

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2019



Lezione 1

1. Organizzazione del corso

2. Contenuti del corso



1. Organizzazione del corso

- Sito dedicato: www.pcasini.it/disg/statica
- Iscrizione al corso (link sul sito)
- Iscrizione Classroom (link sul sito)
- Frequenza del corso

- Lezioni di teoria
- Esercitazioni in classe e da svolgere
- Turni di spiegazione

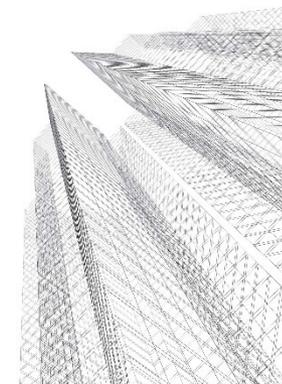
- Modalità di svolgimento esami:
esoneri, esame scritto, esame orale, tesine
- Materiale didattico: sito e libro di testo

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

PAOLO CASINI
MARCELLO VASTA

Scienza delle costruzioni

quarta edizione

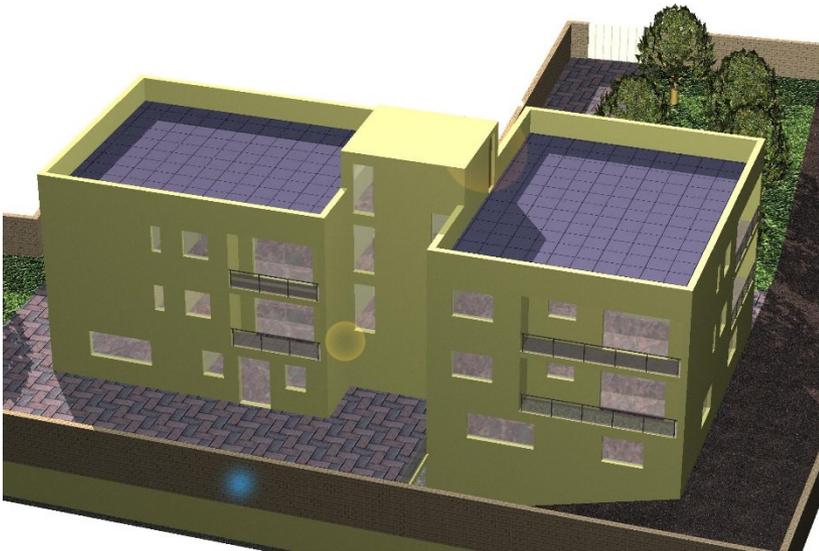


DIZIONE DIGITALE SU
PANDORA
CAMPUS

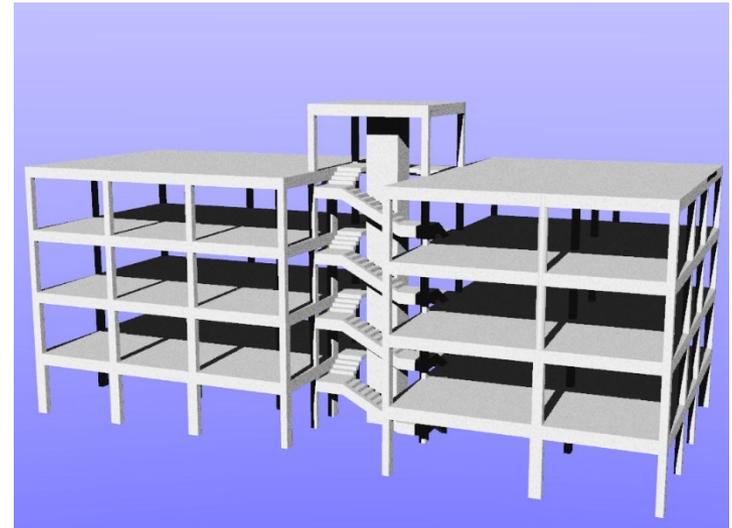
CittàStudi
EDIZIONI

2. Contenuti del corso

Ci occupiamo della struttura portante delle costruzioni. La struttura è quella parte della costruzione che ha la funzione di resistere alle sollecitazioni dell'ambiente esterno garantendo che la costruzione nel suo complesso sia **sicura e efficiente**



Costruzione



Struttura portante



2. Contenuti del corso

Ci occupiamo della struttura portante delle costruzioni. La struttura è quella parte della costruzione che ha la funzione di resistere alle sollecitazioni dell'ambiente esterno garantendo che la costruzione nel suo complesso sia **sicura e efficiente**

2.1 Parole chiave:

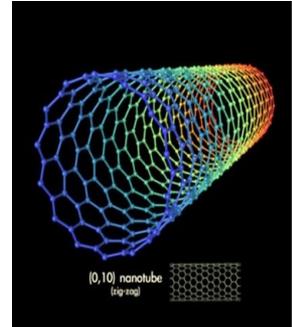
costruzione,
azioni esterne,
elementi strutturali,
struttura portante,
risposta strutturale,
analisi strutturale,
modello.

2.2 Obiettivi

2.3 Programma

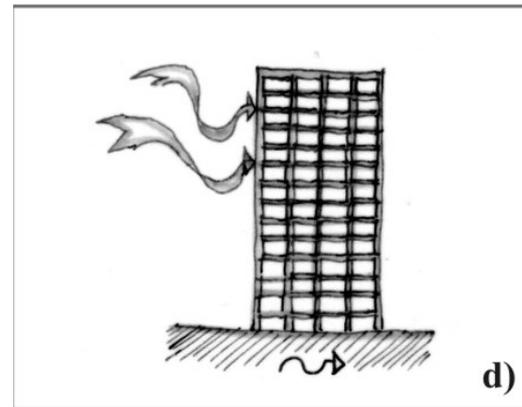
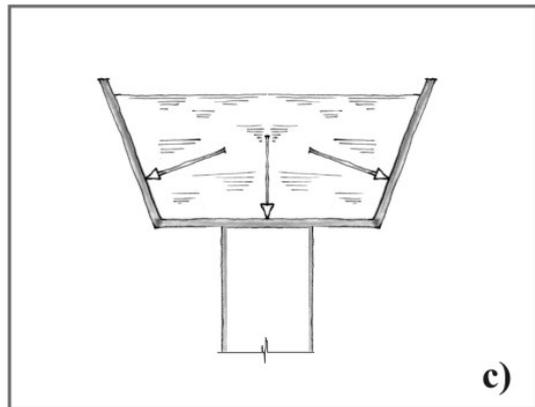
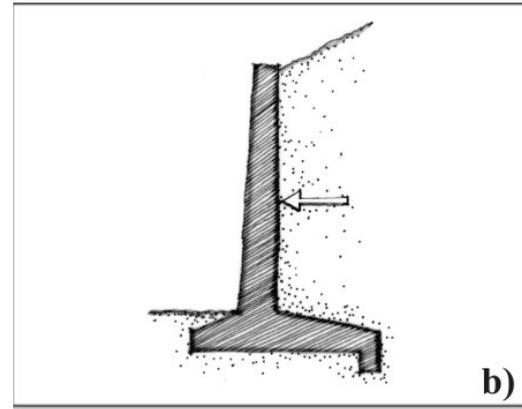
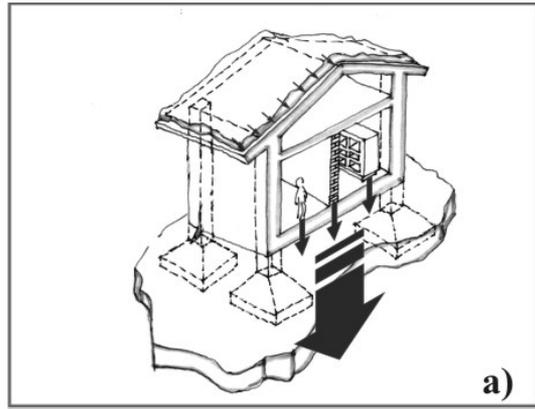
2.1 Parole chiave

Costruzione: Le *costruzioni* sono opere progettate e realizzate per svolgere specifiche funzioni in modo sicuro e efficiente.



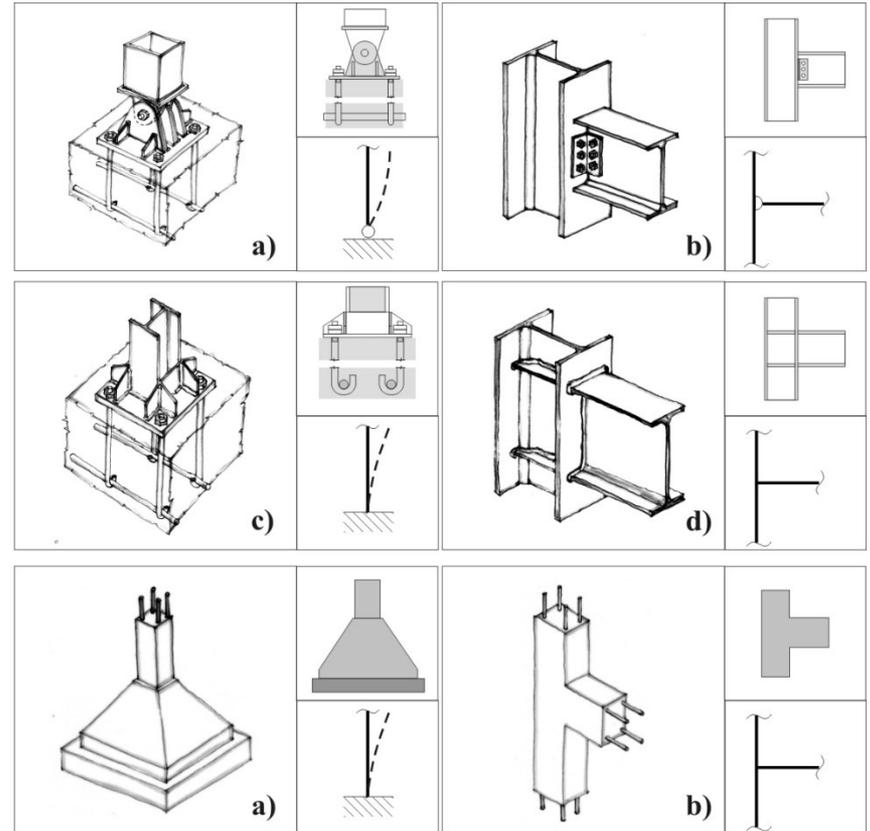
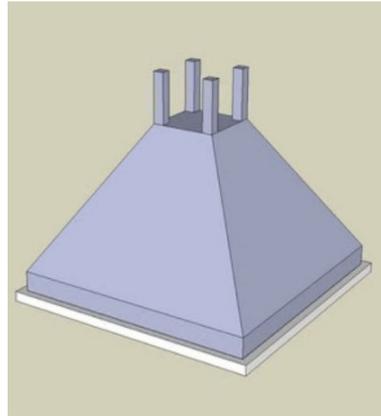
2.1 Parole chiave

Azioni esterne: sollecitazioni che l'ambiente esterno esercita sulla costruzione. In questo corso si prenderanno in considerazione unicamente sollecitazioni di tipo statico o quasi statico (cfr. Testo § 1.4).



