

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA



# Lezione

## Parte IV - Il Problema di Saint Venant

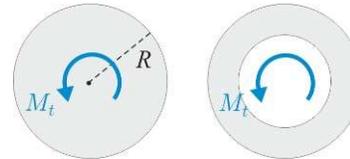
- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- **5. Torsione uniforme**

# Lezione

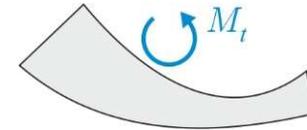
## 5. Torsione uniforme

- Posizione del problema

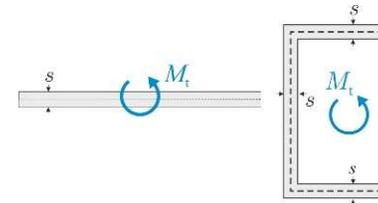
- Sezioni a simmetria polare



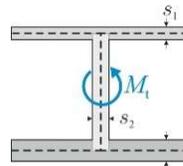
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica



- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili



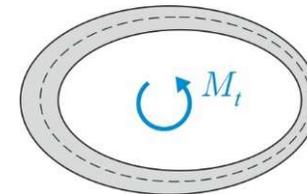
- Sezioni sottili aperte



- Sezioni sottili chiuse:

- Teoria approssimata di Bredt

- Formule di Bredt



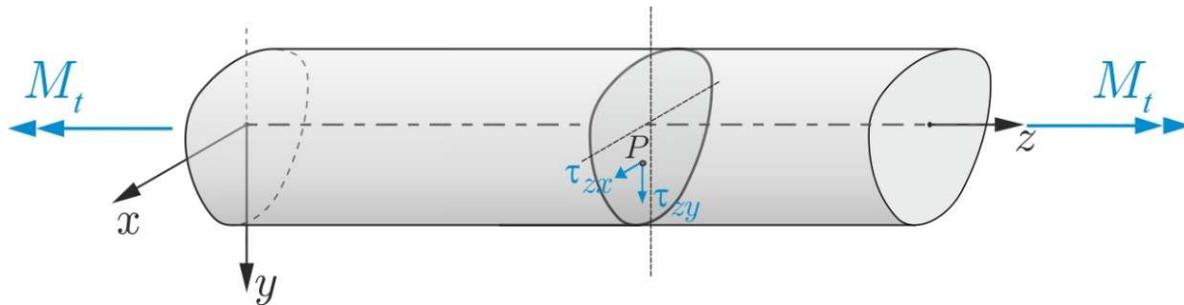
- **Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)**

