

# Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/statica](http://www.pcasini.it/disg/statica)

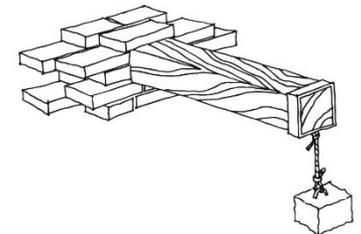
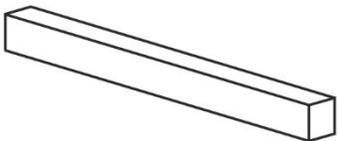
**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
  - Metodo degli spostamenti
  - Metodo delle Forze

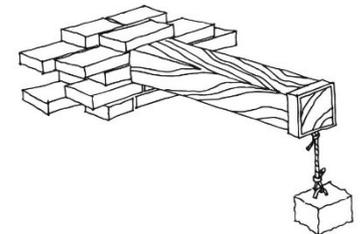
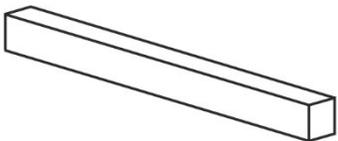




# Lezione

## Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- **Problema elastico**
  - Metodo degli spostamenti
  - Metodo delle Forze





# Parte III - Il modello di trave elastica 1D

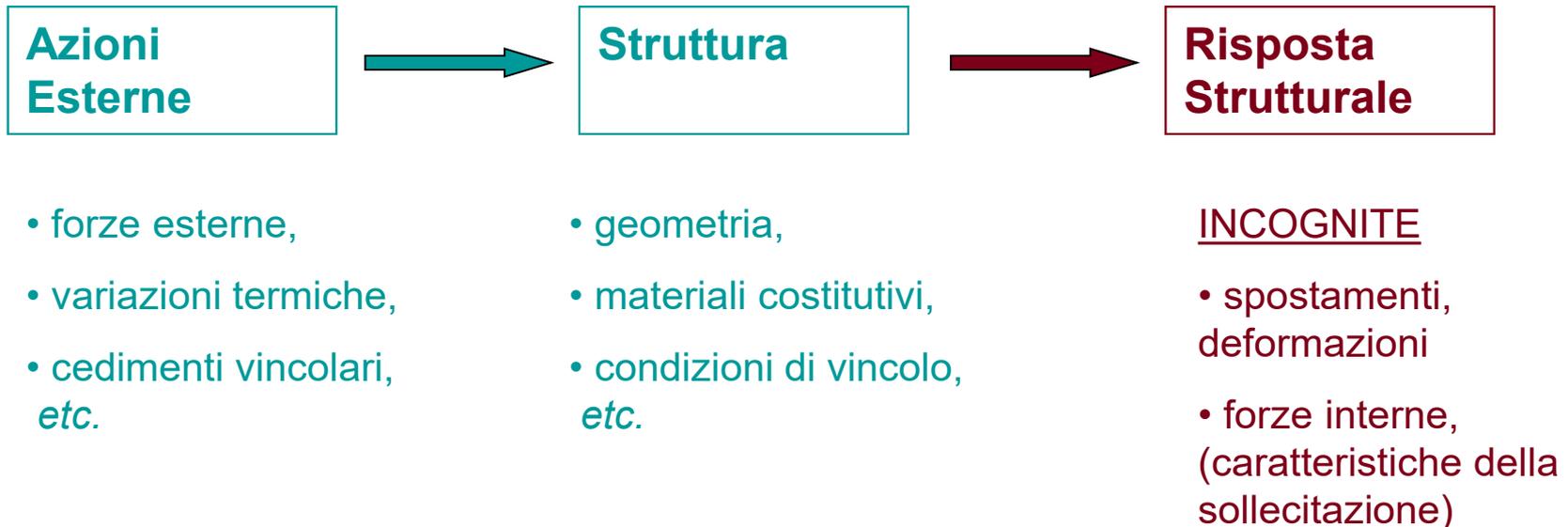
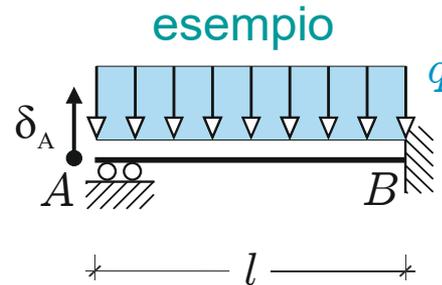
## Lezione

