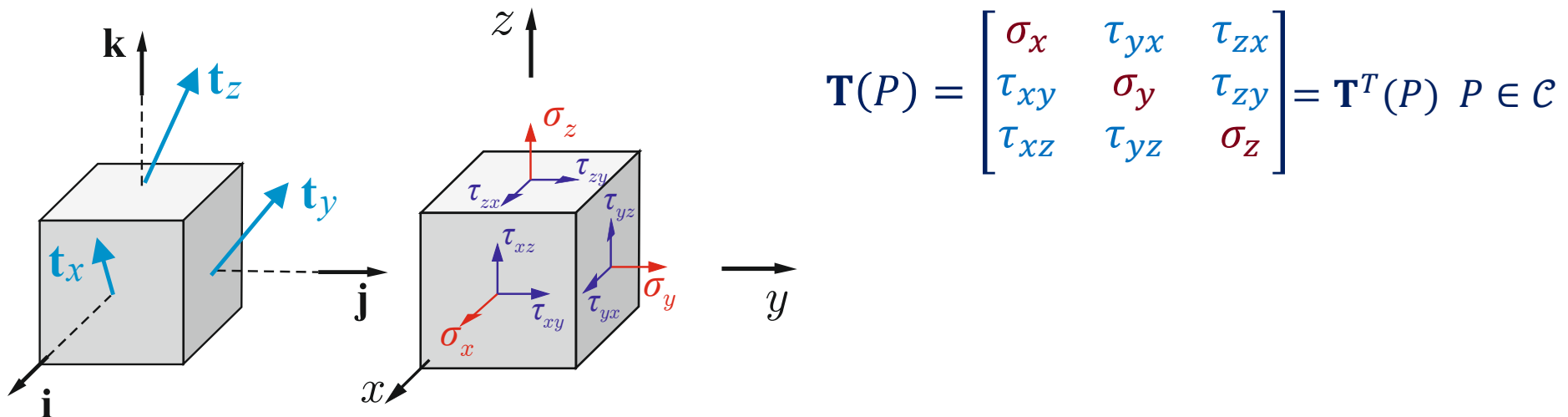
- Obiettivi
- Modello delle forze esterne
- Modello delle forze interne (Cauchy)
 - vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$
 - Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$
 - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Tensioni e direzioni principali**

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



Modello di Cauchy: Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

Formula di Cauchy: il vettore della tensione in P secondo la giacitura individuata dal versore $\mathbf{n}$ è data dal tensore della tensione in P applicato al versore $\mathbf{n}$. Quindi per rappresentare in modo completo le forze interne agenti in P è sufficiente conoscere il tensore della tensione in P (stato tensionale in P).

Il vettore $\mathbf{t}_n(P)$ dipende linearmente da $\mathbf{n}$.

Il tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$ (e quindi $\mathbf{t}_n(P)$) si suppone continuo e derivabile con continuità rispetto a P .

In corrispondenza di ogni punto P sulla frontiera, detto $\mathbf{n}$ il versore normale alla frontiera in P e $\mathbf{f}$ l'eventuale densità di forza esterna di superficie agente in P , risulta:

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne (modello di Cauchy) e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'equilibrio.

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne (modello di Cauchy) e le forze esterne affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

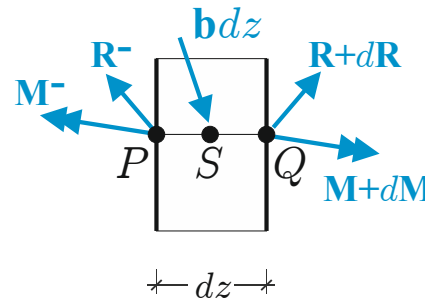
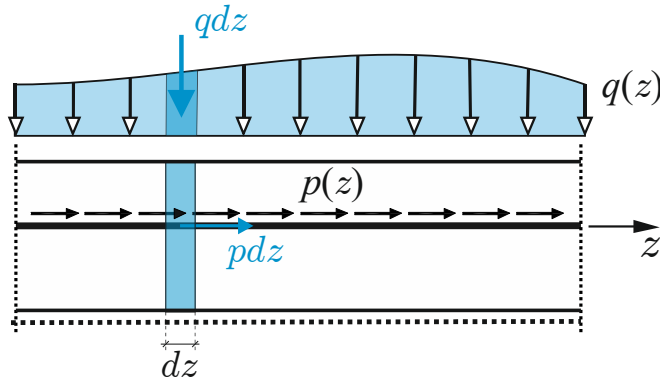
Ipotesi

Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata) C

3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*



$$\mathbf{PQ} = dz \mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2} \mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

$$\mathbf{R}^- + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + b dz = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}^- + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times b dz = \mathbf{0}$$

Lemma di Cauchy

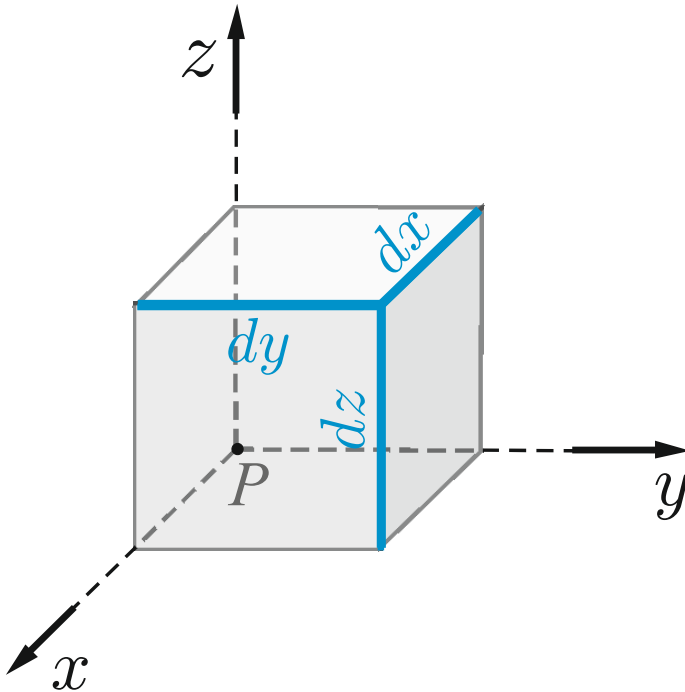
$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

Geometria dell'elemento parallelepipedo infinitesimo



$$dV = dx \, dy \, dz$$

$$dA_x = dy \, dz$$

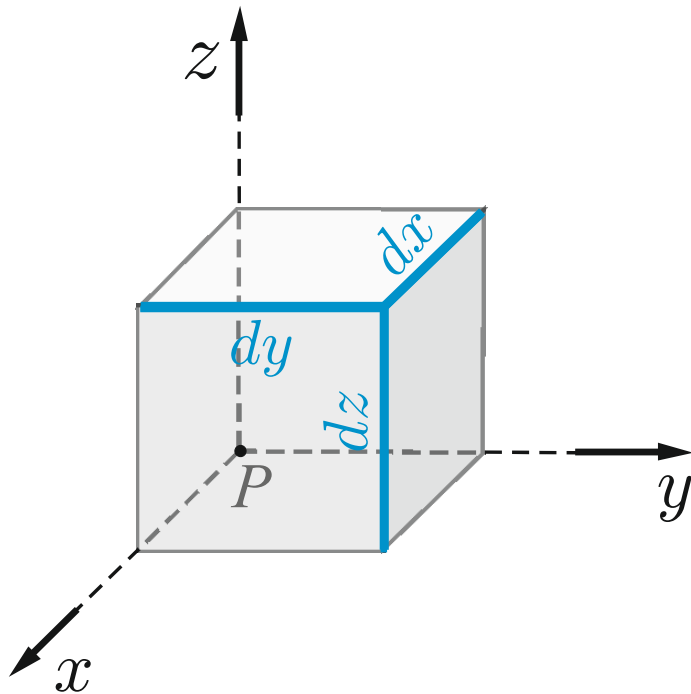
$$dA_y = dx \, dz$$

$$dA_z = dx \, dy$$

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo del continuo devono verificare le equazioni cardinali della statica*