## Posizione del problema



$$N=T_x=T_y=0 \quad M_x=M_y=0 \quad M_z=M_t$$

## Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



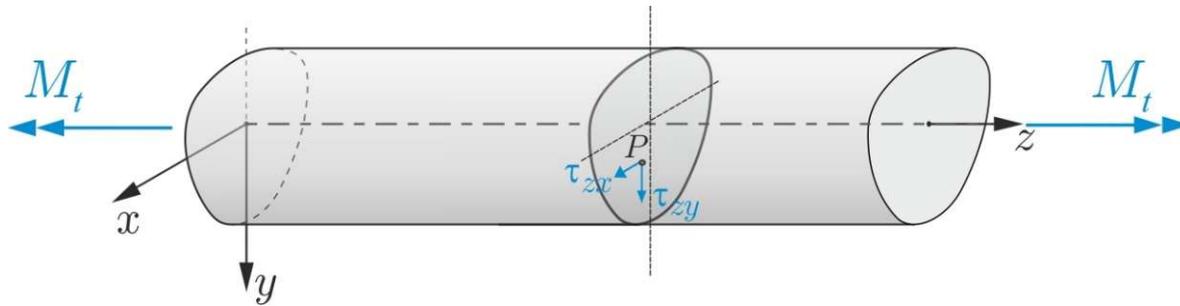
$$\sigma_z = 0$$

$$\tau \neq 0$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

# 5. Torsione uniforme

## Tensioni tangenziali $\tau$



$$\sigma_z = 0$$

$$\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

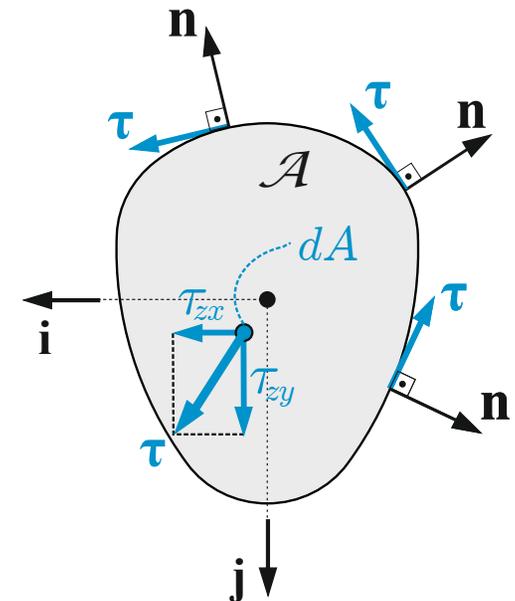
*Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio*

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{const}_z$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0} \quad (\text{campo solenodale})$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$$

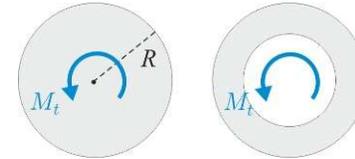




# Lezione

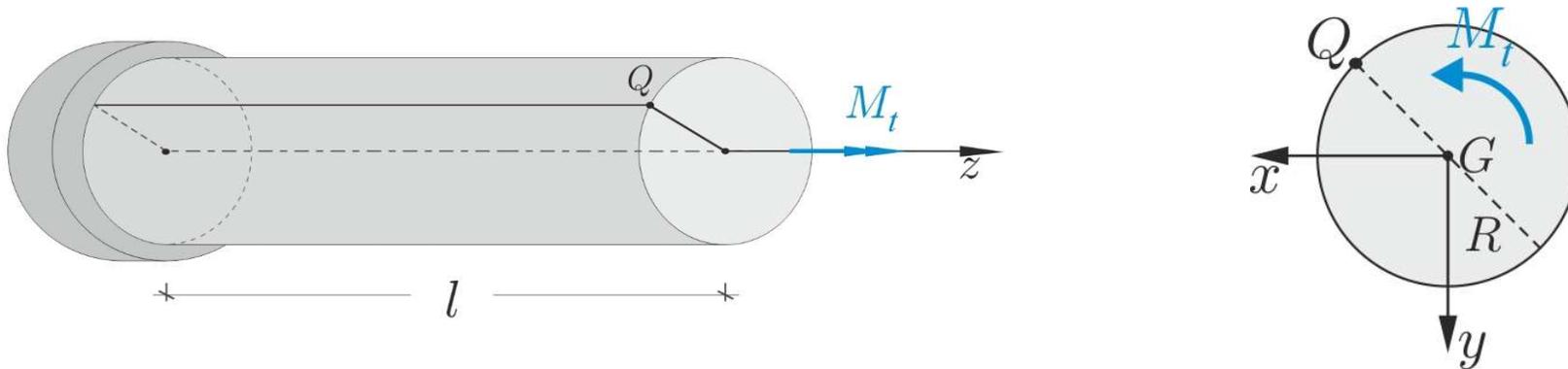
## 5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- **Sezioni a simmetria polare**
- Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
  - Teoria approssimata di Bredt
  - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)



# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

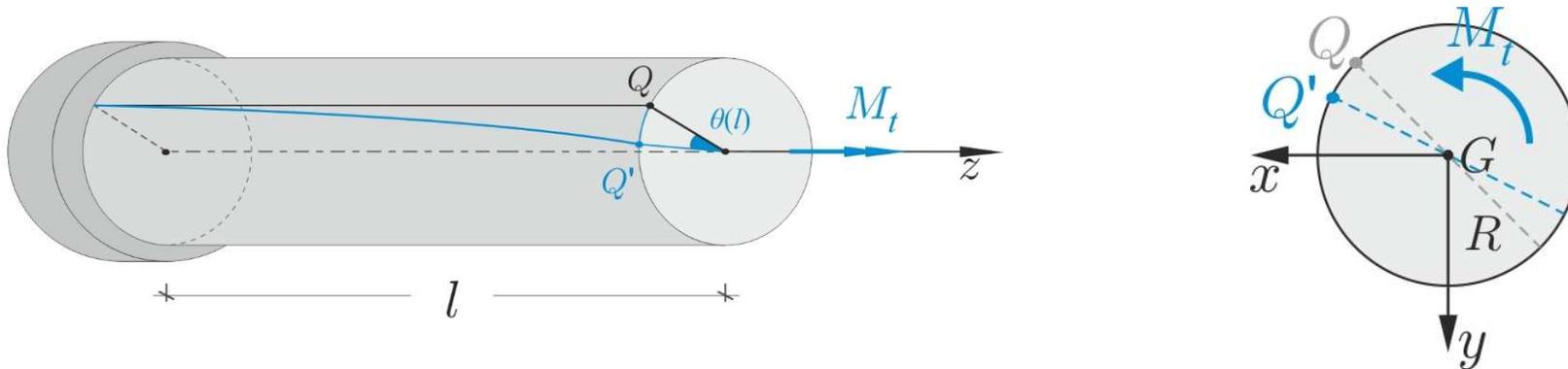
## Sezione circolare



## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

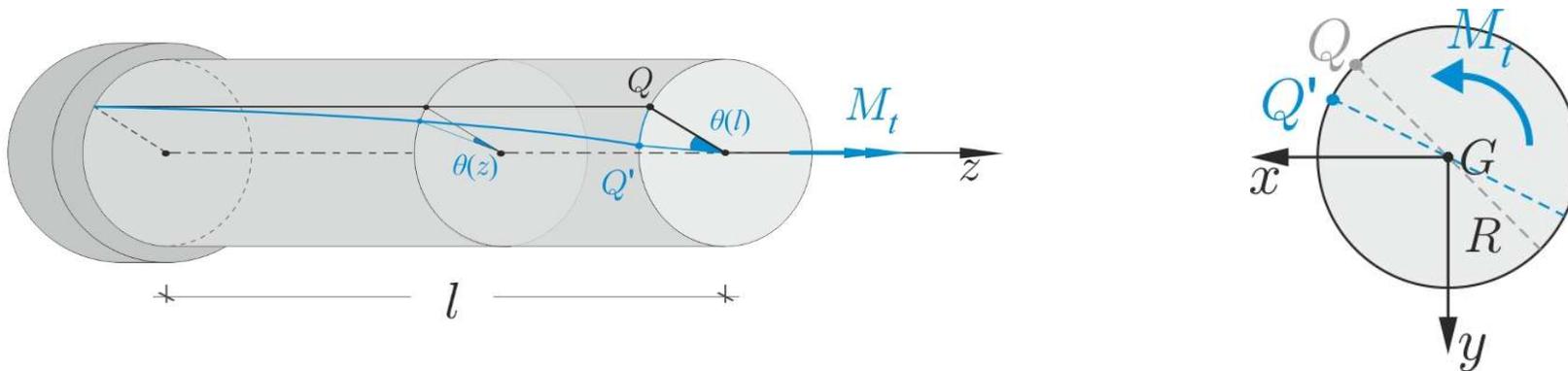
## Sezione circolare



## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

## Sezione circolare



## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

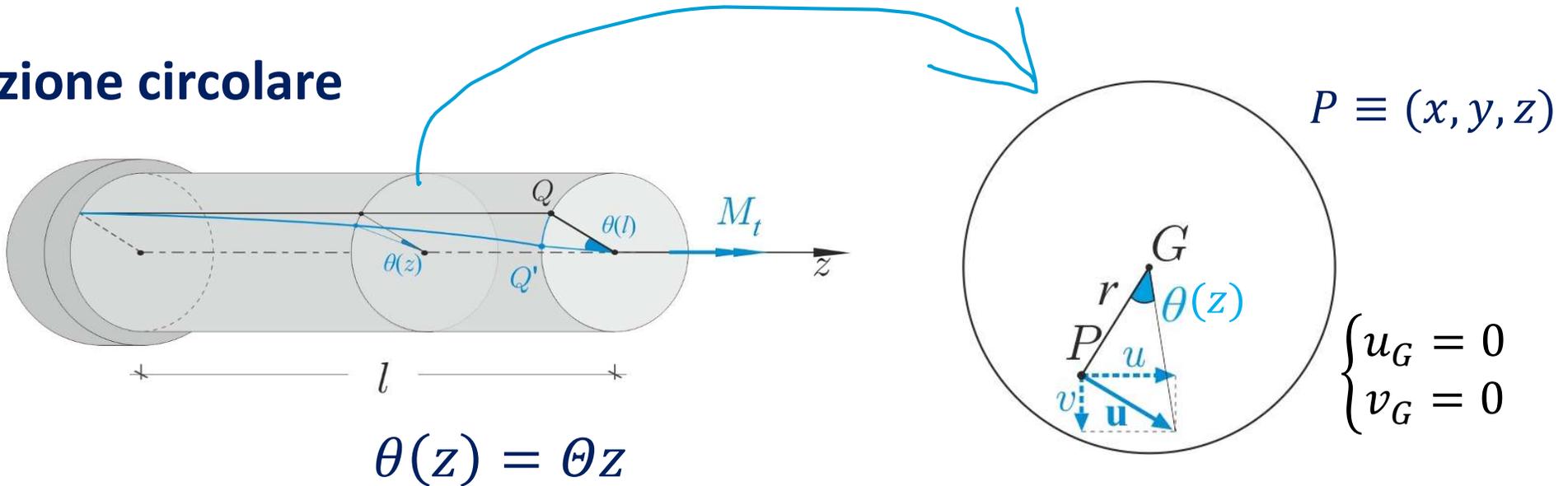
- **Ipotesi 1.** Le sezioni non si deformano e ruotano rigidamente intorno all'asse  $z$
- **Ipotesi 2.** L'angolo di rotazione delle sezioni è una funzione lineare di  $z$ :

$$\theta(z) = \Theta z$$

$\Theta$ : angolo unitario di torsione  $[L^{-1}]$

# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

## Sezione circolare



## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

$$\begin{cases} u = \cancel{u_G} - \theta y \\ v = \cancel{v_G} + \theta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\theta(z)y \\ v = \theta(z)x \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = 0 \end{cases}}$$

**FGSR**

$\Theta z$



## 5. Torsione uniforme: sezione circolare

### Sezione circolare: deformazioni

- *Equazioni implicite di congruenza (caso generale)*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- *Sostituzione delle funzioni spostamento nelle equazioni implicite di congruenza*