### 5. Metodo degli spostamenti (linea elastica)

- **Obiettivi**
- **Equazioni della linea elastica**
  - Problema assiale
  - Problema flessionale
  - Condizioni al contorno
- **Esercizi** (sito: E15; testo §9.4-9.6)

## 4. Problema elastico (elastostatico)

Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato *in equilibrio* sotto azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.



$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

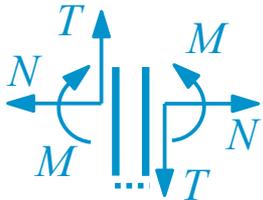
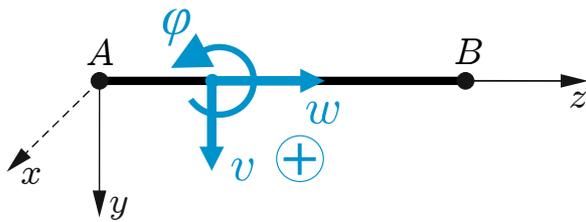
## Incognite cinematiche

$$w(z) \quad v(z) \quad \varphi(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

## Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



## 5. Metodo degli spostamenti: obiettivi

**Obiettivi:** risolvere il problema elastico assumendo come *incognite primarie* gli **spostamenti** dei punti della linea d'asse della trave. Noti gli spostamenti, si determinano successivamente le altre incognite del problema.

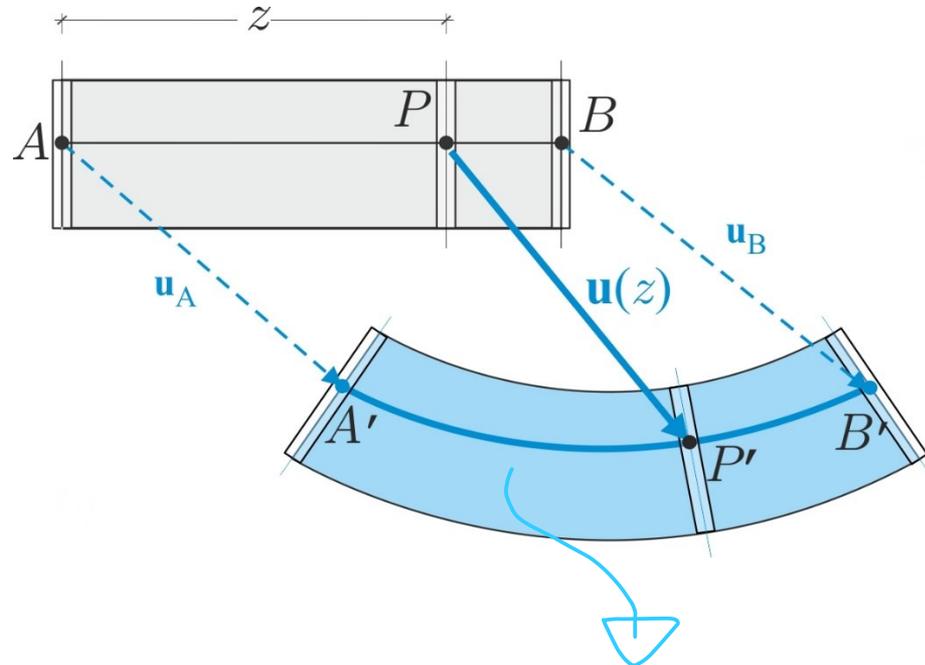
**Incognite primarie:**  
spostamenti  $w$  e  $u$

$$w(z) \quad v(z)$$

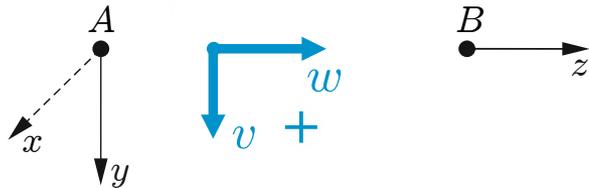
$$\varphi(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