Forze agenti sull'elemento



Forze esterne di volume: $dF_v = \mathbf{b}(P)dV$

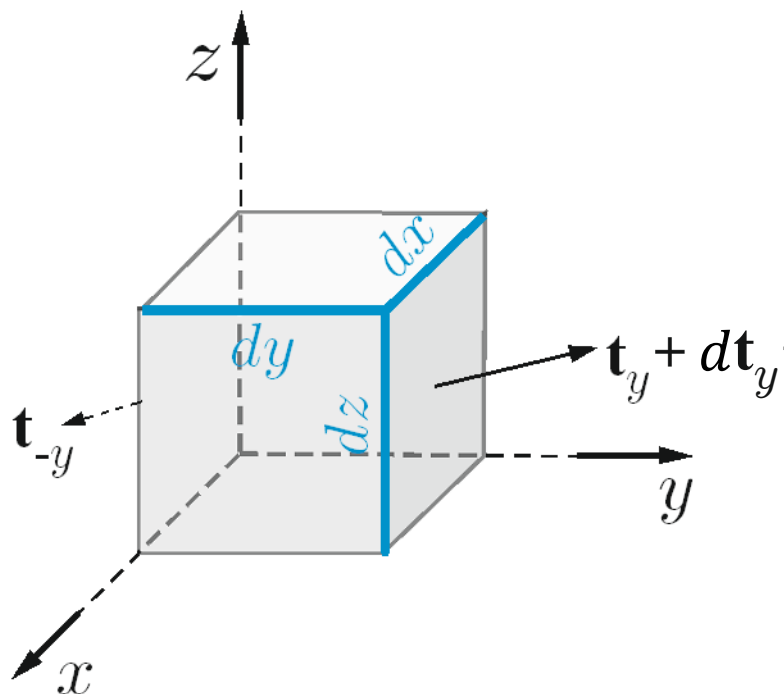
Forze di superficie sulle due facce normali all'asse x: dF_x

Forze di superficie sulle due facce normali all'asse y: dF_y

Forze di superficie sulle due facce normali all'asse z: dF_z

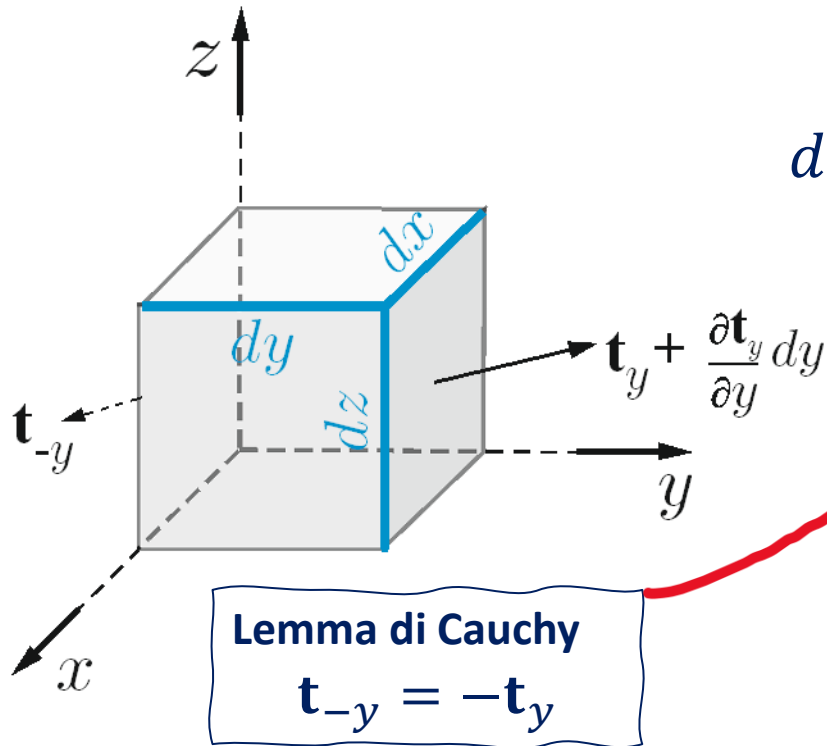
2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Forze di superficie sulle due facce normali all'asse y



2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Forze di superficie sulle due facce normali all'asse y



$$d\mathbf{F}_y = \mathbf{t}_{-y} dA_y + \left(\mathbf{t}_y + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy \right) dA_y =$$