$$\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} &= 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x \end{aligned}$$

- *Tensore della deformazione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$E(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Theta y \\ 0 & 0 & \Theta x \\ -\Theta y & \Theta x & 0 \end{bmatrix}$$

## Sezione circolare: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x \end{aligned}$$

- *Tensore e rotore della tensione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\Theta y \\ 0 & 0 & G\Theta x \\ -G\Theta y & G\Theta x & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \text{rot } \boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = 2G\Theta \mathbf{k} \right.$$



## 5. Torsione uniforme: sezione circolare

### Sezione circolare: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = -\Theta y, \gamma_{zy} = \Theta x$$

⇒

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x$$

- *Tensore e rotore della tensione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -G\Theta y \\ 0 & 0 & G\Theta x \\ -G\Theta y & G\Theta x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta \mathbf{k}$$

# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

## Sezione circolare: calcolo del parametro $\Theta$

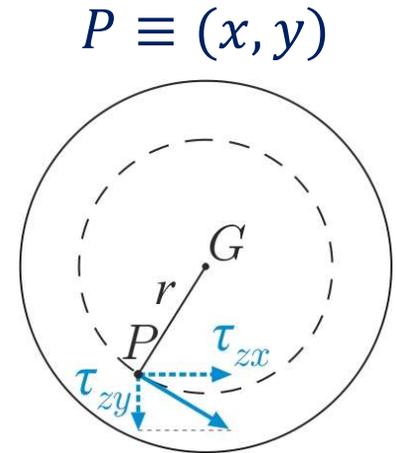
- Condizioni di equivalenza statica alle basi

