

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



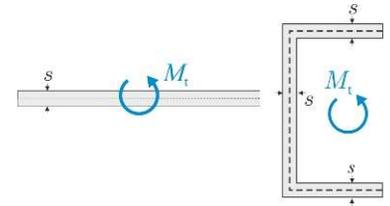
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

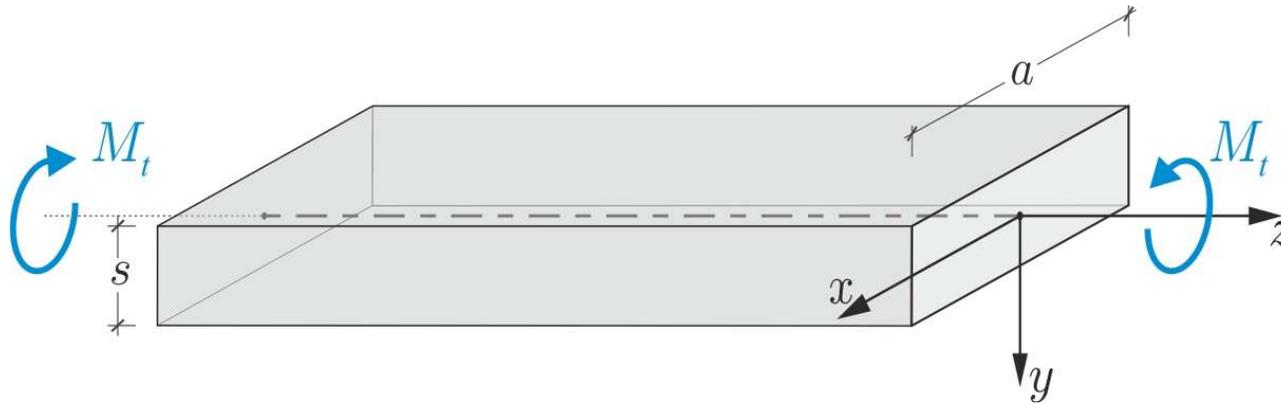
5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- **Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili**
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)



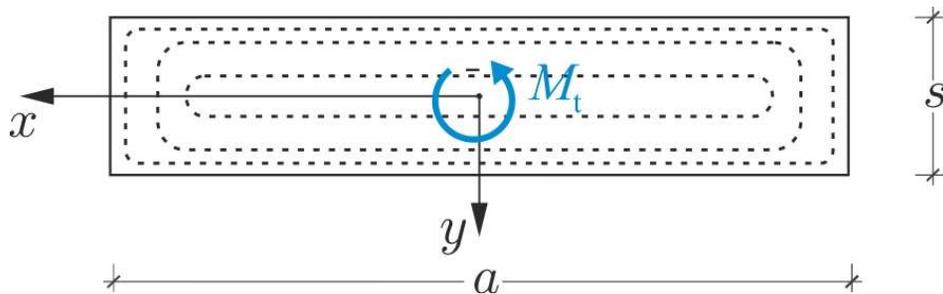


Sezione rettangolare sottile

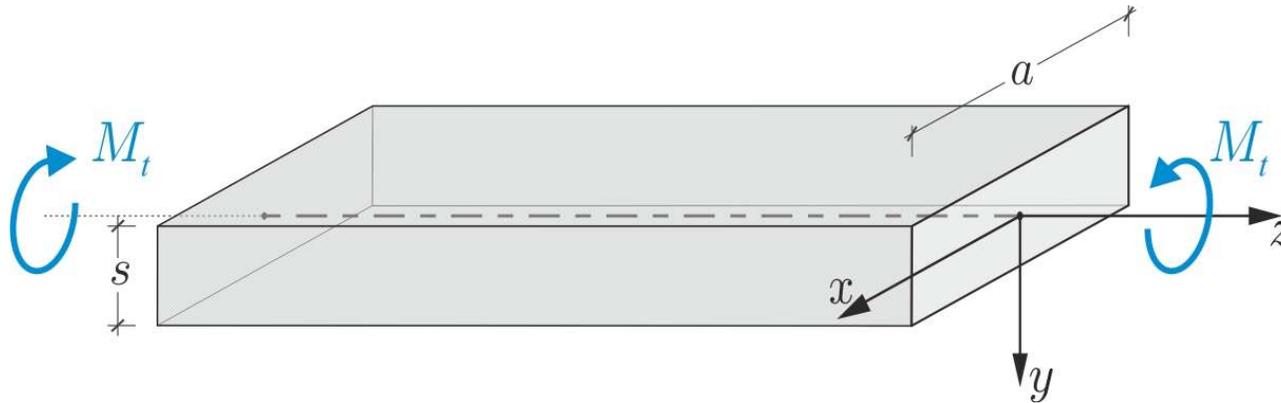


$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)

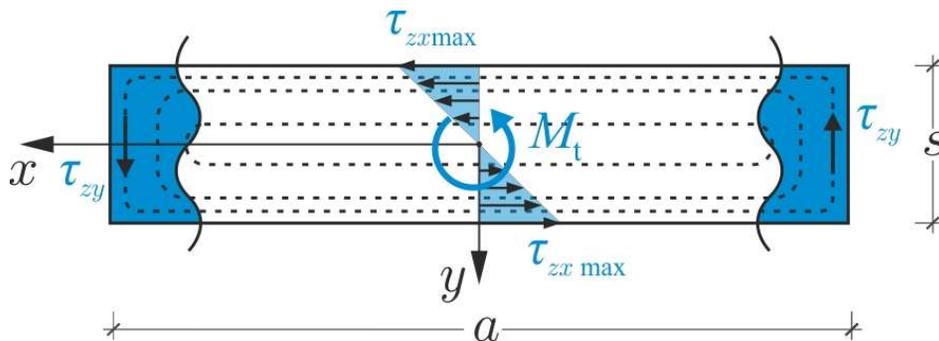


Sezione rettangolare sottile



$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)



Soluzione del problema di Neumann

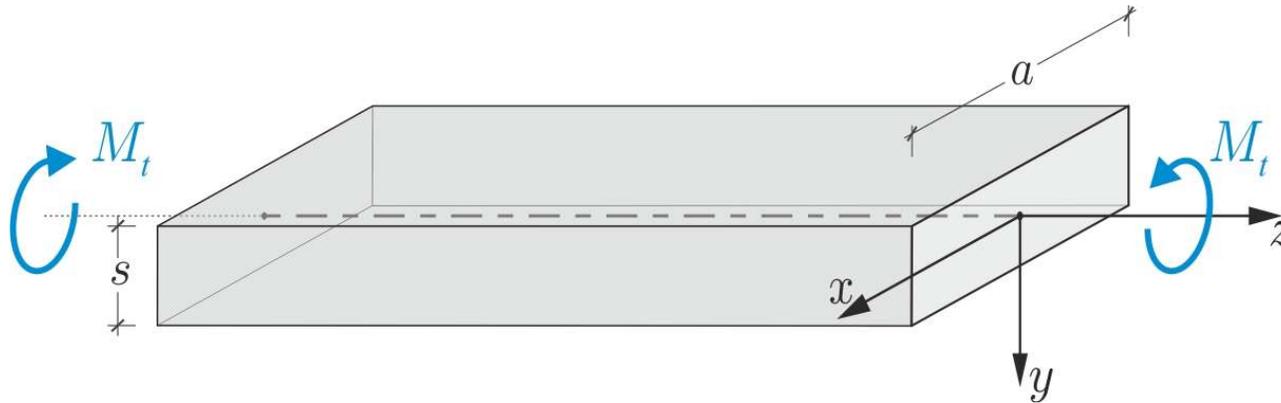
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{k_1 a s^3}$$

$$I_t = k_2 a s^3$$

$$\frac{a}{s} \rightarrow \infty \quad k_1 \rightarrow \frac{1}{3}$$

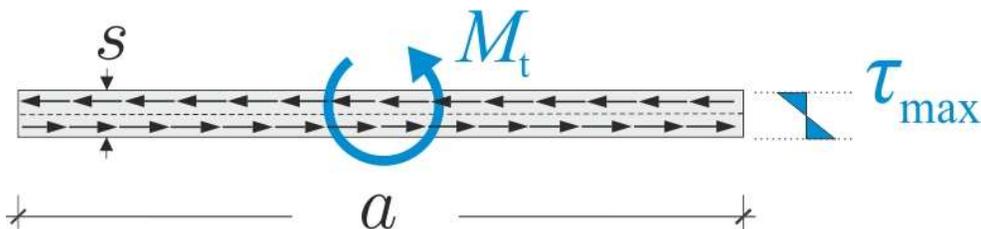
$$k_2 \rightarrow \frac{1}{3}$$

Sezione rettangolare sottile



$$s \ll a$$

Analogia idrodinamica (tensioni)