*Linea elastica*  
(assetto della linea d'asse  
nella configurazione  $C'$ )



## 5. Metodo degli spostamenti (Eulero-Bernoulli)

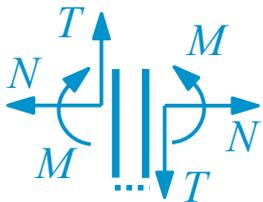
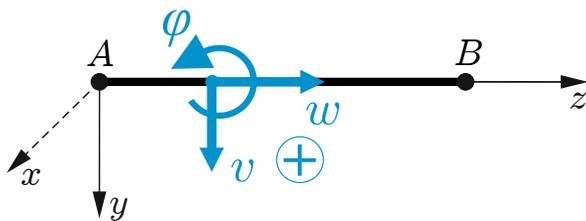
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

### Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{matrix}$$

### Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

## 5. Metodo degli spostamenti

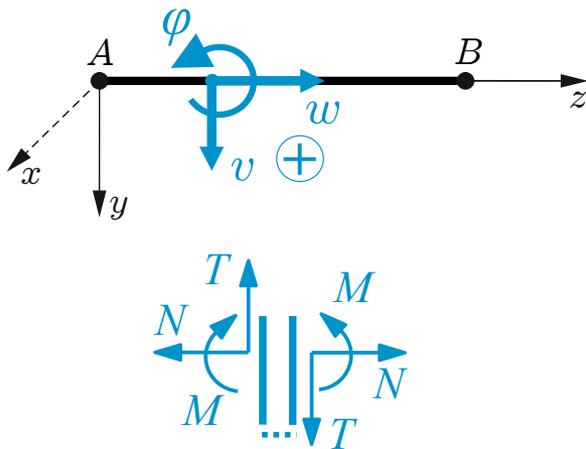
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

### Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

### Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

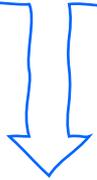
## 5. Metodo degli spostamenti

### Incognite cinematiche

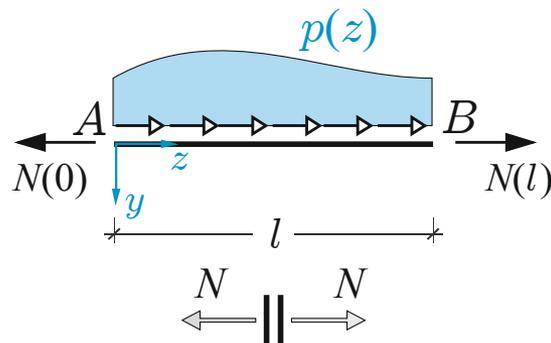
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

### Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



### Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

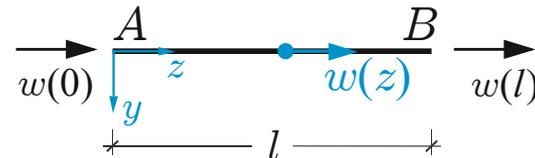
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

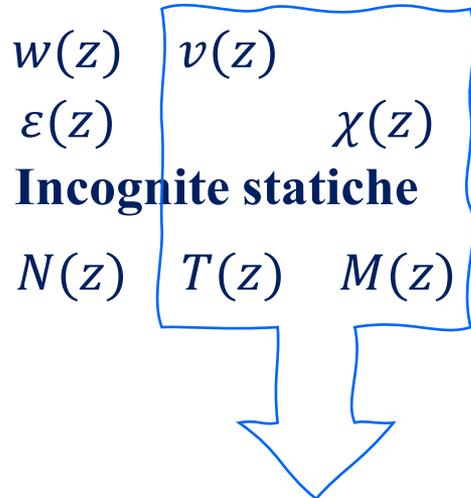
Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