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

- Sostituzione delle componenti di tensione

$$\tau_{zx} = -G\Theta y, \tau_{zy} = G\Theta x \quad \Rightarrow \quad M_t = \int_{\mathcal{A}} G\Theta(x^2 + y^2) dA = G\Theta \int_{\mathcal{A}} r^2 dA$$

$$M_t = G\Theta I_t \quad I_t = I_o = \int_{\mathcal{A}} r^2 dA = \frac{1}{2} \pi R^4$$



- Rigidezza torsionale

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

$GI_t$  → Rigidezza torsionale [ $FL^2$ ]

$EA$  → Rigidezza assiale [ $F$ ]

$GA_t$  → Rigidezza di taglio [ $F$ ]

$EI$  → Rigidezza flessionale [ $FL^2$ ]

$$\left( \varepsilon = \frac{N}{EA} \right)$$

$$\left( \chi = \frac{M}{EI} \right)$$



## 5. Torsione uniforme: sezione circolare

### Sezione circolare: verifica della soluzione trovata

- *Soluzione (le altre incognite sono nulle):*

$$\begin{aligned} u &= -\Theta zy, \\ v &= \Theta zx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= -G\Theta y, \\ \gamma_{zy} &= G\Theta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -G\Theta y, \\ \tau_{zy} &= G\Theta x \end{aligned}$$

$$\left( \Theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

- *Equazioni implicite di congruenza* *Verificate* ✓
- *Equazioni di legame costitutivo* *Verificate* ✓
- *Equazioni indefinite di equilibrio*

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \text{cost}_z \text{ *Verificata* } \checkmark \quad \text{div } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \text{ *Verificata* } \checkmark$$

- *Condizioni al contorno sul mantello  $\Gamma$*

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \text{ *Verificate* } \checkmark$$

- *Condizioni al contorno sulle basi* *Verificate se*  $\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$  *con*  $I_t = \frac{1}{2}\pi R^4$  ✓

# 5. Torsione uniforme: sezione circolare

## Sezione circolare: rappresentazione grafica dello stato tensionale

- *Modulo del vettore  $\tau$*

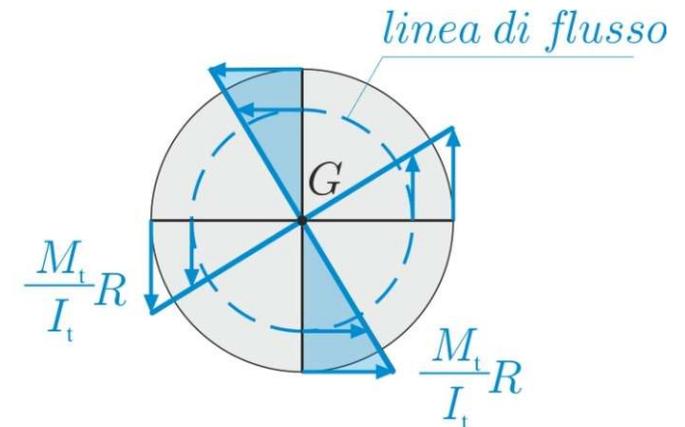
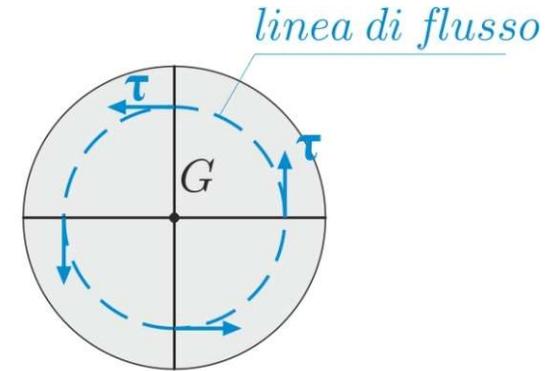
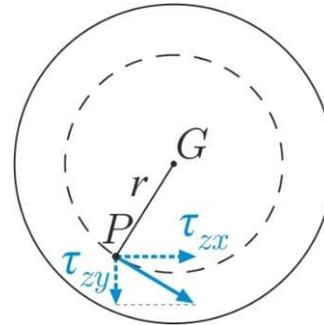
$$\tau_{zx} = -G\theta y, \tau_{zy} = G\theta x \quad \left( \theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

$$|\tau| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\theta \sqrt{x^2 + y^2} = G\theta r$$

$$\tau(r) = G\theta r \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = \frac{M_t}{I_t} r$$

$$\tau_{max} = \tau(R) = \frac{M_t}{I_t} R$$

$$I_t = \frac{1}{2} \pi R^4$$



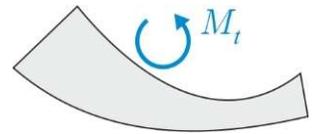
- **Linea di flusso per il campo  $\tau$ :** curva caratterizzata dal fatto che in ogni suo punto il vettore delle tensioni tangenziali risulta tangente ad essa