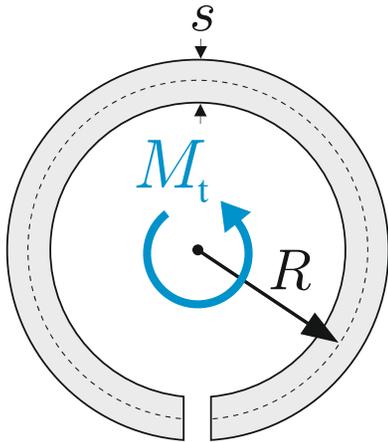


$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} a s^3$$

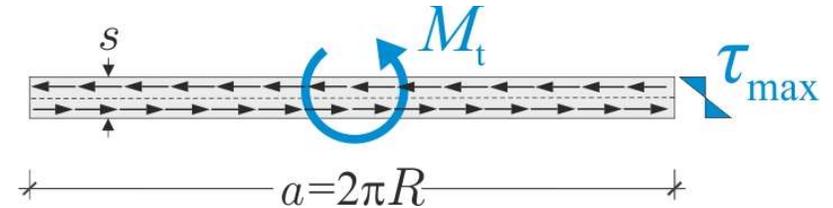
$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

Sezioni sottili aperte rettificabili

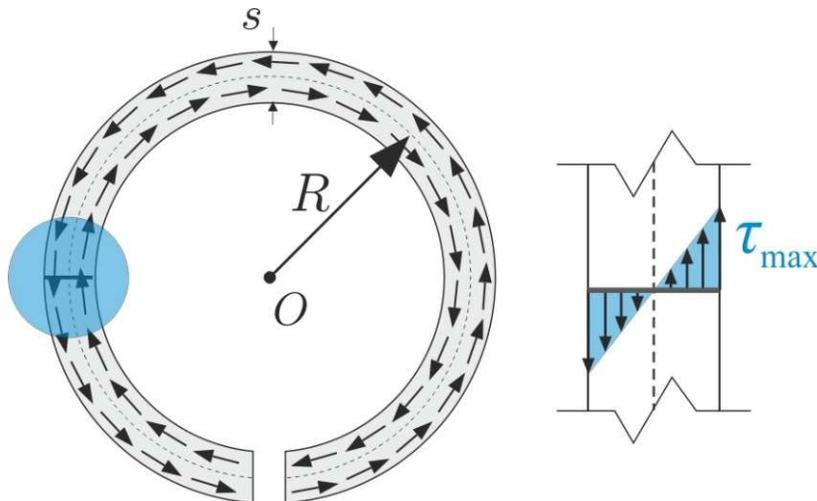


$$s \ll a$$

$$a \cong 2\pi R$$



Andamento delle tensioni

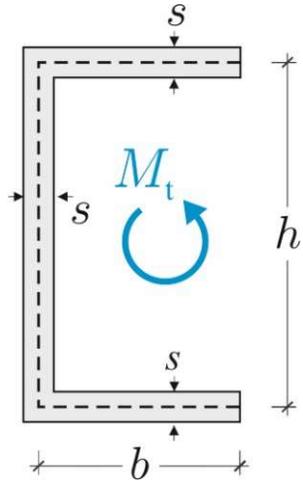


$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} (2\pi R) a s^3$$

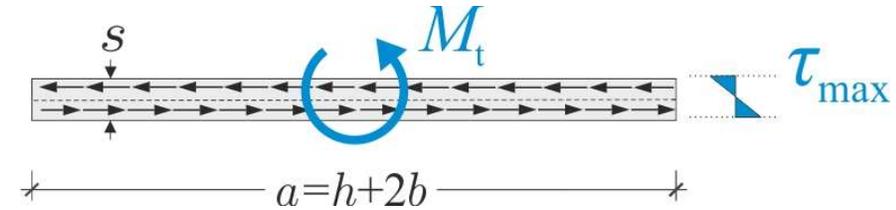
$$\theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

Sezioni sottili aperte rettificabili

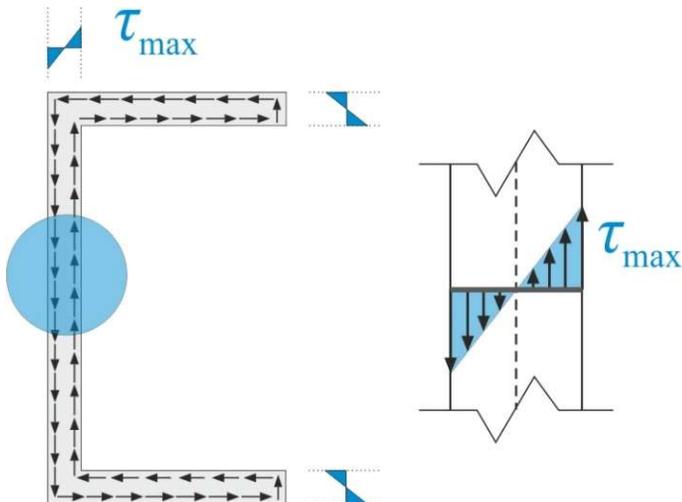


$$s \ll a$$

$$a = h + 2b$$



Andamento delle tensioni



$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} s$$

$$I_t = \frac{1}{3} (h + 2b) a s^3$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$$

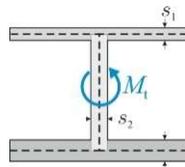


Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili

- **Sezioni sottili aperte**

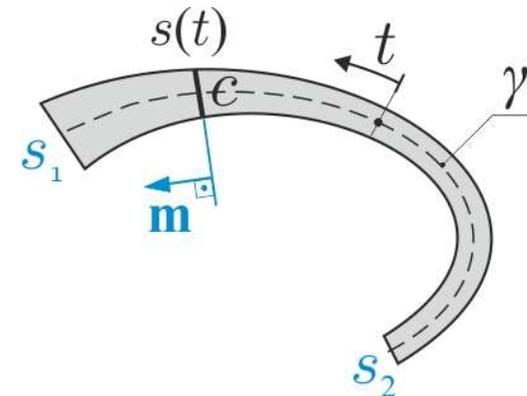


- Sezioni sottili chiuse:
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

5. Torsione uniforme: sezioni sottili

Definizione

*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



γ : linea media

c : corda (segmento perpendicolare alla linea media)

t : ascissa locale

\mathbf{m} : versore perpendicolare alla corda e orientato concordemente all'ascissa locale