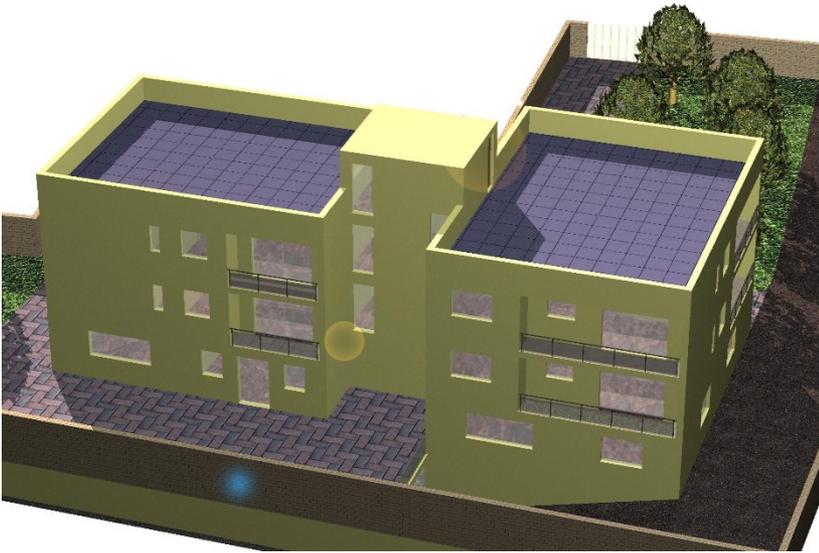
2.1 Parole chiave

Elementi strutturali: elementi costruttivi aventi la funzione di resistere alle azioni esterne. I dispositivi che collegano gli elementi strutturali fra loro o con elementi esterni (suolo) sono detti *vincoli*.

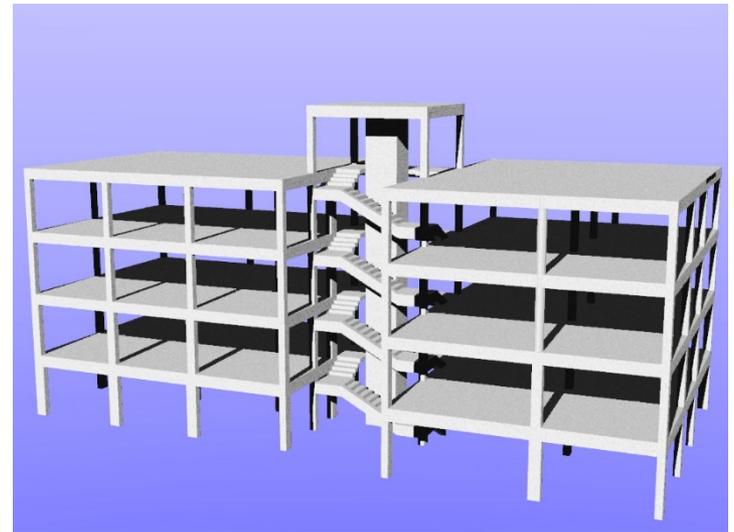


2.1 Parole chiave

Struttura portante: insieme degli elementi strutturali e dei vincoli: ha il compito di rispondere alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata



Costruzione

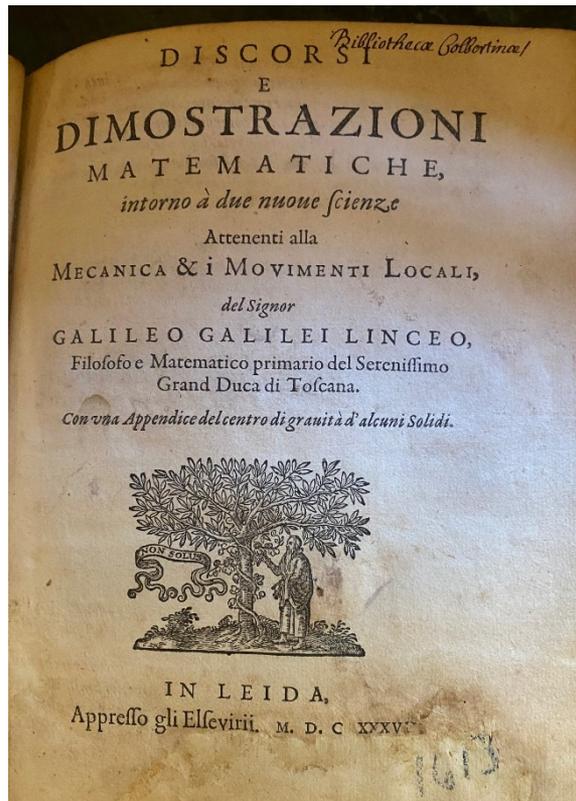


Struttura portante

2.1 Parole chiave

Risposta strutturale: comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne.

Esempio: mensola di Galileo

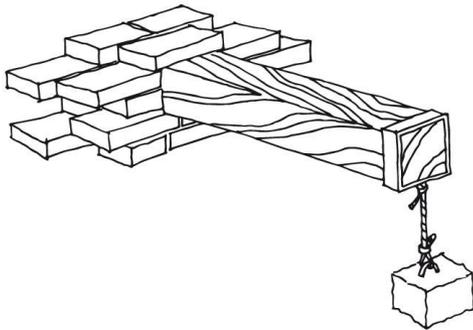


G. Galileo. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. Leida 1638

2.1 Parole chiave

Risposta strutturale: comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne.

Esempio



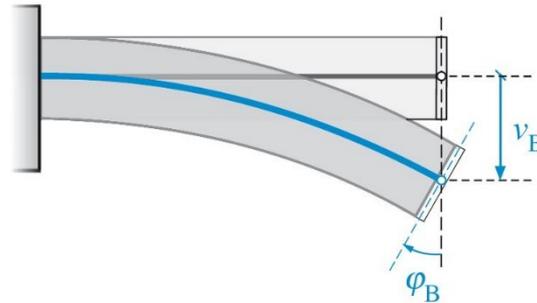
Struttura:

Trave di legno incastrata (mensola)

Azioni esterne:

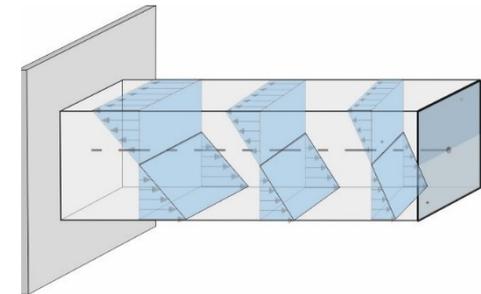
Carico all'estremo libero
Peso proprio trave
Forze reattive all'incastro

Risposta strutturale



Risposta cinematica:

Spostamenti,
deformazioni



Risposta statica:

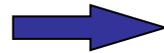
Forze interne,
tensioni

2.1 Parole chiave

Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.

Azioni Esterne:

sollecitazioni che l'ambiente esterno esercita sulla costruzione, ad esempio: forza di gravità (peso proprio, carichi antropici, neve *etc.*), spinta delle terre, vento, azioni sismiche, variazioni termiche, cedimenti vincolari *etc.*



Struttura:

insieme degli elementi costruttivi (*elementi strutturali*) che hanno il compito di 'rispondere' alle azioni esterne in modo che la costruzione nel suo complesso possa svolgere in modo adeguato le funzioni per le quali è stata realizzata.