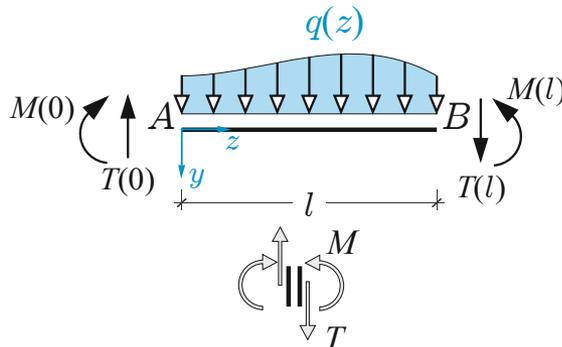


## 5. Metodo degli spostamenti

### Incognite cinematiche



### Problema flessionale (Eulero-Bernoulli)



Cinematica: equazioni di congruenza

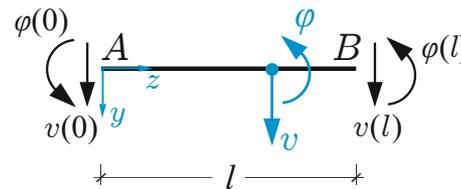
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



## 5. Metodo degli spostamenti

**Incognite primarie:**  
spostamenti  $w$  e  $v$

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

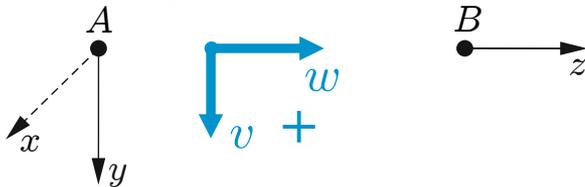
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



## 5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

### Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

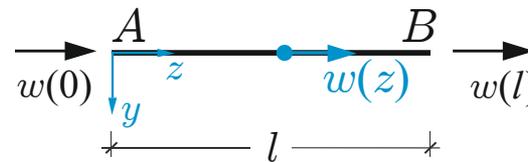
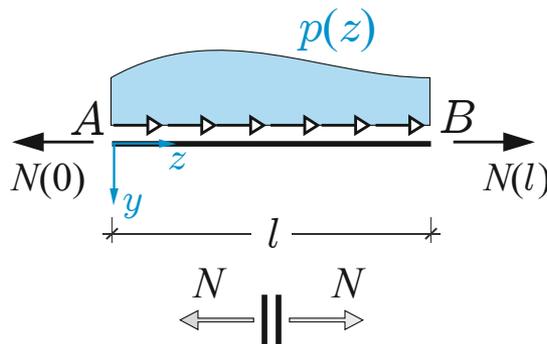
$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA \varepsilon(z)$$



$$N(z) = EA w'(z) \quad \rightarrow \quad (EA w'(z))' + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

## 5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

### Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

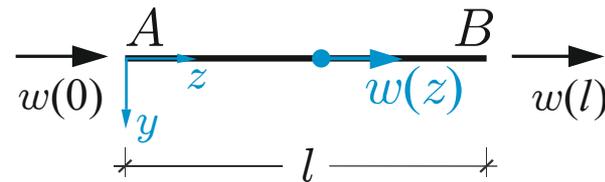
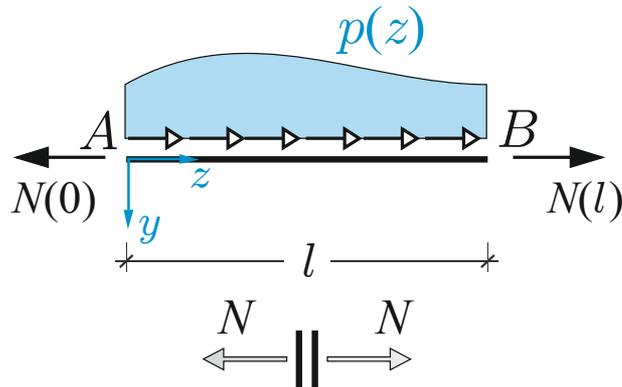
$$N(z)$$

### Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

$$N(z) = EA w'(z)$$



## 5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

### Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z)$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI \chi(z)$$

$$M(z) = -EI v''(z) \quad M''(z) - T'(z) = 0$$

$$M''(z) + q(z) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{-\left(EI v''(z)\right)'' + q(z) = 0}$$