$s(t)$: lunghezza della corda detta spessore (costante o variabile con t)

$$mis(\gamma) := a$$

$$mis(c) := s(t)$$

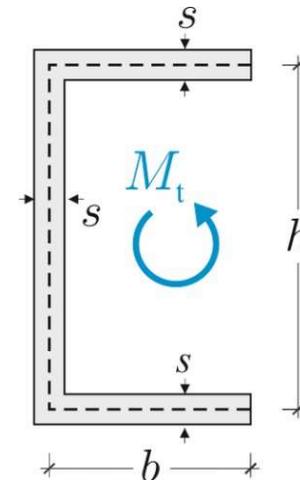
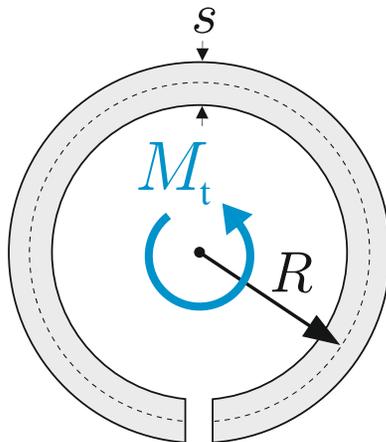
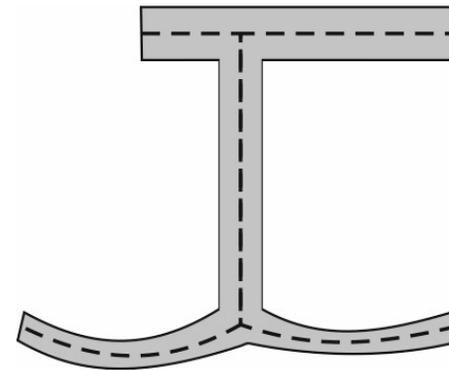
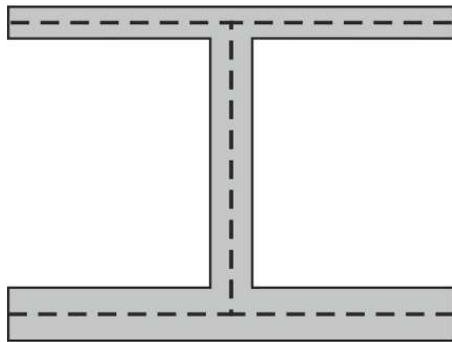
$$s \ll a$$

$$0 \leq t \leq a$$

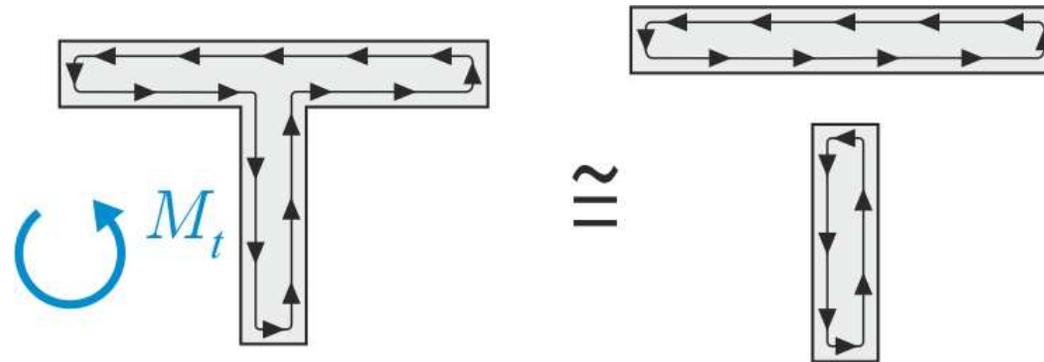


Sezioni sottili aperte: geometria

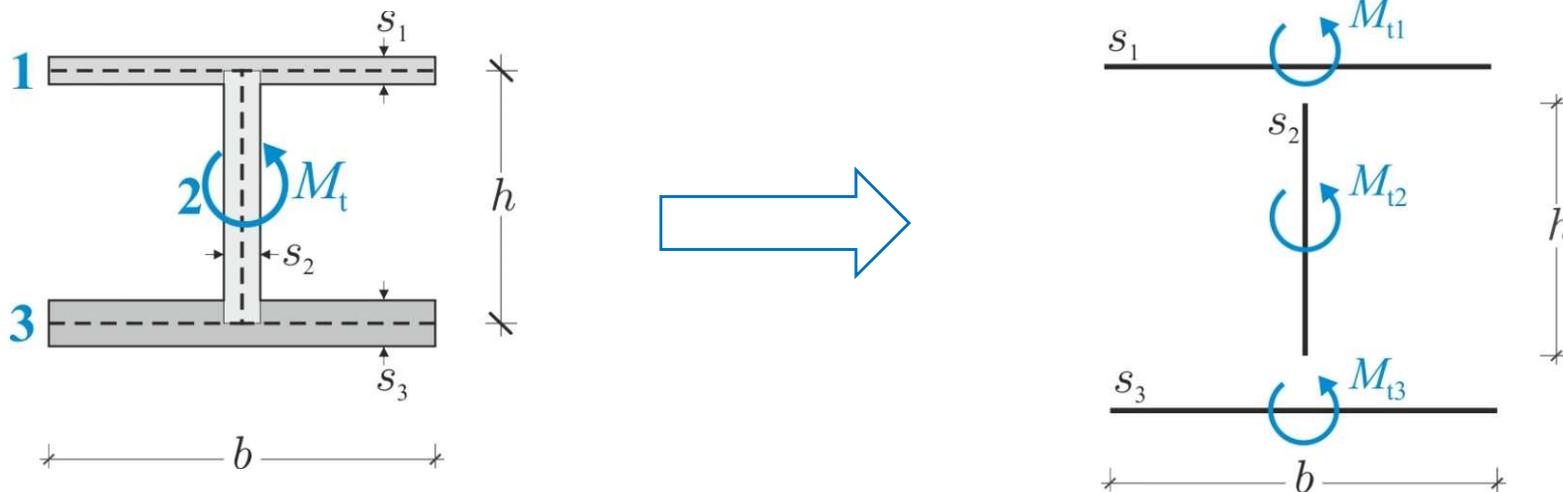
- La linea media γ non descrive curve chiuse (*cicli*): non sono presenti cavità (*lacune*)



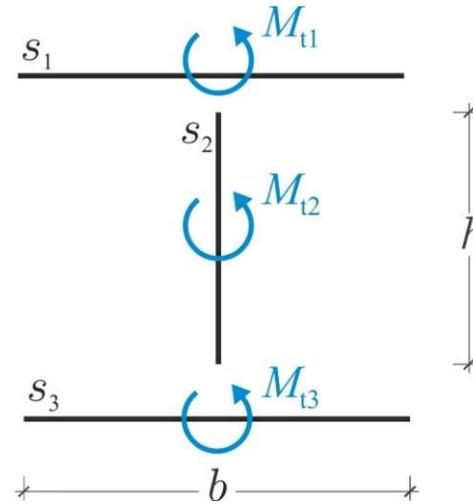
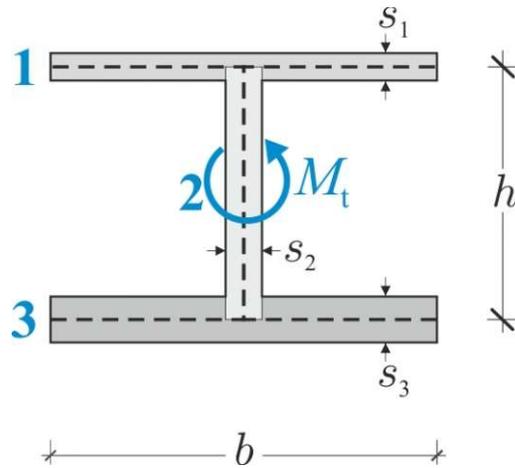
Sezioni sottili aperte composte (considerazioni intuitive)