# Lezione

## 5. Torsione uniforme

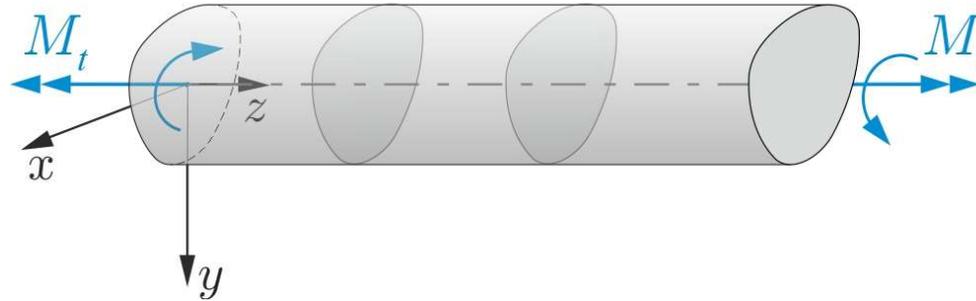
- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare
- **Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica**
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte
- Sezioni sottili chiuse:
  - Teoria approssimata di Bredt
  - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)





## 5. Torsione uniforme: sezione generica

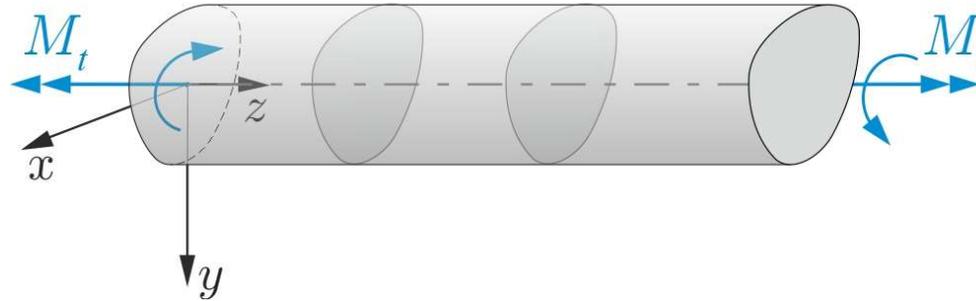
### Sezione di forma generica



---

### Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

## Sezione di forma generica

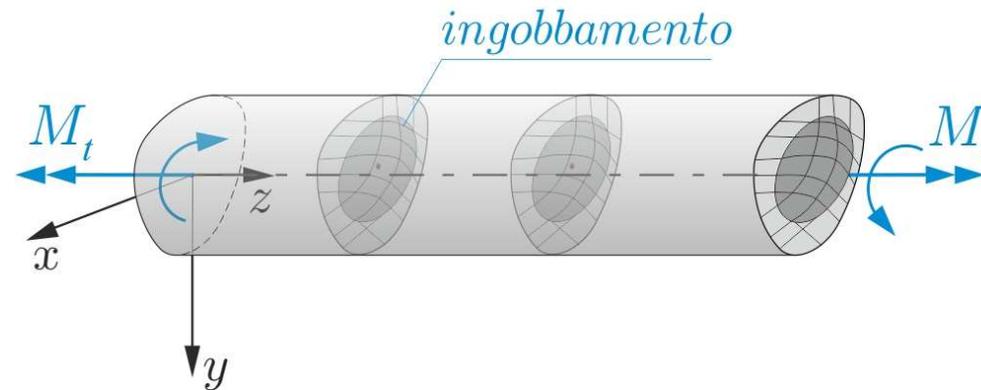


## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)