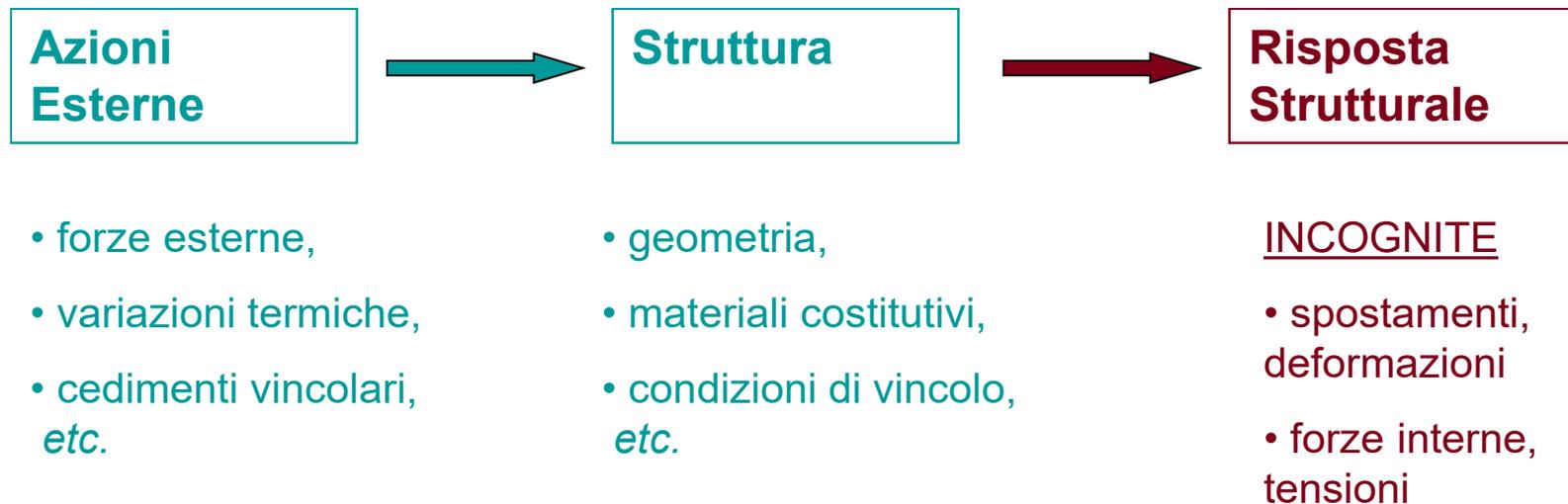


Risposta strutturale:

comportamento meccanico della struttura conseguente alle azioni esterne. Le grandezze che esprimono la risposta strutturale sono di natura **statica** (forze interne, tensioni) e **cinematica** (spostamenti, deformazioni)

2.1 Parole chiave

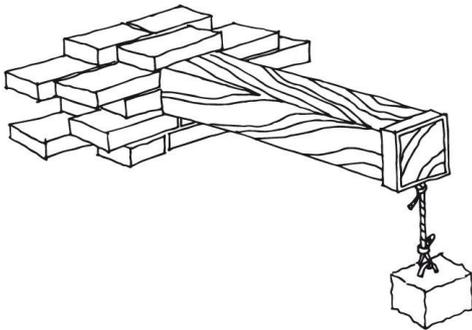
Analisi strutturale: analisi e caratterizzazione della *risposta strutturale* cioè del comportamento meccanico manifestato dalla struttura in risposta alle azioni esterne.



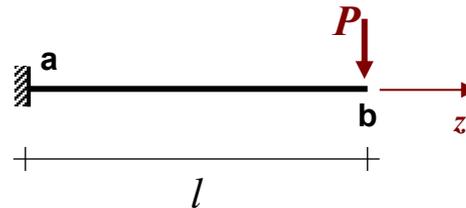
2.1 Parole chiave

Modello strutturale: per effettuare l'analisi strutturale, si deve definire un opportuno *modello matematico* con cui schematizzare le azioni esterne, la struttura e la risposta strutturale. Sono disponibili in letteratura molti modelli strutturali da selezionare in base alla geometria degli elementi, del materiale, della complessità dei problemi strutturali che si vogliono studiare.

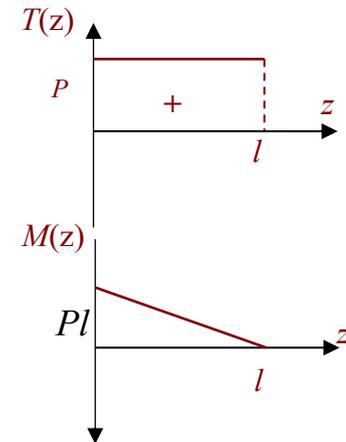
Esempio 1



Struttura reale



Modello

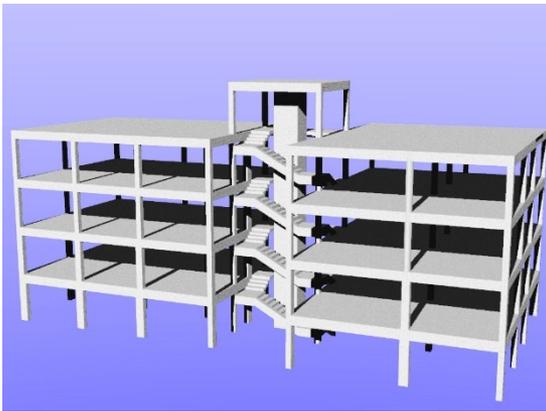


Modello della risposta statica

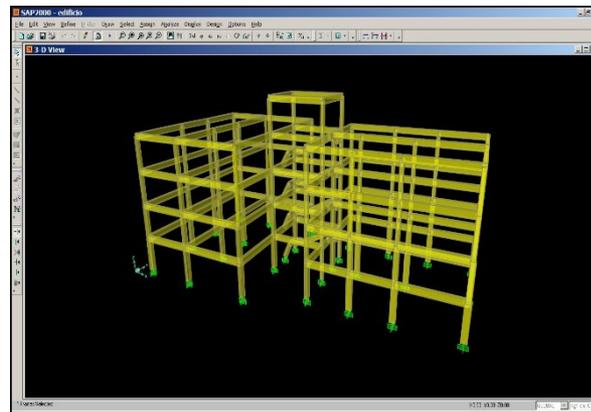
2.1 Parole chiave

Modello strutturale: per effettuare l'analisi strutturale, si deve definire un opportuno *modello matematico* con cui schematizzare le azioni esterne, la struttura e la risposta strutturale.

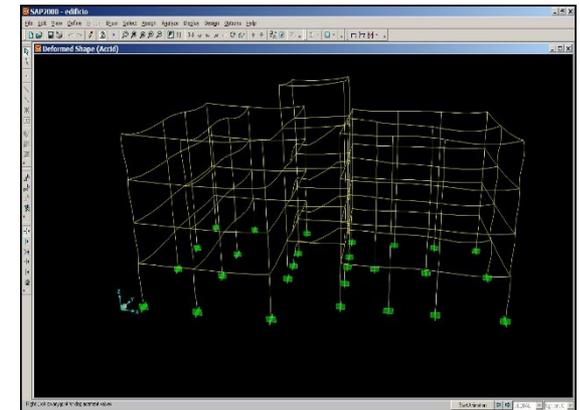
Esempio 2



Struttura reale



Modello



Modello della risposta
Cinematica

2.1 Parole chiave

Modelli per gli elementi strutturali: alcuni esempi

1. **Corpo rigido**
2. **Trave elastica monodimensionale (1D)**
3. **Continuo tridimensionale di Cauchy (3D)**
4. **Piastra di Kirchhoff (2D)**
5. **Cilindro di Saint Venant (3D)**

2.2 Obiettivi formativi

1. Far comprendere a livello qualitativo i meccanismi per cui si realizzano nelle costruzioni le condizioni di equilibrio, congruenza, resistenza, stabilità.
2. Fornire gli strumenti teorici e operativi per studiare il comportamento meccanico delle strutture portanti delle costruzioni (*analisi strutturale*).
3. Formare le conoscenze necessarie per affrontare i problemi strutturali del progetto e per comprendere il linguaggio tecnico dell'ingegneria strutturale (*progetto strutturale*).

2.3 Programma del corso

disponibile su www.pcasini.it/disg/statica

Parte 0 – Concetti di base

Parte I – Modello di corpo rigido: travi rigide

Parte II - Travi elastiche monodimensionali (1D)

Parte III - Continuo tridimensionale di Cauchy (3D)

Parte IV - Cilindro di Saint Venant, problema di Saint Venant

Parte V - Stabilità e resistenza strutturale

2.3 Programma del corso

disponibile su www.pcasini.it/disg/statica

1. Nozioni introduttive: concetti di base della meccanica, grandezze fisiche, equazioni dimensionali, vettori, elementi di algebra lineare.

2. Sistemi meccanici discreti e travi rigide: Nozione di corpo rigido. *2.1 Cinematica:* definizioni e ipotesi, cinematica linearizzata per il corpo rigido e i sistemi di corpi rigidi, prestazioni cinematiche dei vincoli, analisi cinematica del corpo rigido vincolato e dei sistemi, matrice cinematica e classificazione cinematica. *2.2 Statica:* definizioni, forze, momenti, sistemi di forze, equazioni cardinali della statica, prestazioni statiche dei vincoli, analisi statica del corpo rigido vincolato e dei sistemi di corpi rigidi, matrice statica e classificazione statica. *2.3 Dualità statico-cinematica:* Teorema dei lavori virtuali.

3. L'elemento strutturale trave: *3.1 Caratteristiche della sollecitazione:* leggi di variazione delle caratteristiche della sollecitazione e tracciamento dei relativi per travi e sistemi di travi isostatici. *3.2 Le travature reticolari:* Definizioni, classificazione, metodo dei nodi, metodo delle sezioni di Ritter.

4. Travi elastiche monodimensionali: *4.1 Cinematica:* geometria, spostamenti e deformazioni, equazioni implicite di congruenza, il problema cinematico per la trave piana. *4.2 Statica:* equazioni indefinite d'equilibrio, il problema statico per la trave piana. *4.3 Dualità statico-cinematica:* teorema dei lavori virtuali, formula generale dello spostamento. *4.4 Materiale costitutivo:* prove uniassiali, comportamento elastico, comportamento plastico, risposta a variazioni termiche, legame costitutivo della trave elastica. *4.5 Il problema elastico:* trave di Eulero-Bernoulli, equazione della linea elastica, metodo delle forze, risoluzione di sistemi iperstatici con il metodo delle forze e con il metodo degli spostamenti.

5. Geometria delle aree: obiettivi, area, baricentro, momenti statici e d'inerzia, momenti principali d'inerzia, casi notevoli.