Ripartizione del momento torcente



Ripartizione del momento torcente



$$I_{ti} = \frac{1}{3} a_i s_i^3$$

$$I_t = \sum I_{ti} = \sum \frac{1}{3} a_i s_i^3$$

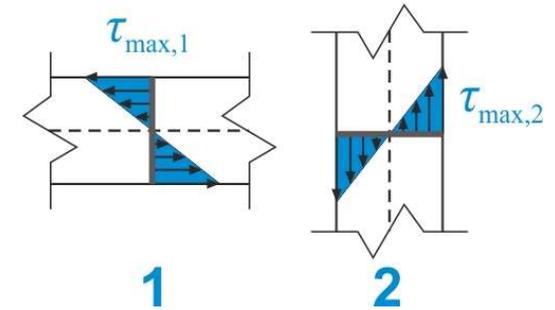
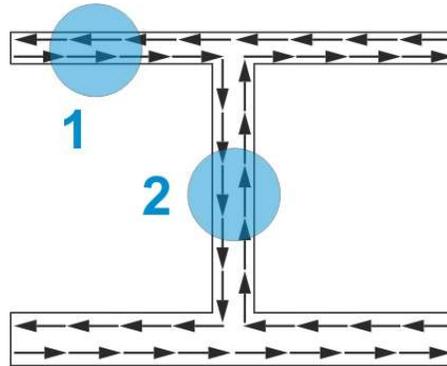
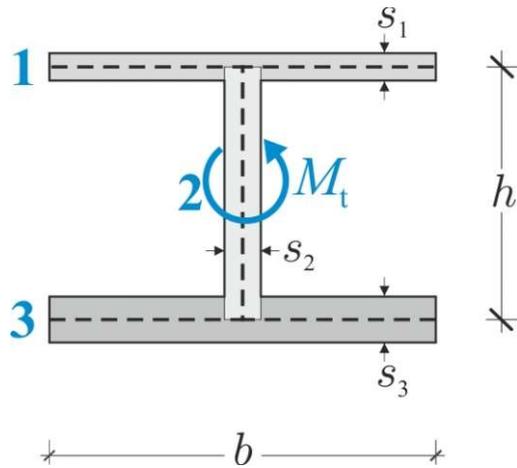
$$M_{ti} = \frac{I_{ti}}{I_t} M_t$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_{ti}}{I_{ti}} s_i$$



$$\tau_{max,i} = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

Ripartizione del momento torcente



$$I_t = \sum I_{ti} = \frac{1}{3} b s_1^3 + \frac{1}{3} h s_2^3 + \frac{1}{3} b s_3^3$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_t}{I_t} s_i$$

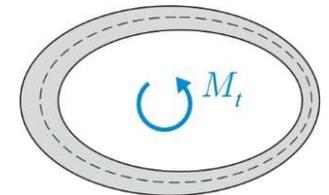
$$\theta = \frac{M_t}{G I_t}$$



Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- **Sezioni sottili chiuse:**
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)



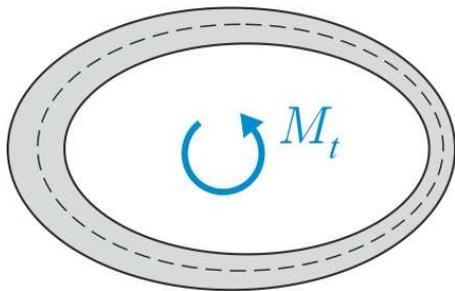


5. Torsione uniforme: sezioni sottili chiuse

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

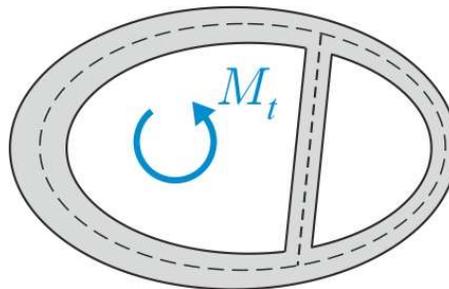
Applicabilità: Sezioni chiuse di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$)

- La linea media γ descrive una o più curve chiuse (*cicli*)
- Il *grado di connessione* c è definito come: $c = k + 1$, dove k è il numero *minimo* di tagli, da effettuare sulla linea media, per rendere aperta la sezione



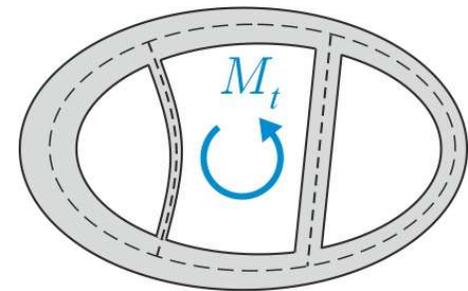
$$c = 2$$

Sezione biconnessa



$$c = 3$$

Sezione triconnessa



$$c = 4$$

Sezione 4-connessa

$$\text{Numero di cicli} = c - 1$$

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

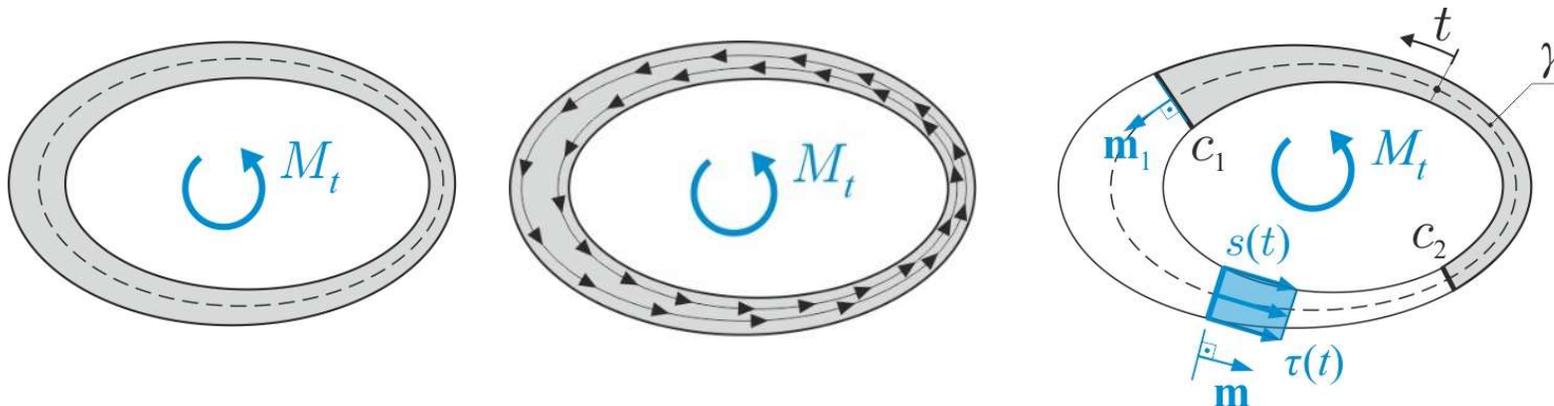
Ipotesi (analogia idrodinamica)

Ipotesi 1: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è parallelo alla linea media γ e quindi perpendicolare alla corda

Ipotesi 2: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è orientato in modo da percorrere la linea media nel verso del momento torcente

Ipotesi 3: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è costante lungo la corda, il suo modulo dipende quindi dalla sola ascissa locale t :

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$



$$\text{mis } \gamma := a$$

$$0 \leq t \leq a$$

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione $q = \text{cost.}_t$

Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\boxed{\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0, P \in \mathcal{A}} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

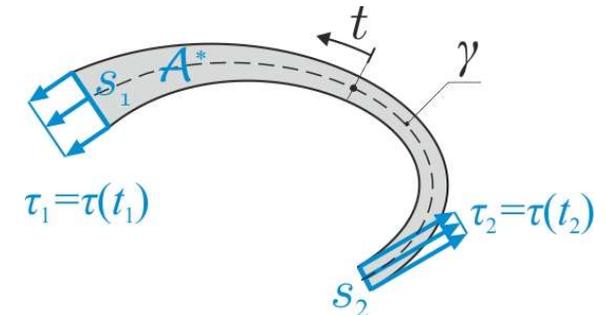
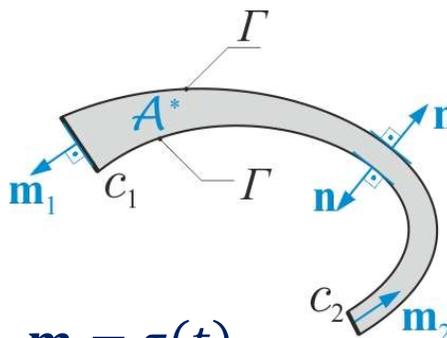
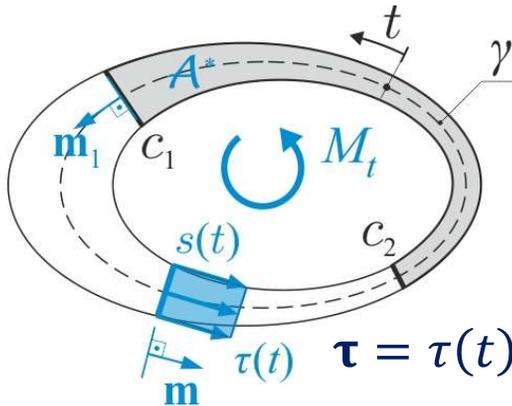
Frontiera \mathcal{A}^* e normali uscenti \mathbf{n}^*

$$\begin{array}{cccc} \partial \mathcal{A}^* & = & c_1 \cup \Gamma & \cup c_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{n}^* & & \mathbf{m}_1 & \mathbf{n} \quad \downarrow \\ & & & -\mathbf{m}_2 \end{array}$$