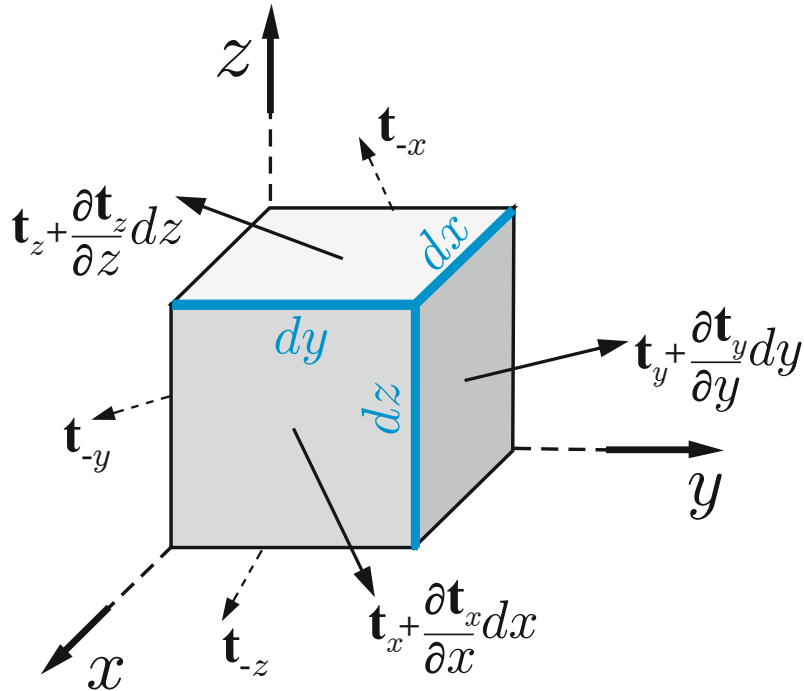
$$\left(\cancel{\mathbf{t}_{-y}} + \cancel{\mathbf{t}_y} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy \right) dA_y =$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dy dA_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dx dy dz =$$

$$d\mathbf{F}_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dV$$

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Forze di volume e di superficie agenti



Forze esterne di volume

$$d\mathbf{F}_v = \mathbf{b}(P)dV$$

Forze di superficie sulle 6 facce

Coppia di giaciture normali a x

$$d\mathbf{F}_x = \frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} dV$$

Coppia di giaciture normali a y

$$d\mathbf{F}_y = \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} dV$$

Coppia di giaciture normali a z

$$d\mathbf{F}_z = \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} dV$$

1° Equazione cardinale della statica: $\mathbf{R}=0$

$$d\mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_y + d\mathbf{F}_z + d\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$$



2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

1° Equazione cardinale della statica: $\mathbf{R}=\mathbf{0}$

$$d\mathbf{F}_x + d\mathbf{F}_y + d\mathbf{F}_z + d\mathbf{F}_v = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} \right) dV = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$



2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio in forma vettoriale

1° equazione cardinale
$$\frac{\partial \mathbf{t}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_z}{\partial z} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

Equazioni indefinite di equilibrio in forma scalare

1° equazione cardinale
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0 \end{aligned} \quad P \in \mathcal{C}$$

2° equazione cardinale
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

2. Statica del continuo 3D: Equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio in forma compatta

1° equazione cardinale $\text{Div } \mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$

2° equazione cardinale $\mathbf{T}^T(P) = \mathbf{T}(P)$

Condizioni al bordo $\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$

Le equazioni indefinite di equilibrio stabiliscono un legame differenziale fra le forze interne (tensore $\mathbf{T}$) e le forze esterne di volume e di superficie ($\mathbf{b}$ e $\mathbf{f}$), in un continuo in equilibrio.

Tre equazioni differenziali scalari alle derivate parziali nelle sei funzioni scalari di tre variabili $T_{ij} = T_{ji}$



Forma compatta

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

Incognite statiche

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{T}^T(P)$$

$$\text{Div } \mathbf{T}^T(P) + \mathbf{b}(P) = \mathbf{0} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

Forma scalare

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

Incognite statiche

$$\sigma_x(P), \sigma_y(P), \sigma_z(P)$$

$$\tau_{xy}(P) = \tau_{yx}(P), \tau_{yz}(P) = \tau_{zy}(P),$$

$$\tau_{xz}(P) = \tau_{zx}(P)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad + c.c$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0$$