Laboratorio numerico: modellazione ed analisi di strutture elementari con codici di calcolo commerciali (facoltativo)

Modalità di esame

- Prova scritta, prova orale. Prove d'esonero per chi frequenta

Bibliografia

1. P. Casini, M. Vasta, *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi (De Agostini Scuola), 4° edizione, 2019.
2. D. Bernardini, *Introduzione alla meccanica delle strutture*, CittàStudi (De Agostini Scuola), 2011.
3. C. Comi, L. Corradi Dell'Acqua: *Introduzione alla meccanica strutturale*, McGraw-Hill, 2007.
4. <http://www.pcasini.it/disg/statica>

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2019





Lezione 2

Parte 0 – Concetti di base

- Richiami di fisica
- Teoria dei vettori



1. Richiami di fisica

- **Generalità: fisica e fenomeni fisici**
- **Meccanica classica**
- **Grandezze fisiche**
- **Misura e unità di misura**
- **Grandezze fisiche fondamentali e derivate**
- **Equazioni dimensionali**

1. Richiami: Generalità

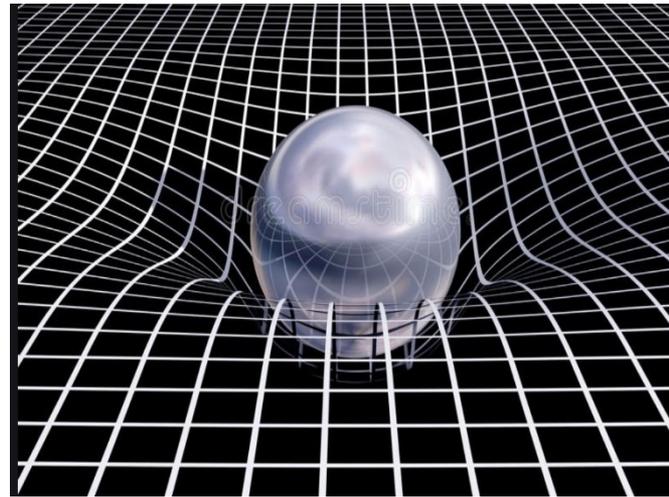
FISICA: si occupa di descrivere qualitativamente e quantitativamente i fenomeni naturali

DISCIPLINE: la fisica è suddivisa in diverse discipline, fra cui ad esempio: meccanica classica e relativistica, termodinamica, elettromagnetismo

Meccanica classica



Meccanica relativistica

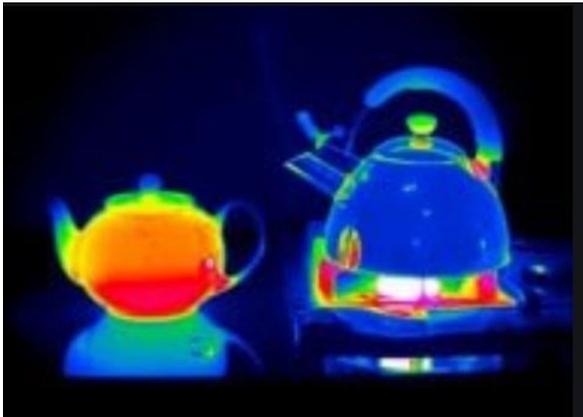


1. Richiami: Generalità

FISICA: si occupa di descrivere qualitativamente e quantitativamente i fenomeni naturali

DISCIPLINE: la fisica è suddivisa in diverse discipline, fra cui ad esempio: meccanica classica e relativistica, termodinamica, elettromagnetismo

Termodinamica



Elettromagnetismo



1. Richiami: Meccanica

MECCANICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, il moto dei corpi (spostamenti, velocità, accelerazioni), le cause che provocano il moto, le condizioni di equilibrio. Si suddivide tradizionalmente in:

CINEMATICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo provocano. Definisce le grandezze e gli strumenti atti a *descrivere e misurare*: cambiamenti di posizione e di forma (deformazioni), campi di velocità e di accelerazione

DINAMICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, le cause che provocano il moto o le deformazioni dei corpi (*Forze*)

STATICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, l'*equilibrio* dei corpi e le condizioni per cui tale *equilibrio si verifica*

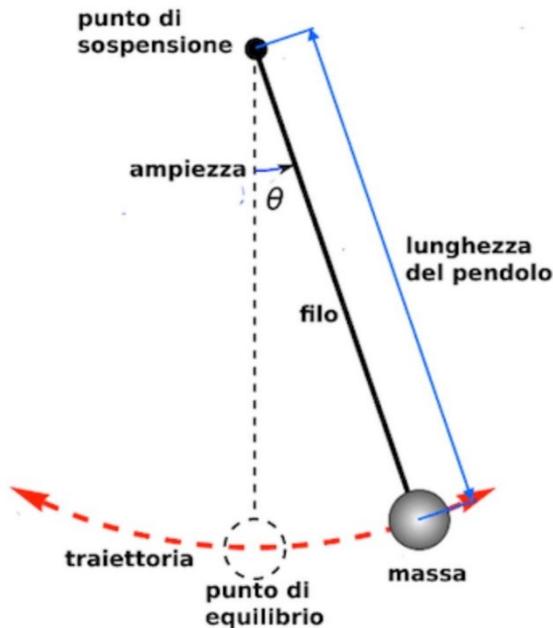
Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

1. Richiami: Grandezze fisiche

Grandezze fisiche: le grandezze che entrano in gioco nella descrizione di un dato fenomeno fisico

Grandezze meccaniche: le grandezze fisiche che entrano in gioco nei fenomeni di cui si occupa la meccanica classica: grandezze cinematiche, dinamiche e statiche

Esempio: il pendolo semplice



Grandezze meccaniche

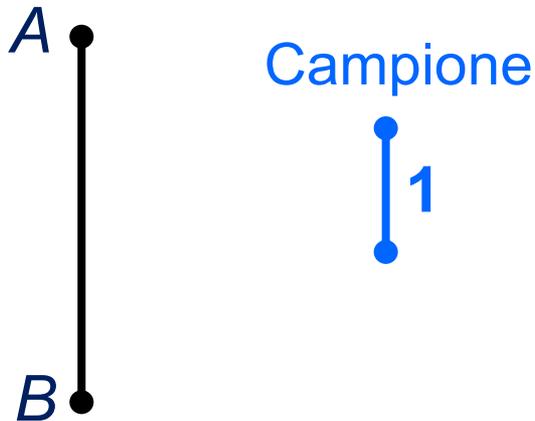
- Lunghezza
- Massa
- Angolo
- Spostamento, velocità, accel.
- tempo
- forza di gravità
- forze dissipative, attriti

1. Richiami: Misure fisiche

Per studiare il fenomeno fisico è necessario *'quantificare'* le grandezze che vi intervengono: questa operazione è chiamata **misura**

Misura: assegnare ad una grandezza fisica un *numero reale* ed una *unità di misura*

Esempio: Misura della lunghezza del pendolo



- Si sceglie arbitrariamente un segmento *campione* a cui si attribuisce convenzionalmente il *valore unitario*
- La misura di \overline{AB} è data dal numero di volte in cui il campione è contenuto in AB
- Il campione è detto **unità di misura** ed è fissato da convenzioni internazionali.

1. Richiami: Dimensioni fisiche

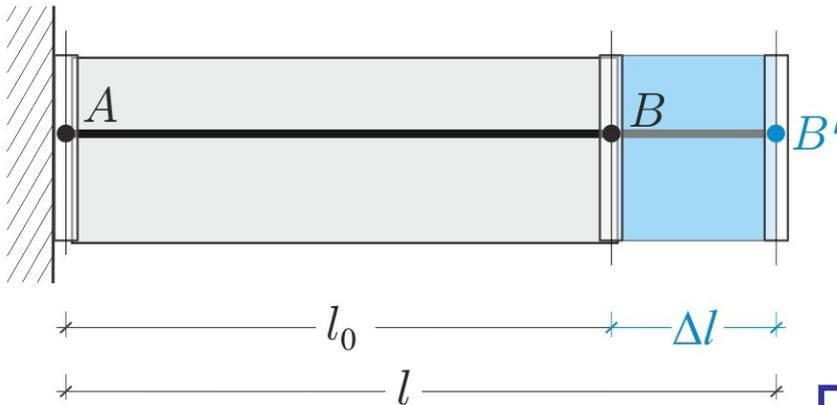
Il tipo di unità di misura definisce la **dimensione fisica** della grandezza: tutte le grandezze che si misurano con la stessa unità di misura hanno le stesse dimensioni fisiche e si dicono *omogenee*.

Simbolo: convenzionalmente la dimensione fisica di una grandezza si rappresenta con lettere racchiuse da parentesi quadre: per esempio $[L]$ rappresenta una grandezza che ha dimensioni fisiche di una lunghezza.

1. Richiami: Grandezze adimensionali

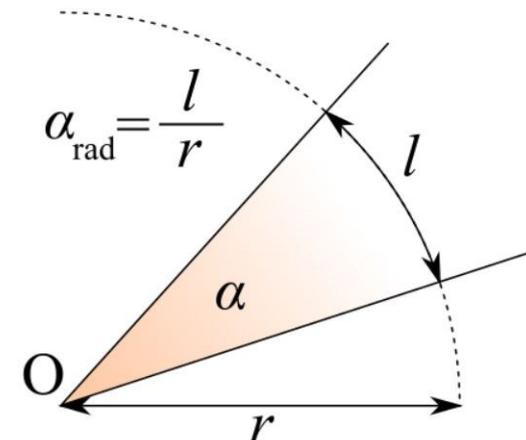
Grandezze adimensionali: per misurarle è sufficiente un numero reale (e non l'unità di misura). Simbolo: [0]

Esempio 1: Variazioni percentuali



$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \%$$

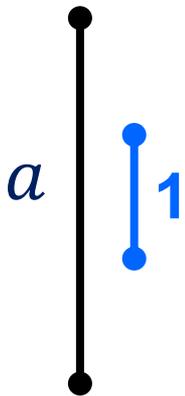
Esempio 2: Angolo, radianti



1. Richiami: Grandezze fondamentali e derivate

Non è necessario definire un unità di misura per ogni grandezza fisica: è possibile sceglierne alcune come **fondamentali** e definire tutte le altre (**derivate**) a partire da quelle fondamentali