Teorema della divergenza

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = 0 \quad \Longrightarrow \quad \oint_{\partial \mathcal{A}^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^* dl = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\int_{c_1} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}_1 dl + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dl + \int_{c_2} \boldsymbol{\tau} \cdot (-\mathbf{m}_2) dl = 0$$



Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione $q = \text{cost.}_t$

Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0, P \in \mathcal{A}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

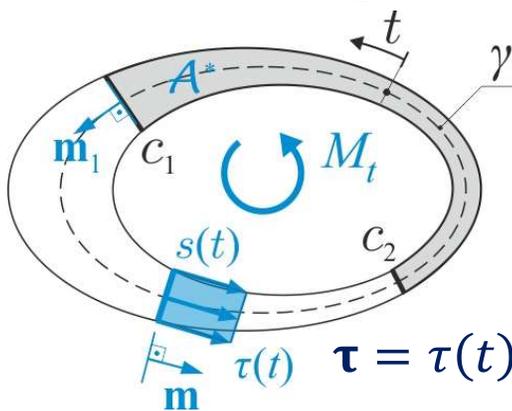
Frontiera \mathcal{A}^* e normali uscenti \mathbf{n}^*

$$\begin{array}{cccc} \partial \mathcal{A}^* & = & c_1 \cup \Gamma & \cup c_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{n}^* & & \mathbf{m}_1 & \mathbf{n} \\ & & & \downarrow \\ & & & -\mathbf{m}_2 \end{array}$$

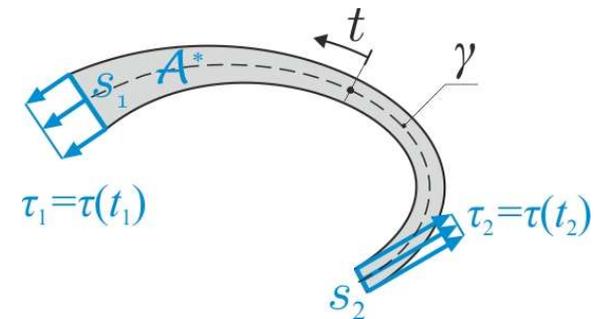
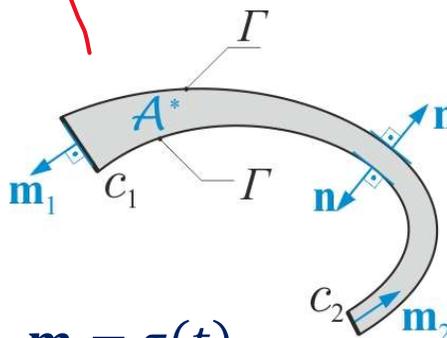
Teorema della divergenza

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = 0 \implies \oint_{\partial \mathcal{A}^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^* dl = 0 \implies$$

$$\int_{c_1} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}_1 dl + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dl + \int_{c_2} \boldsymbol{\tau} \cdot (-\mathbf{m}_2) dl = 0$$



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m} \implies \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$



Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione $q = \text{cost.}_t$

Equazioni indefinite di equilibrio:

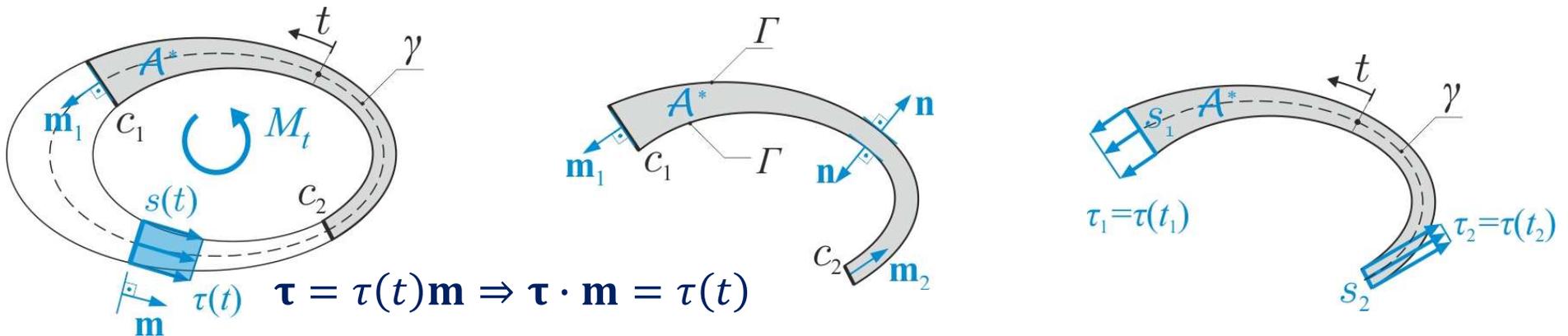
$$\boxed{\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0, P \in \mathcal{A}} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

Frontiera \mathcal{A}^* e normali uscenti \mathbf{n}^*

$$\begin{array}{cccc} \partial \mathcal{A}^* & = & c_1 \cup \Gamma & \cup c_2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{n}^* & & \mathbf{m}_1 & \mathbf{n} \\ & & & \downarrow \\ & & & -\mathbf{m}_2 \end{array}$$

$$\int_{c_1} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}_1 dl + \int_{c_2} \boldsymbol{\tau} \cdot (-\mathbf{m}_2) dl = 0 \implies \int_{c_1} \tau(t_1) dl - \int_{c_2} \tau(t_2) dl = 0 \implies$$

$$\tau_1 \int_{c_1} dl - \tau_2 \int_{c_2} dl = 0 \implies \tau_1 s_1 - \tau_2 s_2 = 0 \implies \boxed{\tau(t) s(t) = \text{cost.}_t}$$



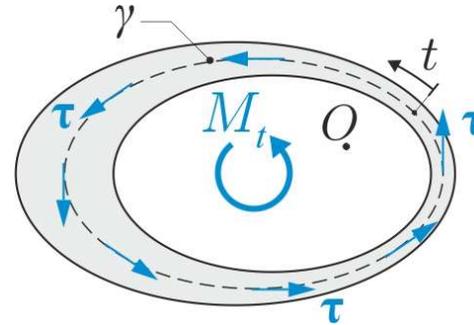
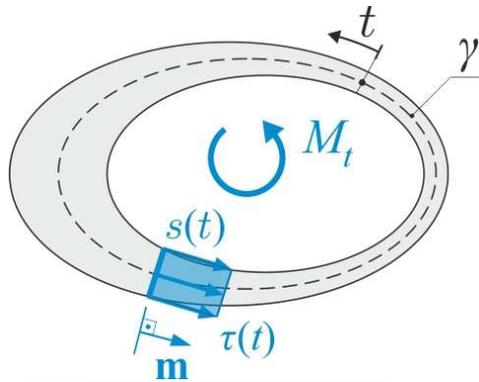
Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Formula di Bredt

Equivalenza statica fra momento torcente assegnato (M_t) e tensioni tangenziali (τ)