## 5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

### Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

### Equazione della linea elastica

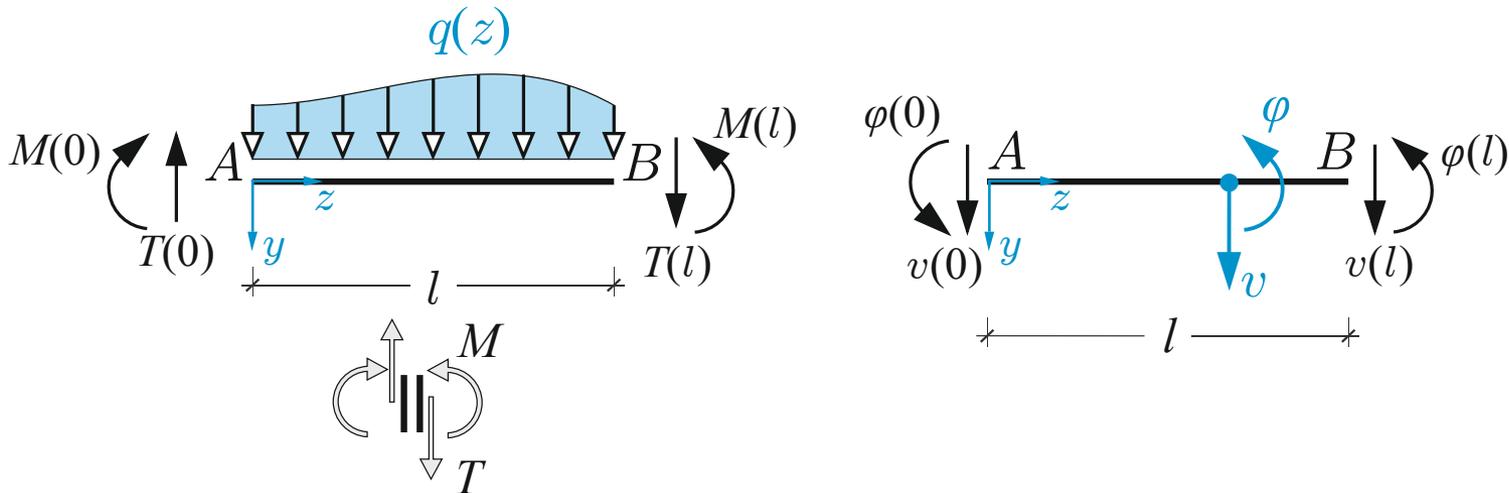
$$EI v''''(z) = q(z) + c.c$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\chi(z) = -v''(z)$$

$$T(z) = M'(z) = -EI v''''(z)$$

$$M(z) = -EI v'''(z)$$



## 5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

### Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ M(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c.c.} \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''''(z) = q(z) \quad + \text{c.c.} \quad (2)$$

**NB1** Le equazioni precedenti sono valide per *un'unica trave* con vincoli alle estremità, eventuali forze distribuite variabili con continuità, eventuali forze o coppie concentrate applicate solo alle estremità.

Lo studio si estende immediatamente *ai sistemi di travi* anche in presenza di discontinuità lungo la linea d'asse.

**NB2** I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati nelle equazioni, ma potrebbero essere accoppiati nelle condizioni al contorno (ad es. in presenza di un carrello o un glifo il cui asse forma un angolo diverso da 0 o da  $\frac{\pi}{2}$  con l'asse della trave)

## 5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

### Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ M(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c.c.} \quad (1)$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''''(z) = q(z) \quad + \text{c.c.} \quad (2)$$

**NB3** Si è fatta l'ipotesi di materiale omogeneo e sezione costante:  $EA$ ,  $EI$  uniformi

**NB4** Poiché l'Eq. (1) è un'equaz. diff. lineare del secondo ordine in  $w(z)$  si devono utilizzare c.c. di ordine non superiore al primo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti  $w$  o le forze normali alle estremità  $EA w'$

**NB5** Poiché l'Eq. (2) è un'equaz. diff. lineare del quarto ordine in  $v(z)$  si devono utilizzare c.c. di ordine non superiore al terzo: pertanto quest'ultime possono riguardare solo gli spostamenti  $v$  le rotazioni  $-v'$ , o le forze di taglio  $-EI v'''$  e i momenti flettenti  $-EI v''$  alle estremità.