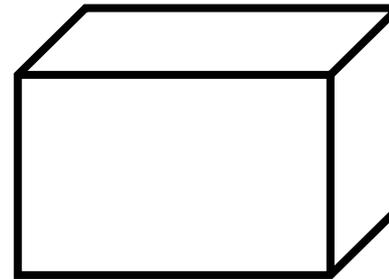
Esempio: Lunghezza, Area, Volume



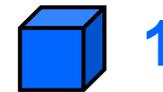
[L]



[A]



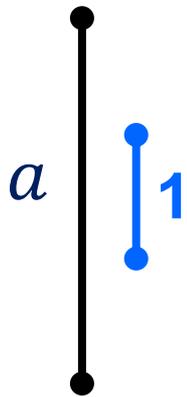
[V]



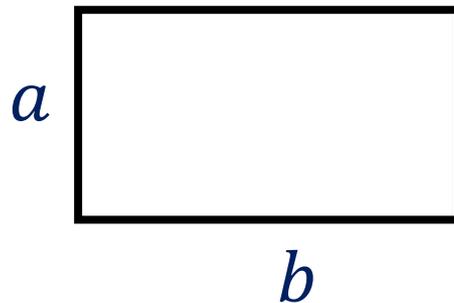
1. Richiami: Grandezze fondamentali e derivate

Non è necessario definire un unità di misura per ogni grandezza fisica: è possibile sceglierne alcune come **fondamentali** e definire tutte le altre (**derivate**) a partire da quelle fondamentali

Esempio: Lunghezza grandezza fondamentale, Area e Volume derivate

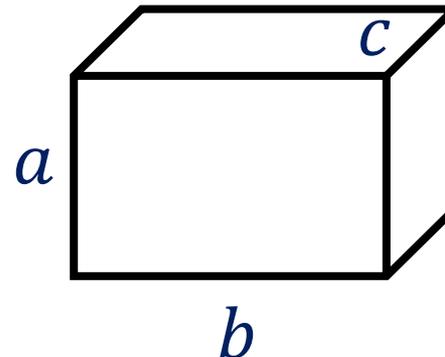


$[L]$



$$A = ab$$

$$[A] = [L^2]$$



$$V = abc$$

$$[V] = [L^3]$$

1. Richiami: Sistemi di unità

La scelta delle grandezze fondamentali e delle rispettive unità di misura è stabilita da convenzioni internazionali

Sistema Internazionale, S.I.:

- Lunghezza [L], unità: metro
- Tempo [t], unità secondo
- Massa [m], unità: kg-massa
- Temperatura [T], unità: grado Kelvin

Sistema Pratico:

- Lunghezza [L], unità: metro
- Tempo [t], unità secondo
- Massa [m], unità: kg-massa
- Temperatura [T], unità: grado Kelvin
- Forza [F], unità: Newton

1. Richiami: Equazioni dimensionali

Esercizio 1. Determinare le dimensioni fisiche della grandezza X definita dalla seguente formula:

$$X = \frac{ql^2}{3}$$

Dove $q = 1 \text{ kN/m}$, $l = 2 \text{ m}$,

$$[F/L] \quad [L]$$

$$[X] = \frac{\left[\frac{F}{L}\right] [L^2]}{[0]} = \left[\frac{F}{L}\right] [L^2] = [FL]$$

1. Richiami: Equazioni dimensionali

Esercizio 1. Determinare le dimensioni fisiche della grandezza X definita dalla seguente formula:

$$X = \frac{qa^3}{8EI}$$

Dove $q = 1 \text{ kN/m}$, $a = 2 \text{ m}$, $E = 1 \text{ kN/m}^2$, $I = 1 \text{ m}^4$

$$[F/L] \quad [L] \quad [F/L^2] \quad [L^4]$$

$$[X] = \frac{\frac{[F]}{[L]} [L^3]}{\frac{[F]}{[L^2]} [L^4]} = \frac{[FL^2]}{[FL^2]} = [0]$$

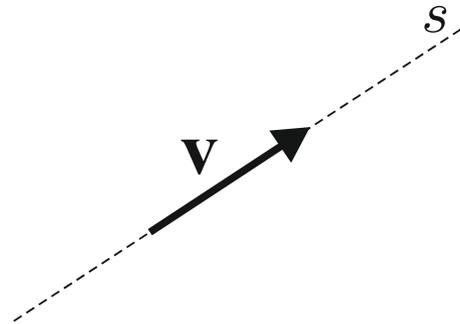
1. Richiami: Grandezze fisiche scalari e vettoriali

Grandezze fisiche scalari. Per caratterizzarle è sufficiente un numero reale e un'unità di misura

Esempi: tempo, massa, temperatura, lunghezza, area, volume etc.

Grandezze fisiche Vettoriali. Per caratterizzarle non è sufficiente solo un numero reale e un'unità di misura ma anche una direzione, un verso e, in alcuni casi, un punto di applicazione

Esempi: spostamento, velocità, accelerazione, forza etc.





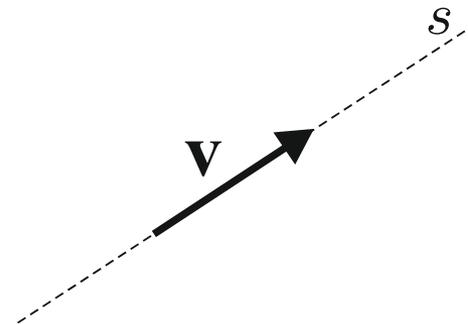
2. Teoria dei vettori (richiami)

- **Definizioni**
- **Componenti scalari**
- **Operazioni elementari**
- **Prodotto scalare**
- **Prodotto vettoriale**

2. Teoria dei vettori: definizioni

Vettore libero. Si definisce vettore libero o semplicemente *vettore* un ente geometrico caratterizzato da tre elementi: direzione, verso e modulo (o intensità)

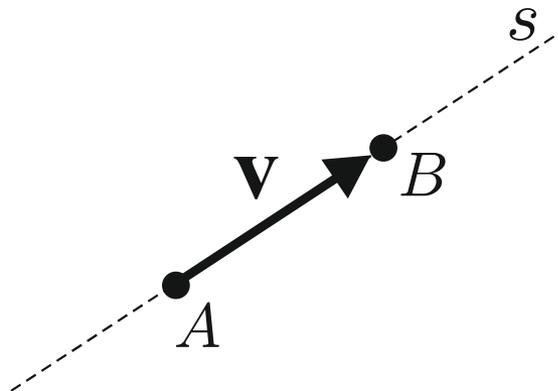
\vec{v} \mathbf{v}



Segmento orientato. Un vettore libero si rappresenta con un segmento orientato (ce ne sono ∞^3 equipollenti)

Modulo

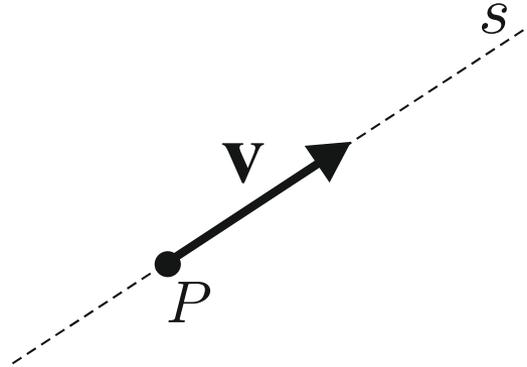
\overline{AB} $|\mathbf{v}|$ $|\vec{v}|$ v



2. Teoria dei vettori: definizioni

Vettore applicato.

$$(P, \mathbf{v})$$



s: retta d'azione

P: punto di applicazione

Versore \vec{e} . Vettore di modulo unitario

$$|\vec{e}| = 1$$

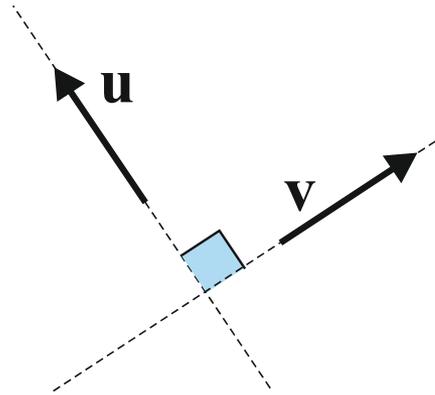
Vettore nullo $\vec{0}$. Vettore di modulo nullo

$$|\vec{0}| = 0$$

2. Teoria dei vettori: definizioni

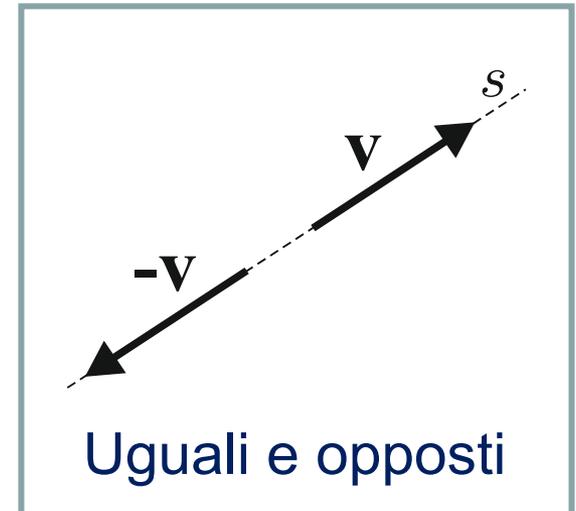
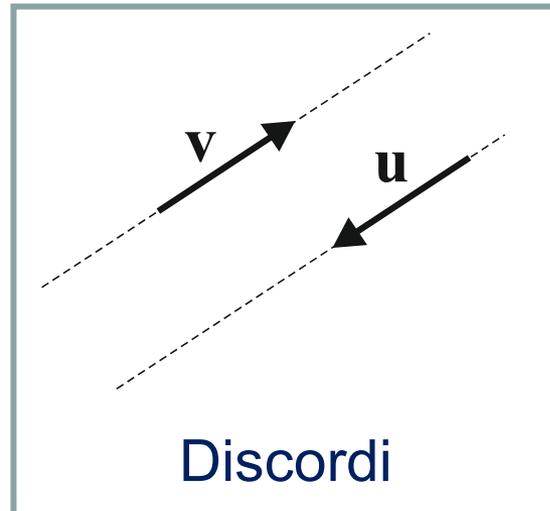
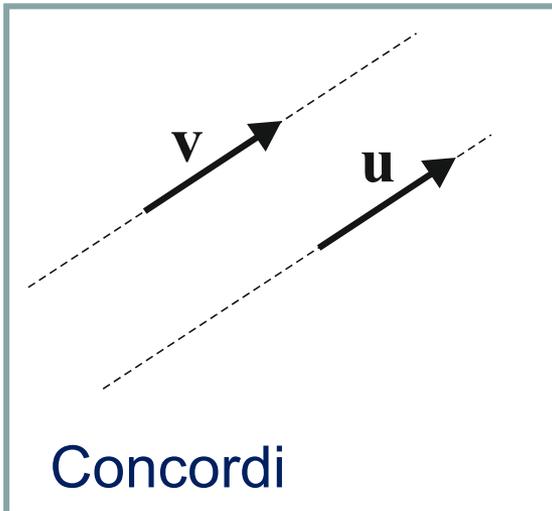
Vettori perpendicolari (normali)

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$



Vettori paralleli.