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

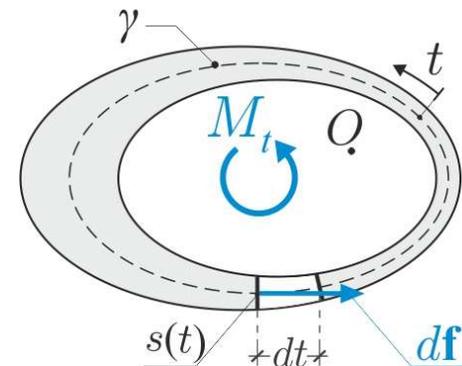


$$dA = s(t)dt$$

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\tau}(t)dA = \boldsymbol{\tau}(t)s(t)dt$$

$$|d\mathbf{f}| = |\boldsymbol{\tau}(t)|dA = \tau(t)s(t)dt = qdt$$

Il caso 9



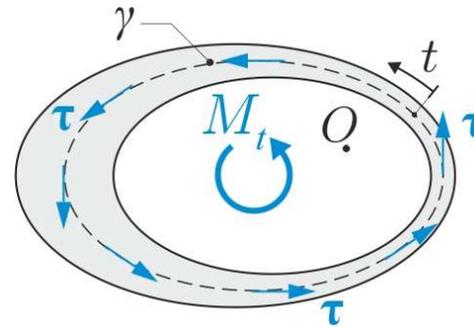
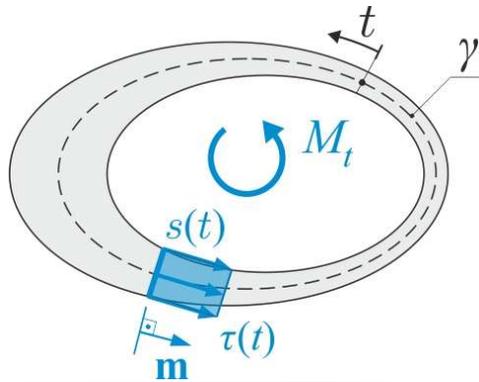
Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Formula di Bredt

Equivalenza statica fra momento torcente assegnato (M_t) e tensioni tangenziali (τ)

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$



Braccio forza interna $d\mathbf{f}$ rispetto a O : $r(t)$

Momento forza interna $d\mathbf{f}$ rispetto a O : dM_t

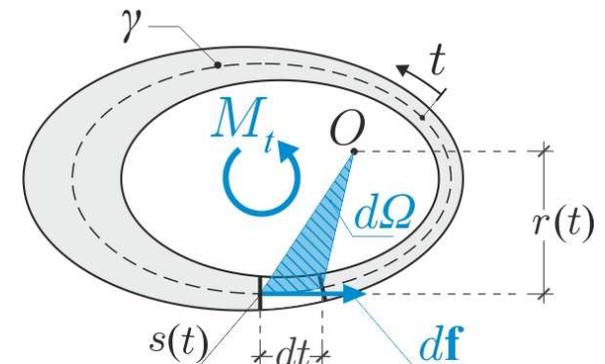
$$dM_t = |d\mathbf{f}|r(t) = q r(t)dt$$

$$d\Omega = \frac{1}{2} r(t)dt$$

$$r(t)dt = 2d\Omega$$

$$dM_t = q 2d\Omega$$

Polo generico O



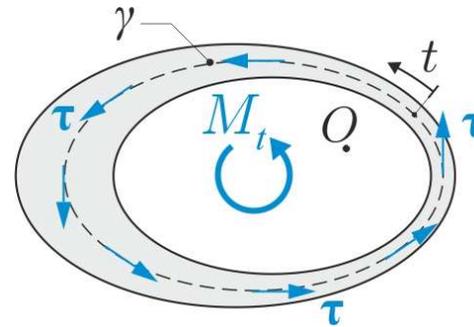
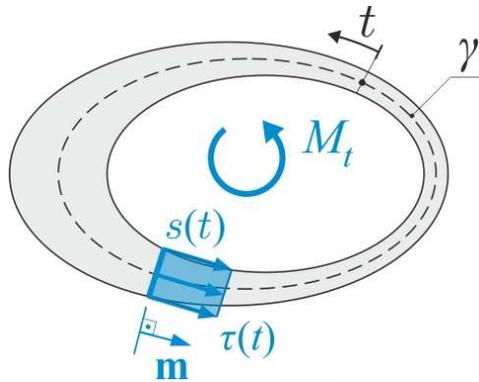
Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Formula di Bredt

Equivalenza statica fra momento torcente assegnato (M_t) e tensioni tangenziali (τ)

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

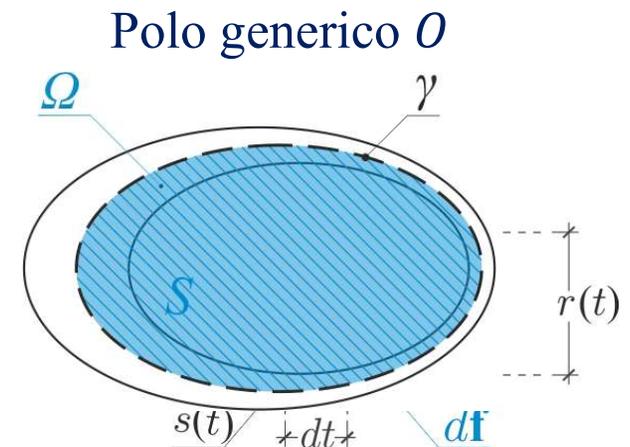


Equivalenza

$$M_t = \sum dM_t = \int dM_t = \int 2q d\Omega = 2q \int d\Omega = 2q\Omega$$

$$q = \tau(t)s(t) = \frac{M_t}{2\Omega}$$

$$\tau(t) = \frac{M_t}{2\Omega s(t)}$$



*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



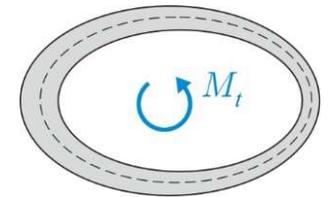
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- **Sezioni sottili chiuse:**
 - Teoria approssimata di Bredt
 - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)





Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Formule di Bredt

1. Formula '0'.

Flusso delle tensioni tangenziali q [FL^{-1}] costante lungo la linea media

$$q = \tau(t)s(t) = \text{cost.}_t \qquad \tau(t) = \frac{q}{s(t)}$$

2. Formula di Bredt

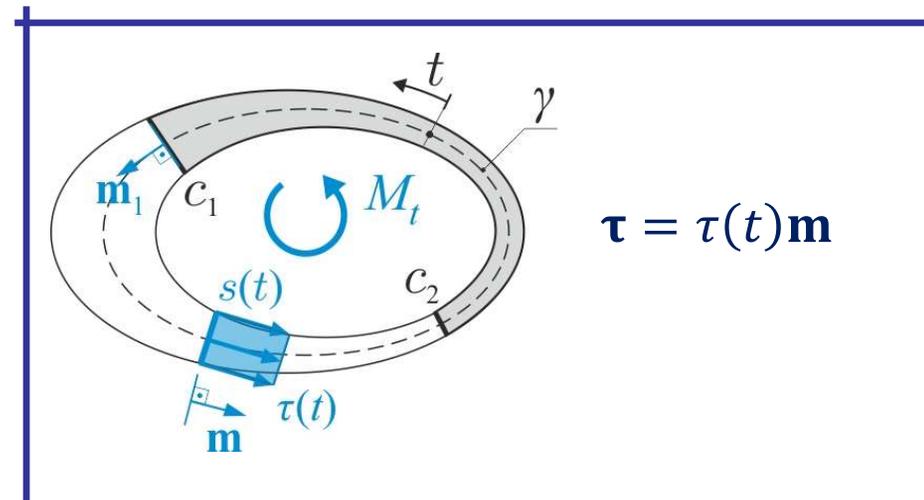
$$q = \tau(t)s(t) = \frac{M_t}{2\Omega}$$