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

Forma compatta

Incognite cinematiche

$$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} \quad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

Forma scalare

Incognite cinematiche

$$u(P), v(P), w(P)$$

$$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$$

$$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$



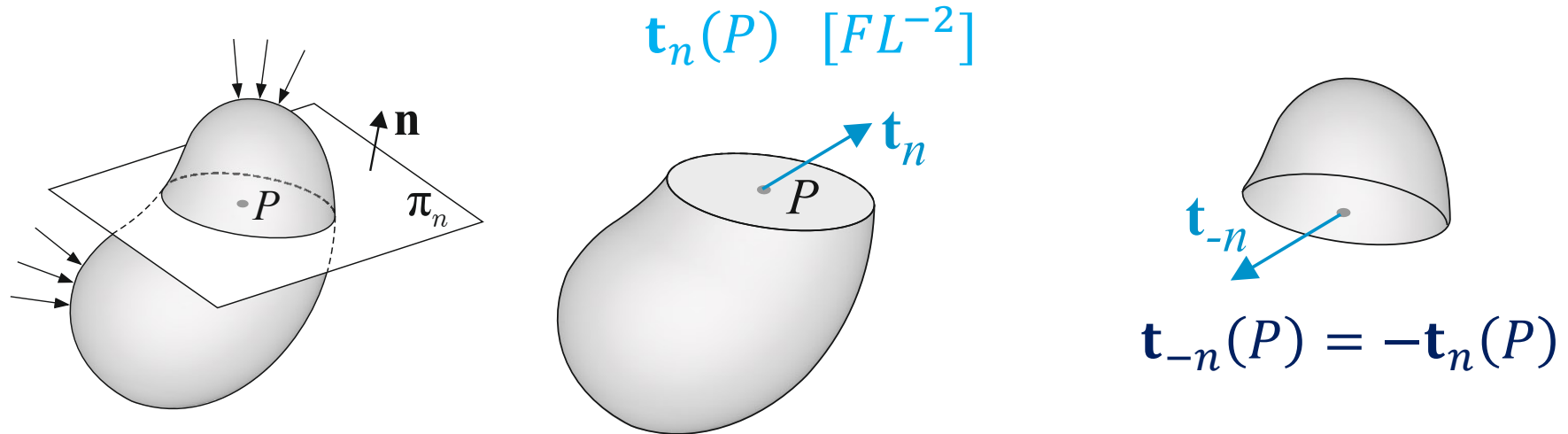
Lezione

2. Statica del continuo 3D

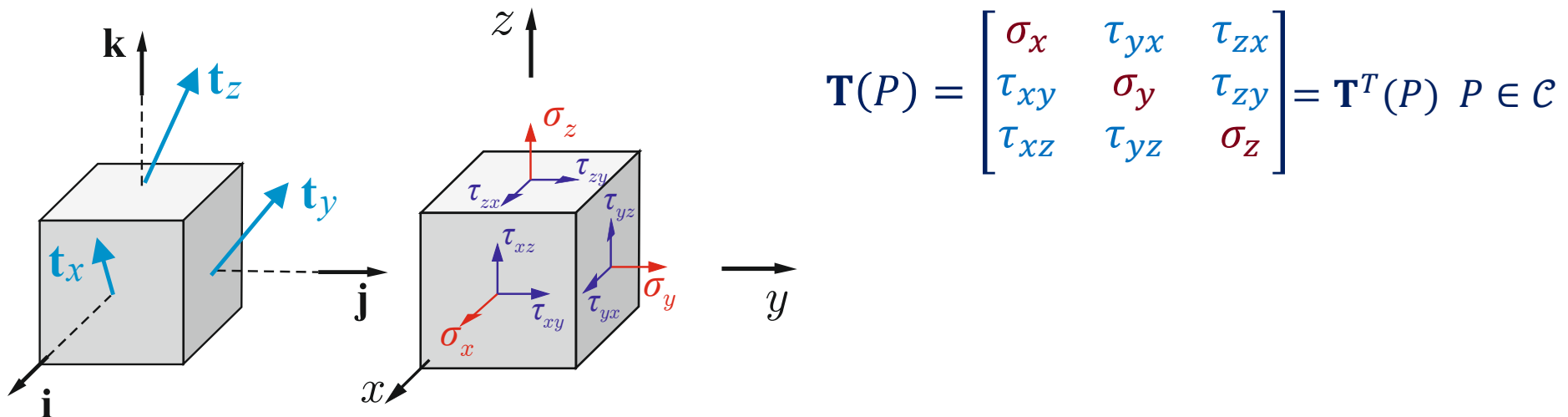
- Obiettivi
- Modello delle forze esterne
- Modello delle forze interne (Cauchy)
 - vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$
 - Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$
 - Formula di Cauchy – Teorema di Cauchy-Poisson
- Equazioni indefinite di equilibrio
- **Tensioni e direzioni principali**