*Video ingobbamento*

## Sezione di forma generica



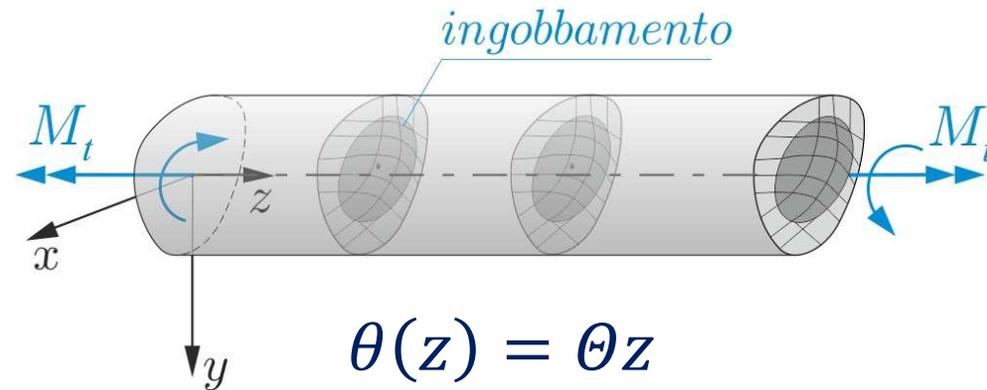
## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

**Ipotesi 1.** Le sezioni ruotano intorno all'asse  $z$  ma si deformano e non sono più piane: ingobbamento delle sezioni (la componente di spostamento  $w$  in generale non è nulla)

**Ipotesi 2.** Le sezioni si ingobbano tutte allo stesso modo, la funzione ingobbamento non dipende dall'ascissa  $z$

**NB.** Le sezioni a simmetria polare hanno dunque ingobbamento nullo

## Sezione di forma generica



## Ipotesi sulla soluzione (spostamenti)

$$\begin{cases} u = -\theta(z)y \\ v = \theta(z)x \\ w = w(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\Theta z y \\ v = \Theta z x \\ w = \Theta \Psi(x, y) \end{cases}$$

$\Theta$ : angolo unitario di torsione (costante)  $[L^{-1}]$

$\Psi(x, y)$ : funzione di ingobbamento  $[L^2]$



## Sezione generica: deformazioni

- *Equazioni implicite di congruenza (caso generale)*

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

- *Sostituzione delle funzioni spostamento nelle equazioni implicite di congruenza*

$$\begin{cases} u = -\Theta zy \\ v = \Theta zx \\ w = \Theta \Psi(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{xy} &= 0, \gamma_{zx} = \Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \gamma_{zy} = \Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

- *Tensore della deformazione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$E(P) = \Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y & \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$

## Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

⇒

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Tensore della tensione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$T(P) = G\Theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial x} - y \\ 0 & 0 & \frac{\partial\Psi}{\partial y} + x \\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} - y & \frac{\partial\Psi}{\partial y} + x & 0 \end{bmatrix}$$



## 5. Torsione uniforme: sezione generica

### Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

⇒

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Rotore della tensione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = G\Theta\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + 1 - \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x} + 1\right)\mathbf{k} = 2G\Theta\mathbf{k}$$

## Sezione generica: stato tensionale

- *Legge di Hooke generalizzata (caso generale, problema di Saint Venant)*

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \quad \gamma_{xy} = 0 \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy}$$

- *Sostituzione delle componenti di deformazione nella legge di Hooke*

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{xy} = 0, \gamma_{zx} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \gamma_{zy} = \Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right) \end{aligned}$$

- *Rotore della tensione nel punto  $P \equiv (x, y)$*

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta\mathbf{k}$$



## 5. Torsione uniforme: sezione generica

### Sezione generica: calcolo della funzione ingobbamento $\Psi(x, y)$

- Equazioni indefinite di equilibrio

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, P \in \mathcal{A}}$$

- Condizioni al contorno sul mantello  $\Gamma$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma}$$

- Problema con condizioni al contorno di Neumann

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad P \in \mathcal{A}}$$

$$\boxed{\alpha \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma}$$

$\Rightarrow$  Determinazione di  $\Psi(x, y)$

(Soluzione in forma chiusa ad es. per sezioni a simmetria polare, ellittiche, triangolari isosceli o equilatero, cfr. cap. 20)