$$\tau(t) = \frac{M_t}{2\Omega s(t)}$$

3. Seconda formula di Bredt

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}}$$

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$



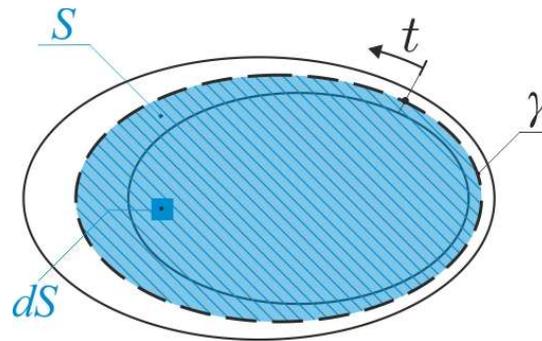
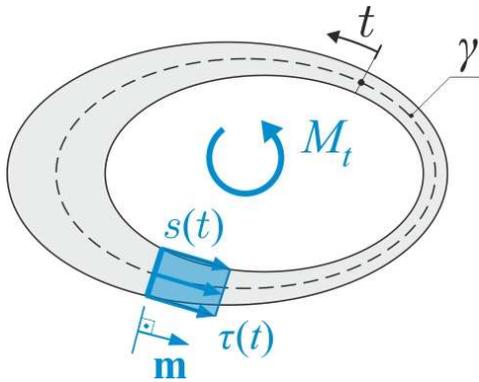
5. Torsione uniforme: sezioni sottili chiuse

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Seconda Formula di Bredt

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$\boxed{\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\theta\mathbf{k}} \implies \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} = 2G\theta$$



Estensione del dominio di definizione di $\text{rot } \boldsymbol{\tau}$ su S

$$\int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = \int_S 2G\theta dA = 2G\theta \int_S dA = 2G\theta\Omega \implies \int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = 2G\theta\Omega$$

Teorema di Stokes

$$\int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = \oint_{\gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} dt = \oint_{\gamma} \tau(t) dt = \oint_{\gamma} \tau(t) s(t) \frac{dt}{s(t)} = \oint_{\gamma} q \frac{dt}{s(t)} = q \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}$$

$$\implies \int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = q \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}$$



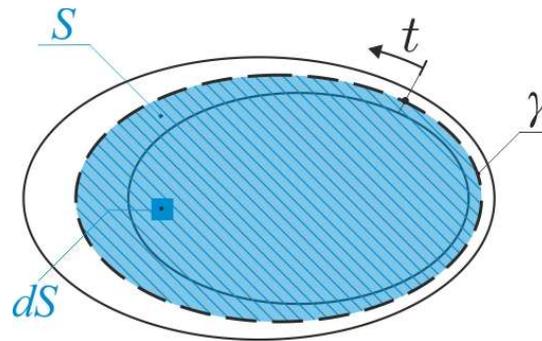
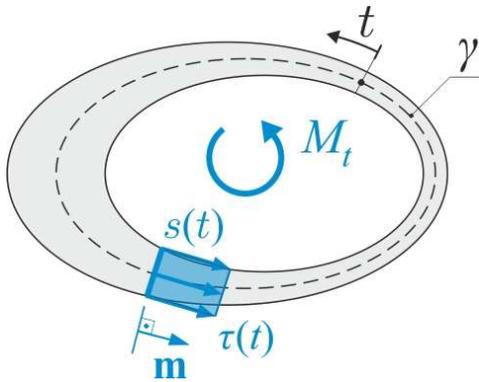
5. Torsione uniforme: sezioni sottili chiuse

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Seconda Formula di Bredt

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$\boxed{\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\theta\mathbf{k}} \Rightarrow \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} = 2G\theta$$



Estensione del dominio di definizione di $\text{rot } \boldsymbol{\tau}$ su S

$$\int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = 2G\theta\Omega$$

$$\int_S \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} dA = q \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}$$

$$\Rightarrow q \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)} = 2G\theta\Omega$$

$$q = \frac{M_t}{2\Omega}$$

(formula Bredt)

$$\Rightarrow \frac{M_t}{2\Omega} \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)} = 2G\theta\Omega$$



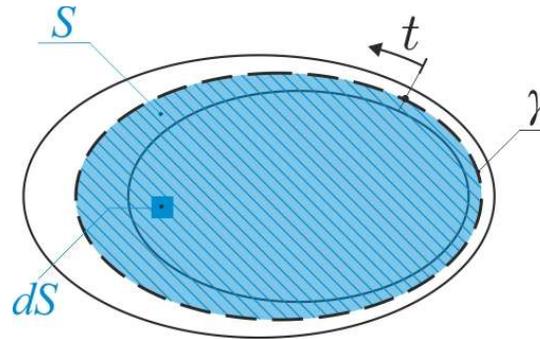
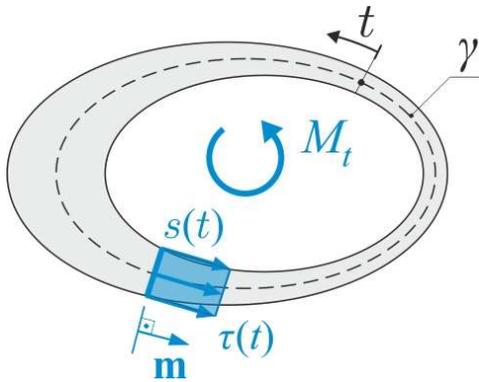
5. Torsione uniforme: sezioni sottili chiuse

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Dimostrazione della Seconda Formula di Bredt

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = \tau(t)$$

$$\boxed{\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta\mathbf{k}} \implies \text{rot } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} = 2G\Theta$$



Estensione del dominio di definizione di $\text{rot } \boldsymbol{\tau}$ su S

$$\frac{M_t}{2\Omega} \oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)} = 2G\Theta\Omega$$



$$M_t = G\Theta \frac{4\Omega^2}{\oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}}$$

$$M_t = G\Theta I_t$$



$$\boxed{I_t = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}}$$



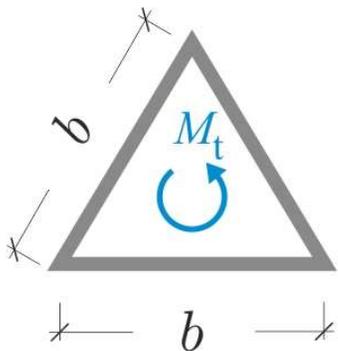
5. Torsione uniforme: sezioni sottili chiuse

Sezioni sottili chiuse: Teoria approssimata di Bredt

Seconda Formula di Bredt in sezioni a spessore costante: $s(t) = s$

$$I_{t,CH} = \frac{4\Omega^2}{\oint_{\gamma} \frac{dt}{s(t)}} = \frac{4\Omega^2}{\frac{1}{s} \oint_{\gamma} dt} = \frac{4\Omega^2}{\frac{1}{s} a} = \frac{4\Omega^2 s}{a}$$

Esempio



$$\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

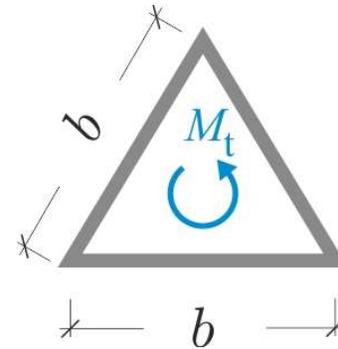
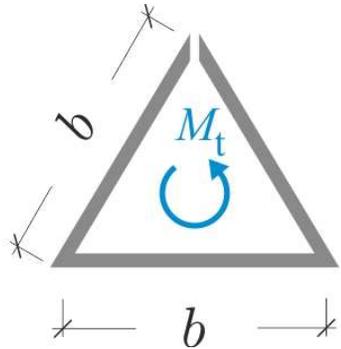
$$a = \oint_{\gamma} dt = 3b$$

$$I_{t,CH} = \frac{4\Omega^2 s}{a} = \frac{1}{4} b^3 s$$

5. Torsione uniforme

Confronto fra sezioni aperte e chiuse

Considerazioni intuitive



Video sezione aperta



Video sezione chiusa

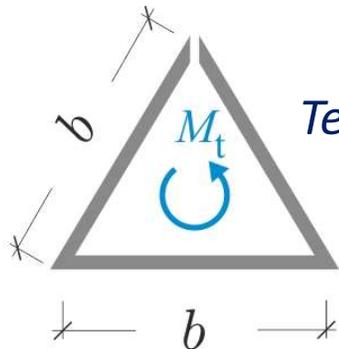
5. Torsione uniforme

Confronto fra sezioni aperte e chiuse

Inerzie torsionali a confronto

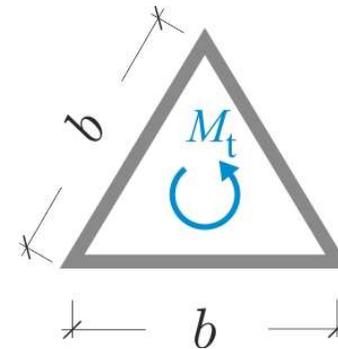
GI_t

→ Rigidezza torsionale [FL^2]