2. Statica del continuo 3D: forze interne

Modello di Cauchy: vettore della tensione $\mathbf{t}_n(P)$



Modello di Cauchy: Tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$



2. Statica del continuo 3D: forze interne

Formula di Cauchy

$$\mathbf{t}_n(P) = \mathbf{T}(P) \mathbf{n} \quad P \in \mathcal{C}$$

Formula di Cauchy: il vettore della tensione in P secondo la giacitura individuata dal versore $\mathbf{n}$ è data dal tensore della tensione in P applicato al versore $\mathbf{n}$. Quindi per rappresentare in modo completo le forze interne agenti in P è sufficiente conoscere il tensore della tensione in P (stato tensionale in P).

Il vettore $\mathbf{t}_n(P)$ dipende linearmente da $\mathbf{n}$.

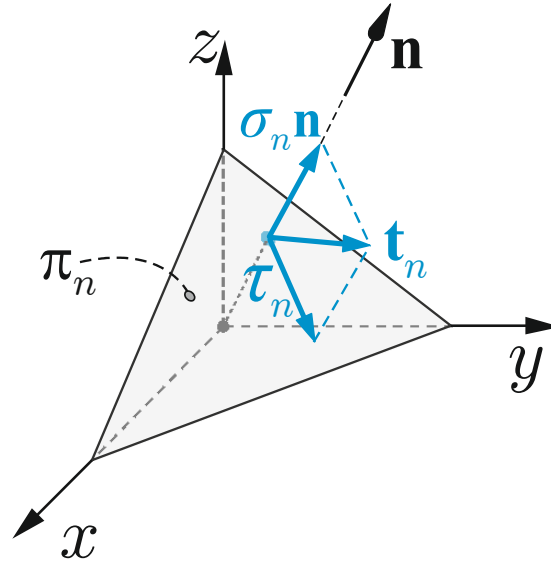
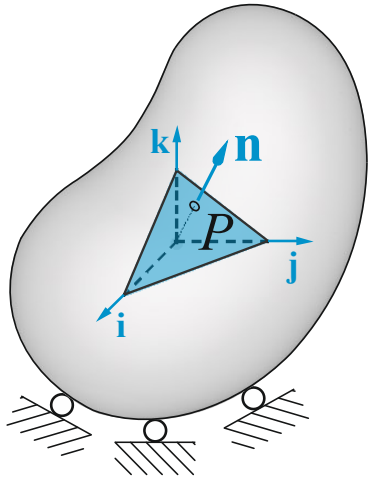
Il tensore della tensione $\mathbf{T}(P)$ (e quindi $\mathbf{t}_n(P)$) si suppone continuo e derivabile con continuità rispetto a P .

In corrispondenza di ogni punto P sulla frontiera, detto $\mathbf{n}$ il versore normale alla frontiera in P e $\mathbf{f}$ l'eventuale densità di forza esterna di superficie agente in P , risulta:

$$\mathbf{T}(P)\mathbf{n} = \mathbf{f}(P), \quad P \in \mathcal{S}$$

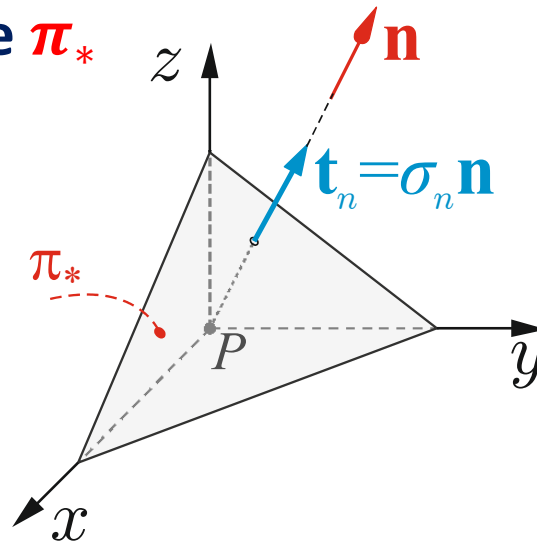
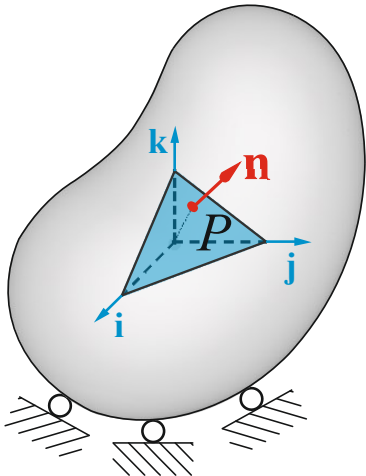
2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali

Giacitura generica π_n



$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$$

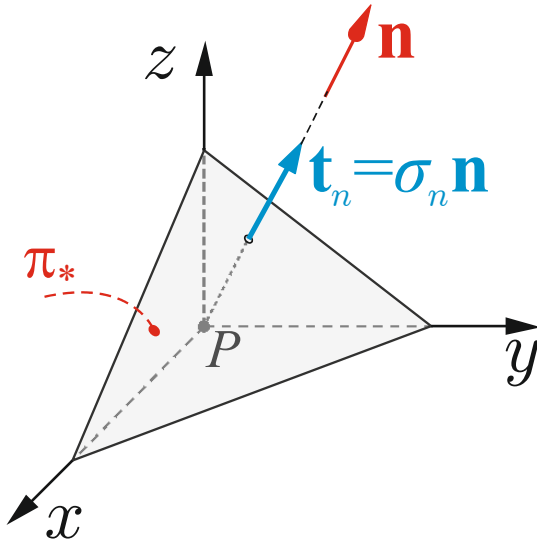
Giacitura principale π_*



$$\mathbf{t}_n(P) \parallel \mathbf{n}$$

$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n}$$

2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\mathbf{t}_n(P) = \sigma_n \mathbf{n}$$

$$\mathbf{T}(P) \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n}$$

$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

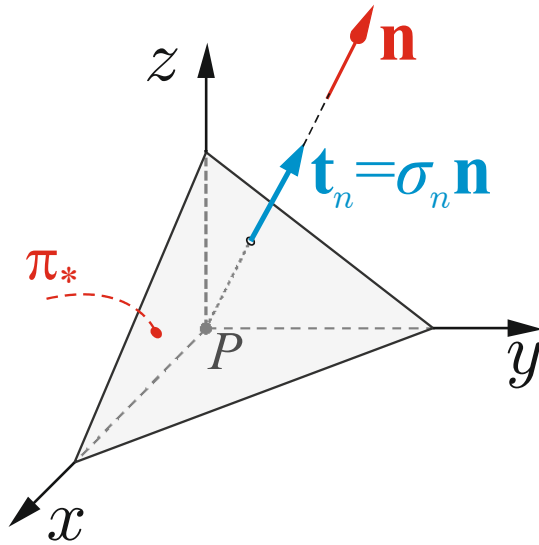
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\text{Det}(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \neq 0$, $\exists! \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (Rouché-Capelli). Questo non è accettabile perché, essendo un versore, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Quindi:

$$\text{Det}(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$



2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\text{Det} (\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) = 0$$

$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \rightarrow \infty \text{ soluzioni non banali}$$

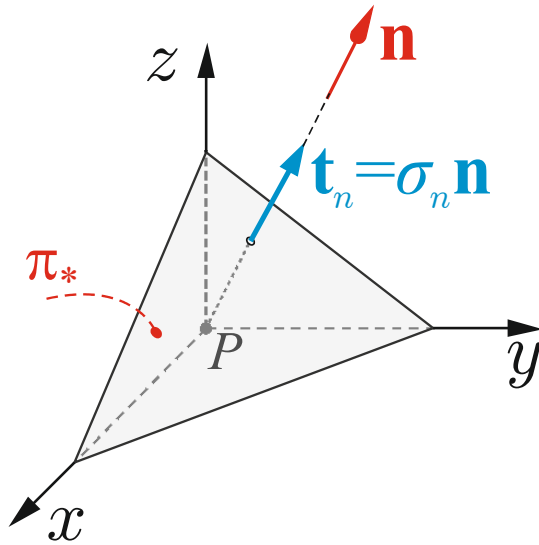
$$\text{Det} \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