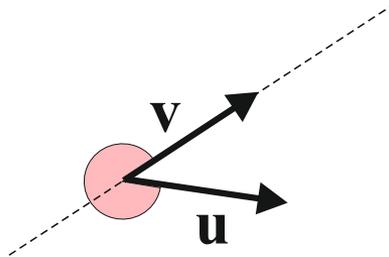
$$\mathbf{u} // \mathbf{v}$$



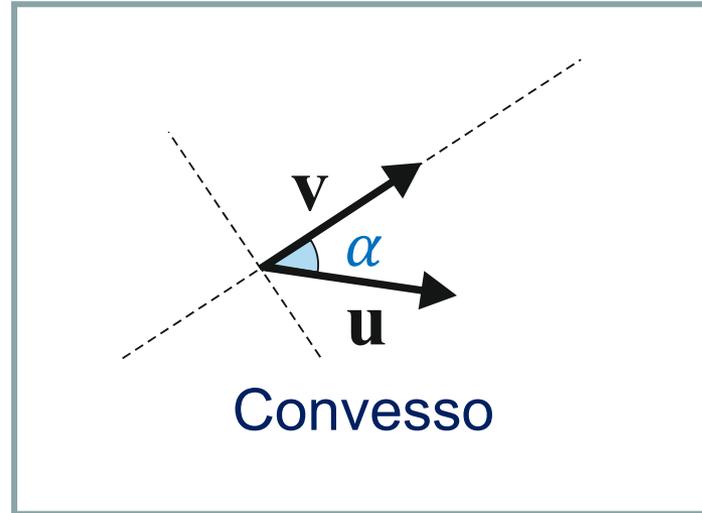
2. Teoria dei vettori: definizioni

Angolo convesso

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

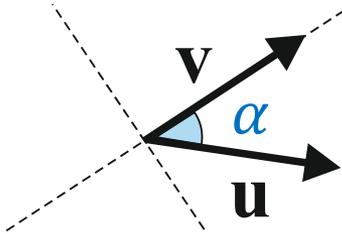


Concavo



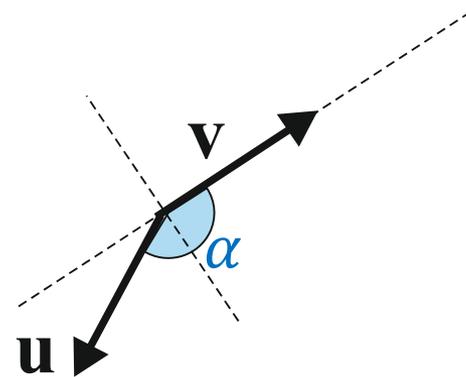
Convesso

Angolo convesso acuto e ottuso



$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

acuto

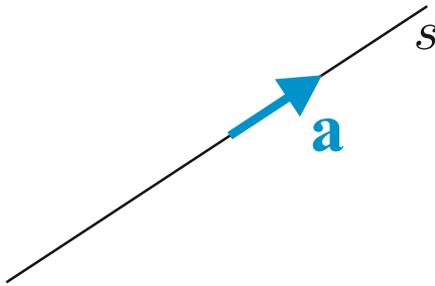


$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$$

ottuso

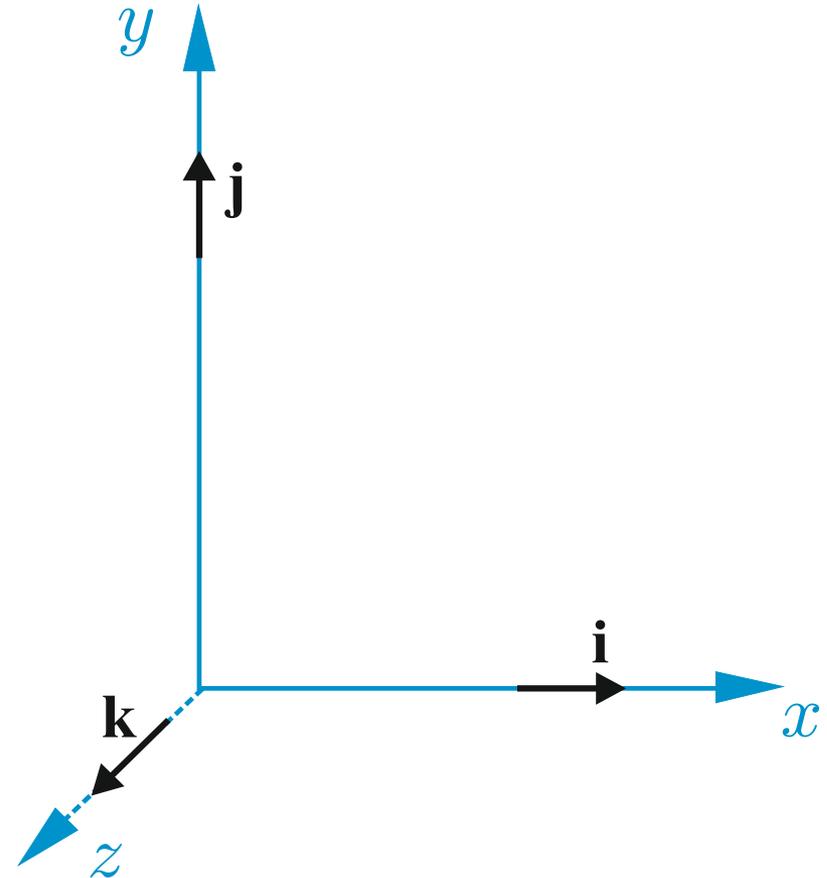
2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Retta orientata



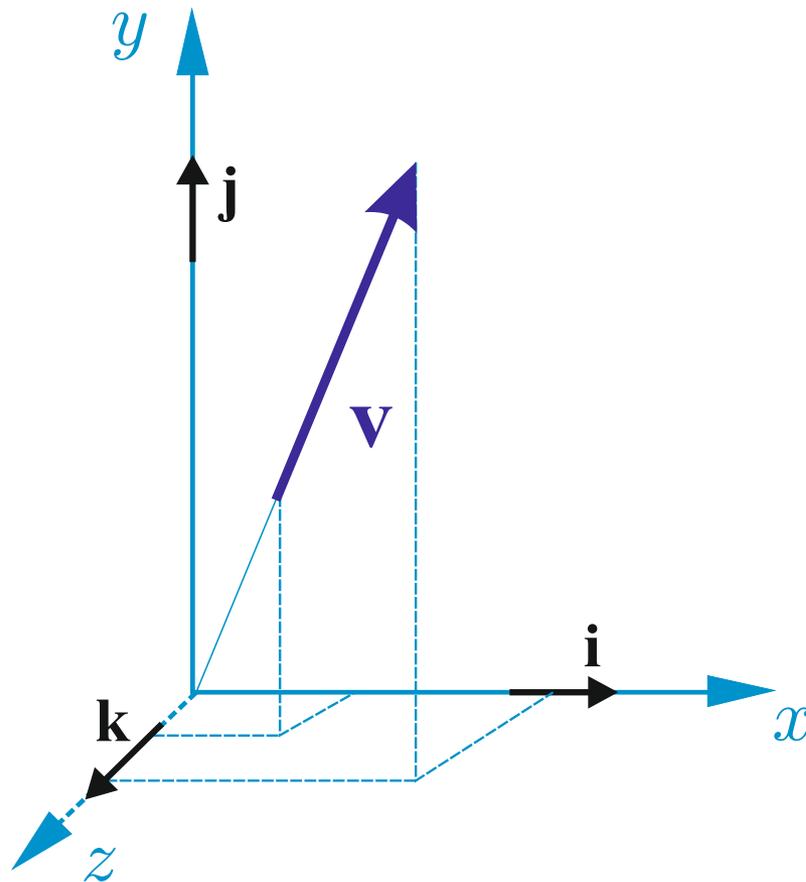
Versore $\vec{\mathbf{a}}$

Versori cartesiani



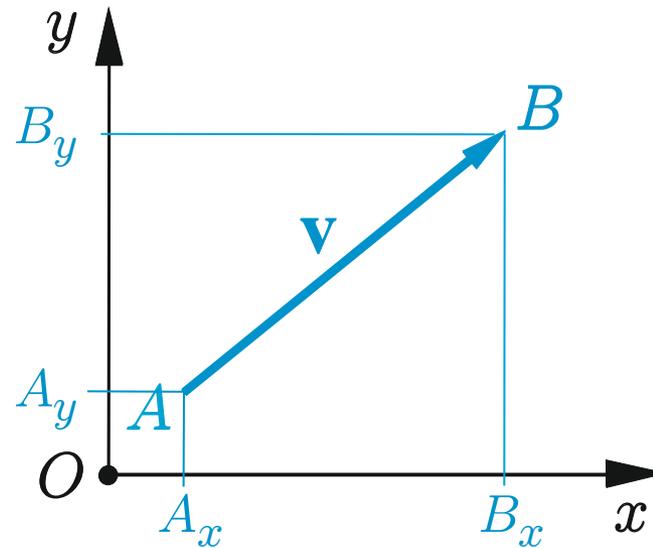
2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane



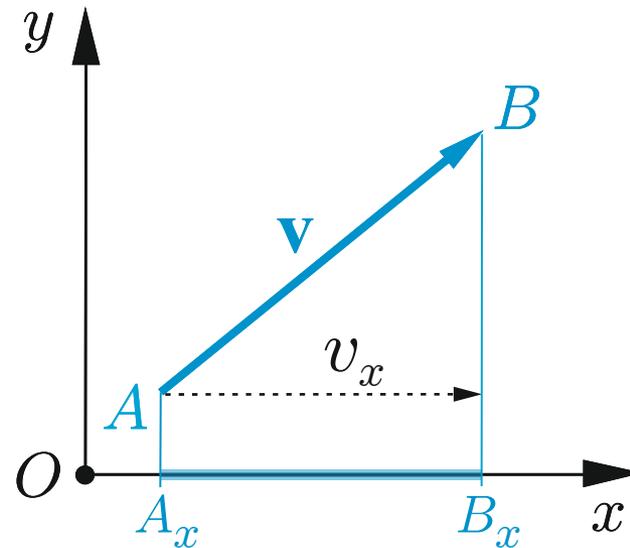
2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane (piano)



2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

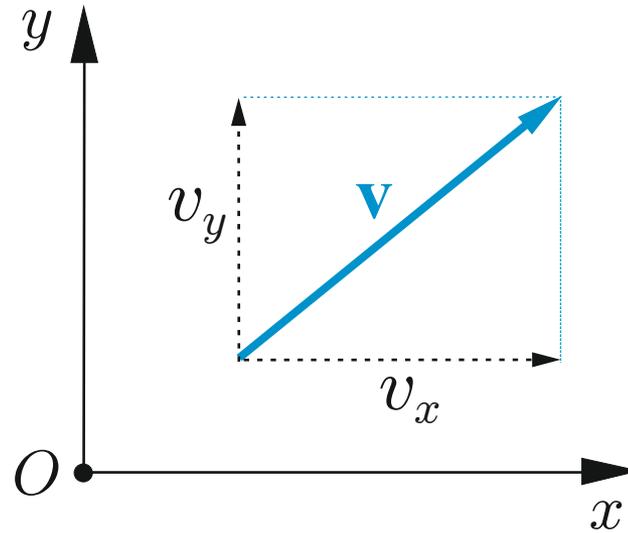
Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$

2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$

$$v_y = y_B - y_A$$

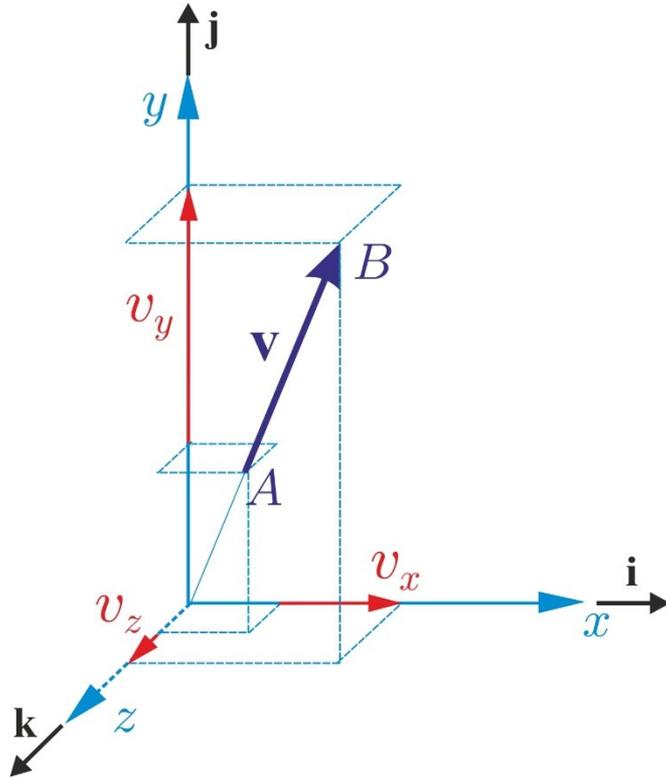
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y)$$

2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane (spazio)



$$v_x = x_B - x_A$$

$$v_y = y_B - y_A$$

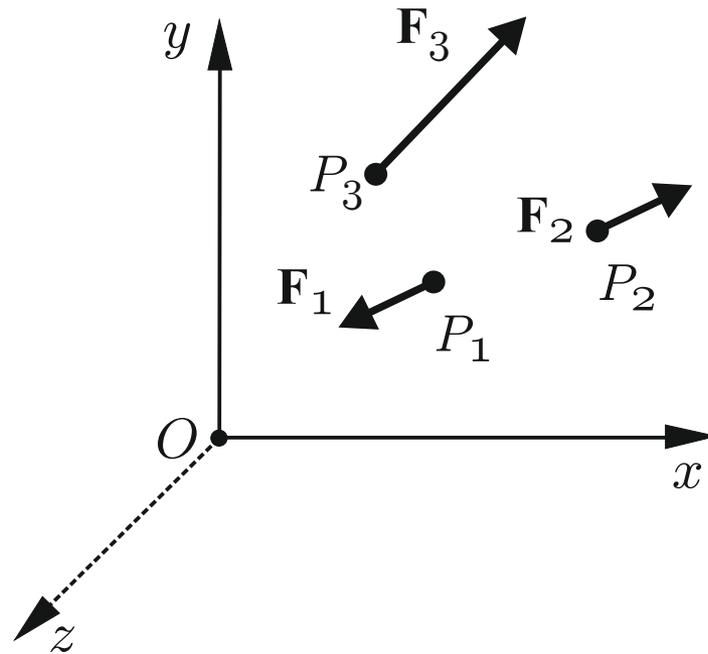
$$v_z = z_B - z_A$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Sistema di vettori piani



2. Teoria dei vettori: operazioni elementari

Prodotto fra vettore \mathbf{v} e numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

direzione: stessa di \mathbf{v}

verso: concorde a \mathbf{v} se $\lambda \geq 0$

discorde a \mathbf{v} se $\lambda \leq 0$

modulo: $|\mathbf{w}| = |\lambda| |\mathbf{v}|$

Se $\lambda = 0$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

(vettore nullo)

Se $\lambda = -1$

$$\mathbf{w} = -\mathbf{v}$$

*(vettori uguali
e opposti)*

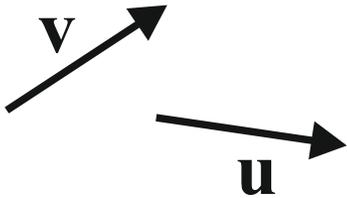
Componenti scalari:

$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (\lambda v_x, \lambda v_y)$$

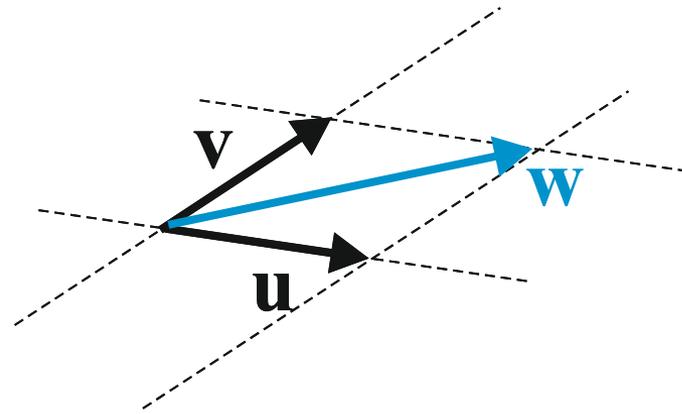
2. Teoria dei vettori: operazioni elementari

Somma fra vettori

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$$



Direzione, verso, modulo: regola del parallelogramma



Proprietà

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

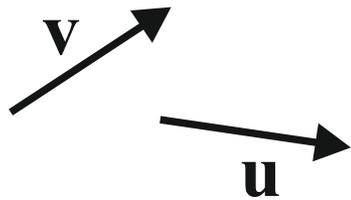
$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

Componenti scalari:

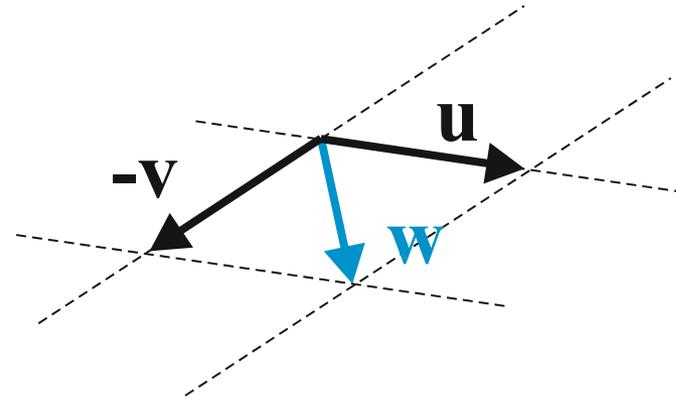
$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Differenza fra vettori

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$



Direzione e verso: regola del parallelogramma

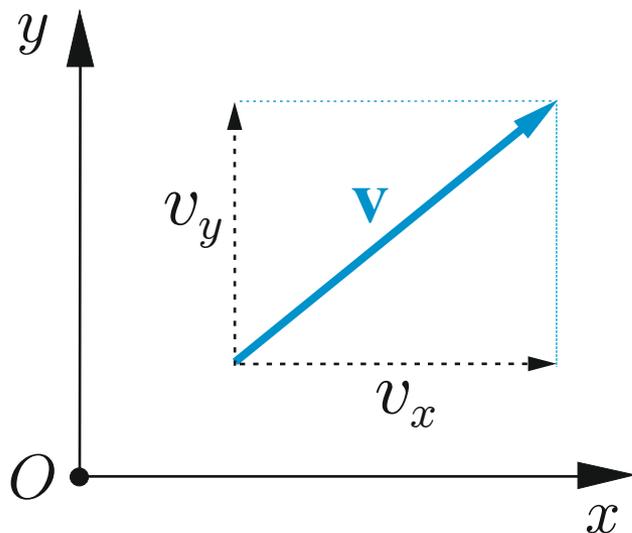


Componenti scalari:

$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (u_x - v_x, u_y - v_y)$$

2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$

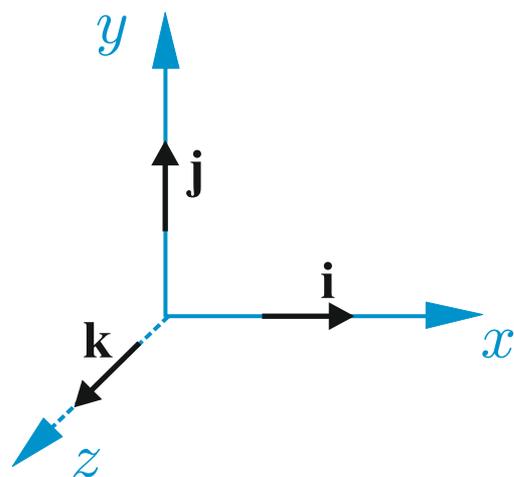
$$v_y = y_B - y_A$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \equiv v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y)$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Combinazione lineare di N vettori

$$\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_N \mathbf{v}_N = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Vettori linearmente indipendenti

$$\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

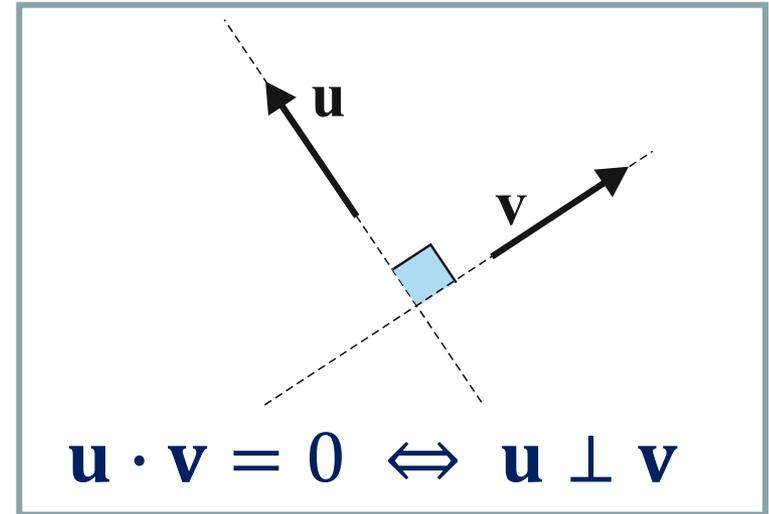
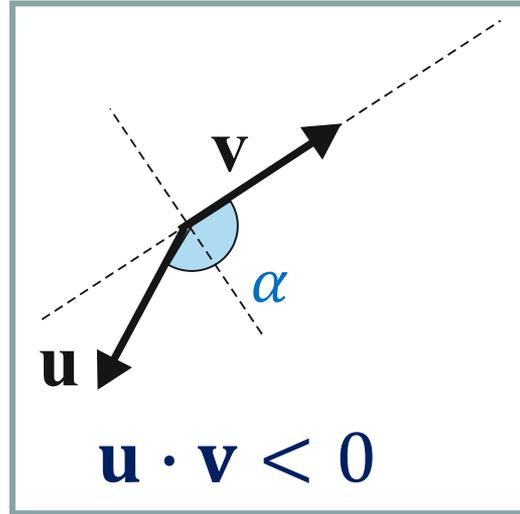
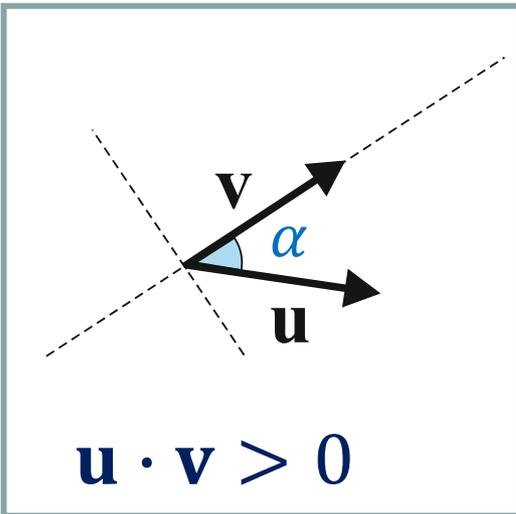
Vettori linearmente indipendenti

la loro combinazione lineare si annulla se e solo se:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 0$$

Prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\alpha) = uv \cos(\alpha) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$



Se i vettori sono paralleli e concordi: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = +uv$

Se i vettori sono paralleli e discordi: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -uv$

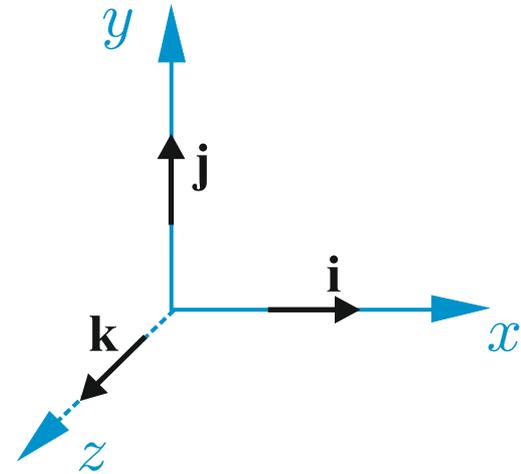
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = u^2$$

2. Teoria dei vettori: prodotto scalare

Prodotto scalare dei versori cartesiani

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$



Componenti scalari (caso piano):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}) (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}) = u_x v_x + u_y v_y$$

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow u_x v_x + u_y v_y = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 \Rightarrow |\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2. Teoria dei vettori: prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

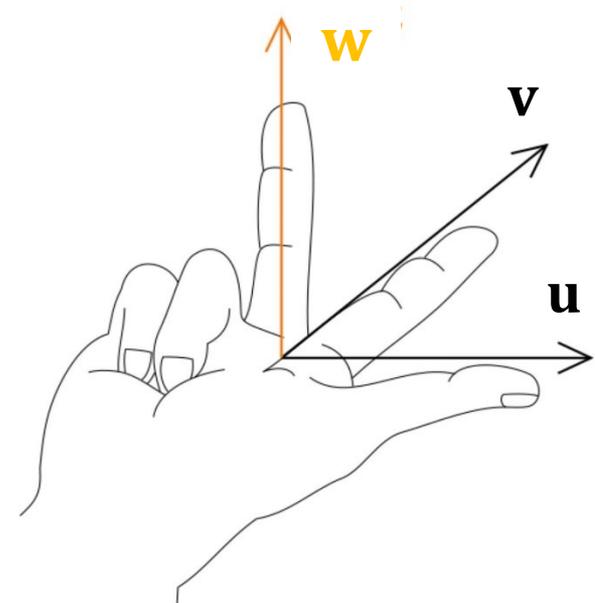
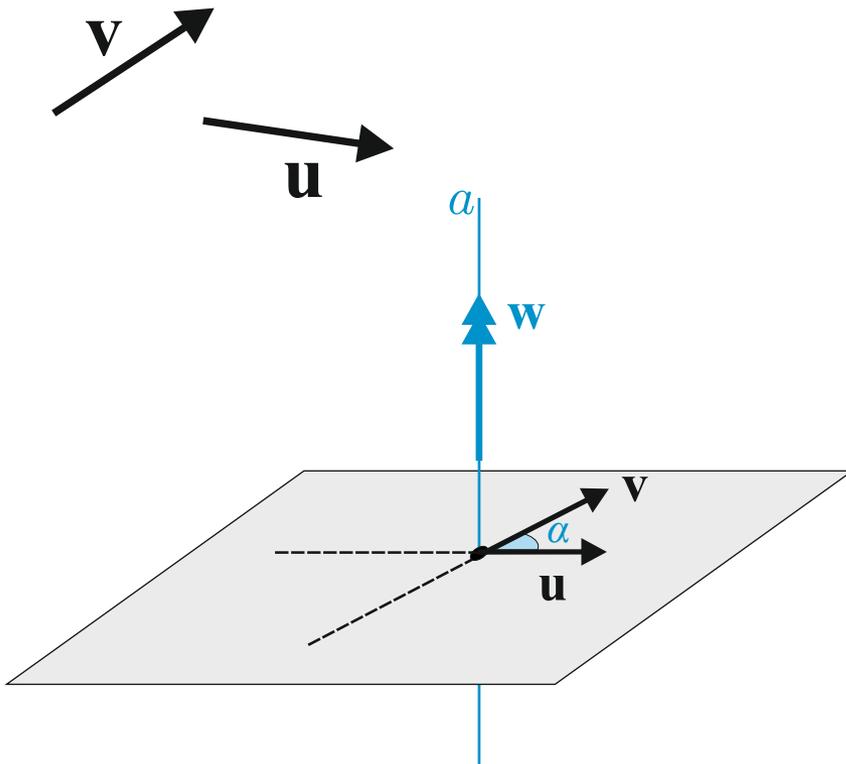
direzione: perpendicolare al piano (\mathbf{u}, \mathbf{v})

verso: regola della mano destra

modulo: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\alpha)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} // \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$



Prodotto vettoriale, componenti scalari

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \text{Det} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = (u_y v_z - u_z v_y) \mathbf{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{k}$$

Componenti scalari (u e v nel piano xy)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \text{Det} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{bmatrix} = (u_x v_y - u_y v_x) \mathbf{k}$$