Teoria rettangoli sottili:

$$I_{t,AP} = bs^3$$



Teoria di Bredt:

$$I_{t,CH} = \frac{1}{4}b^3s$$

$$I_{t,CH} \gg I_{t,AP}$$

Dati numerici:

$$b = 20 \text{ mm}$$

$$s = 1 \text{ mm}$$

$$G = 0.5 \text{ kN/mm}^2$$

$$\rightarrow I_{t,AP} = 20 \text{ mm}^4$$

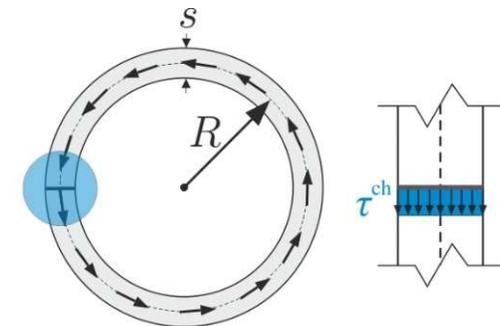
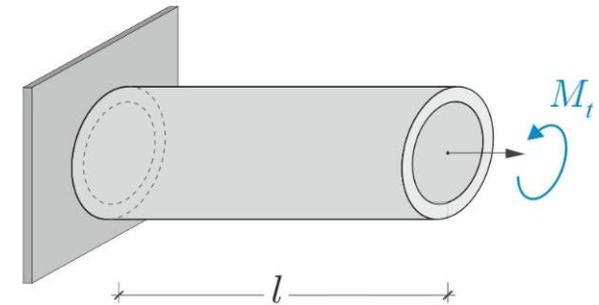
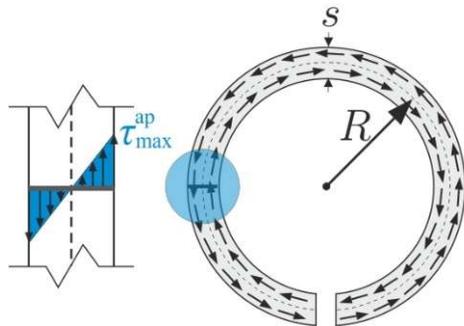
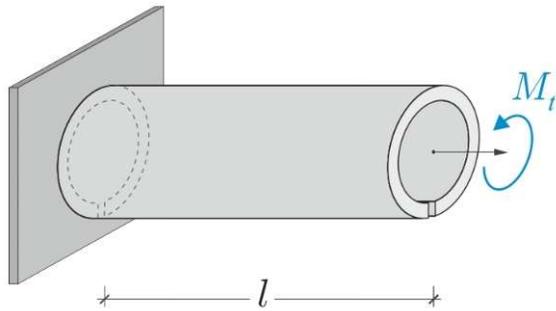
$$\rightarrow I_{t,CH} = 2000 \text{ mm}^4$$

$$\rightarrow GI_{t,AP} = 10 \text{ kN}$$

$$\rightarrow GI_{t,CH} = 1000 \text{ kN}$$

5. Torsione uniforme

Confronto fra sezioni aperte e chiuse



Teoria rettangoli sottili:

$$\tau_{max}^{ap} = \frac{3}{2} \frac{M_t}{\pi R s^2} \quad \Theta^{ap} = \frac{3}{2\pi} \frac{M_t}{G R s^3}$$

Teoria di Bredt:

$$\tau^{ch} = \frac{M_t}{2\pi R^2 s} \quad \Theta^{ch} = \frac{M_t}{2\pi G R^3 s}$$

$$\tau_{max}^{ap} \gg \tau_{max}^{ch}$$

5. Torsione uniforme

Prestazioni ottimali delle sezioni pluriconnesse a torsione

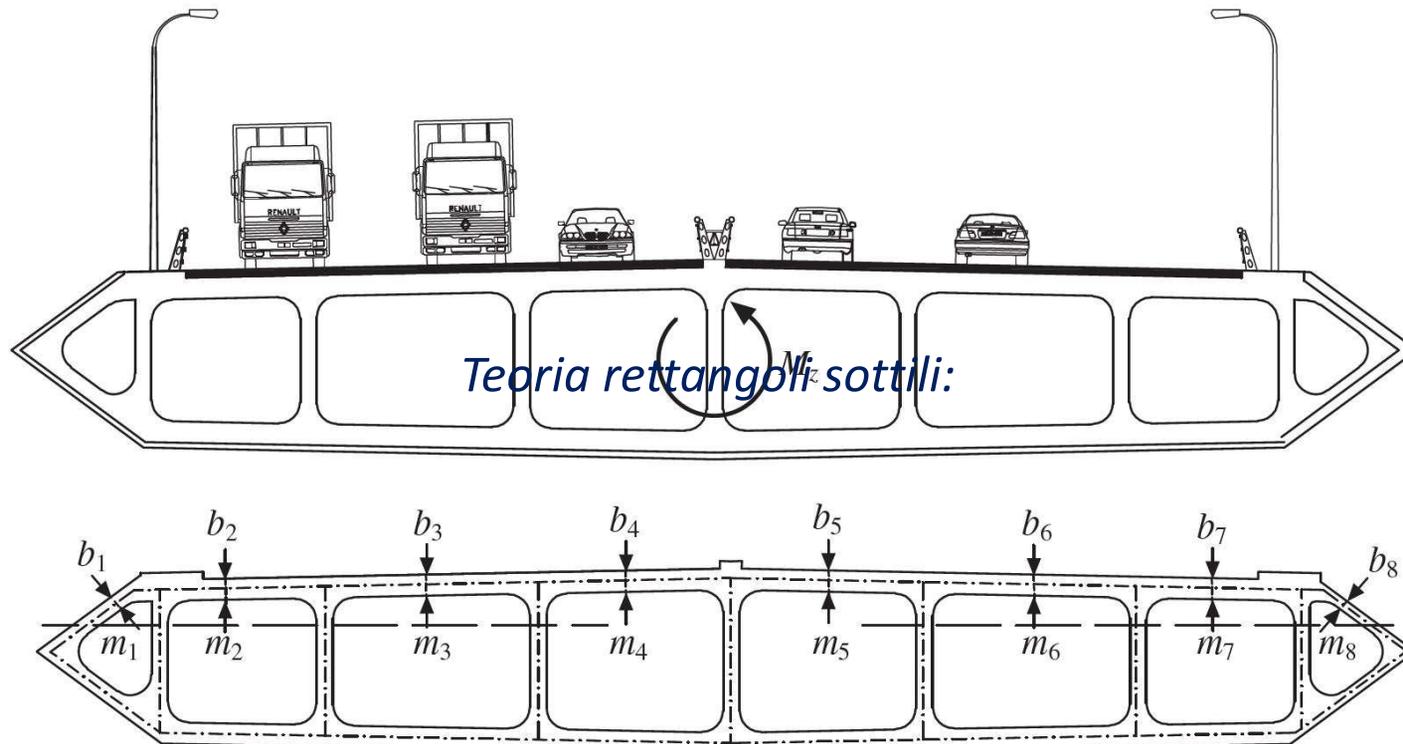


Figura tratta da [Nunziante et al., 2010]