Equazione caratteristica



2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

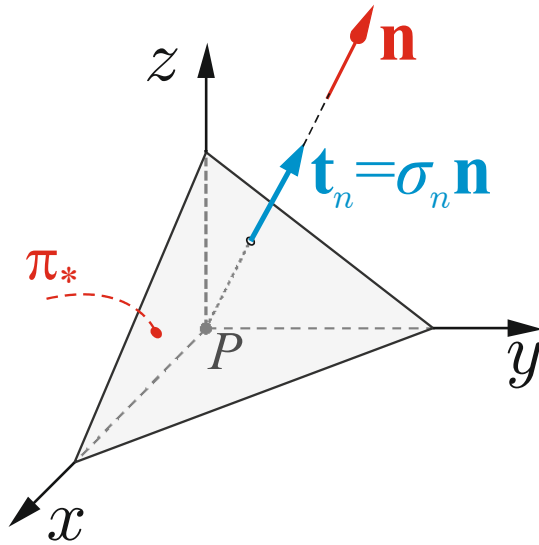


$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0}$$



n₁

2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$

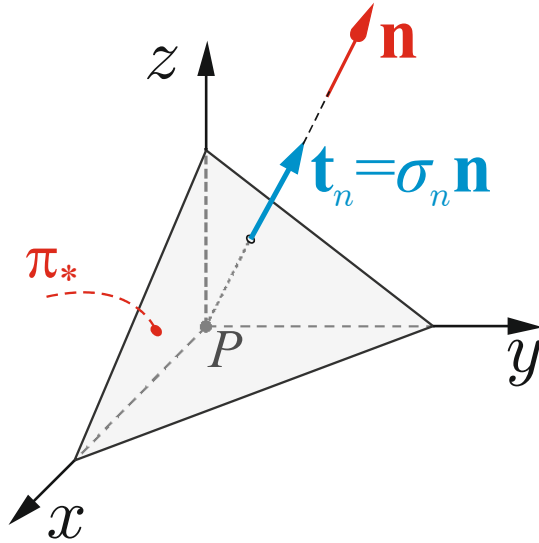


$\mathbf{n}_1$

$\mathbf{n}_2$

$\mathbf{n}_3$

2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



Incognite

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$$

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

Invarianti della tensione

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{T}) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - (\tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{xz})^2$$

$$I_3 = \text{Det}(\mathbf{T})$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



$$(\mathbf{T}(P) - \sigma_n \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}$$



$\mathbf{n}_1$

$\perp$



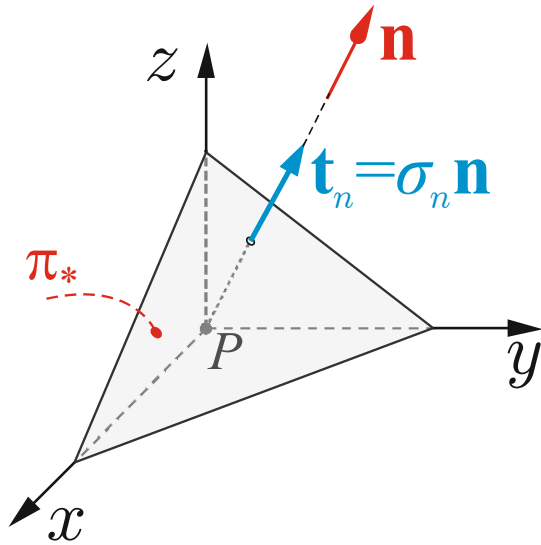
$\mathbf{n}_2$

$\perp$



$\mathbf{n}_3$

2. Statica del continuo 3D: tensioni e direzioni principali



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

$$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}_3$$

Tensioni
principali

Direzioni
principali

$$\mathbf{T}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