## 5. Torsione uniforme: sezione generica

### Sezione generica: parametro $\Theta$ e inerzia torsionale $I_t$

- Condizioni di equivalenza statica alle basi

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$\tau_{zx} = G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right),$$

$$\tau_{zy} = G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

- Sostituzione delle componenti di tensione

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + x^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y + y^2 \right) dA = G\Theta \int_{\mathcal{A}} \left( x^2 + y^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA$$

$$M_t = G\Theta I_t \quad I_t = \int_{\mathcal{A}} \left( x^2 + y^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA = I_o + \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y}x + \frac{\partial \Psi}{\partial x}y \right) dA$$

- Rigidezza torsionale

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

$$GI_t \rightarrow \text{Rigidezza torsionale } [FL^2]$$



# 5. Torsione uniforme: sezione generica

## Sezione generica: verifica della soluzione trovata

- *Soluzione (le altre incognite sono nulle):*

$$\begin{aligned} u &= -\Theta zy, \\ v &= \Theta zx, \\ w &= \Theta \Psi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_{zy} &= \Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{zy} &= G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad \left( \Theta = \frac{M_t}{GI_t} \right)$$

- *Equazioni implicite di congruenza* **Verificate ✓**
- *Equazioni di legame costitutivo* **Verificate ✓**
- *Equazioni indefinite di equilibrio*

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \mathbf{cost}_z \quad \text{Verificata ✓} \quad \text{div } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

*Verificata se  $\Psi(x, y)$  è soluzione del prob. di Neumann ✓*

- *Condizioni al contorno sul mantello  $\Gamma$*

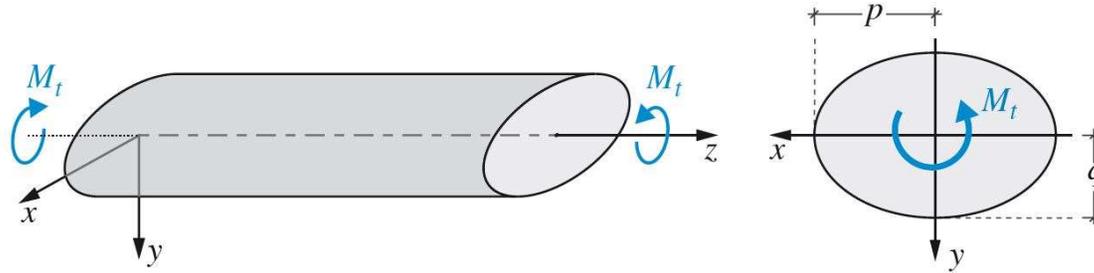
$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma \quad \text{Verificata se } \Psi(x, y) \text{ è soluzione del prob. di Neumann ✓}$$

- *Condizioni al contorno sulle basi*

$$\text{Verificate se } \Theta = \frac{M_t}{GI_t} \text{ con } I_t = I_0 + \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x + \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA \quad \checkmark$$

# 5. Torsione uniforme: sezione generica

## Esempio: sezione ellittica



$$\text{Equazione della frontiera } \partial\mathcal{A}: \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$$

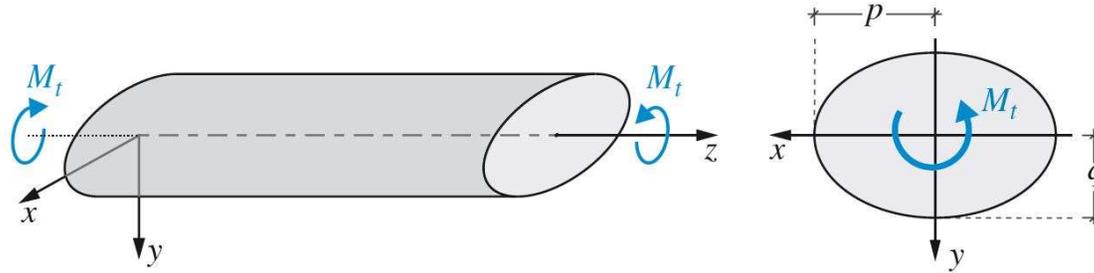
- *Soluzione funzione ingobbamento:*

$$\Psi(x, y) = kxy$$

$$k = -\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \leq 0$$

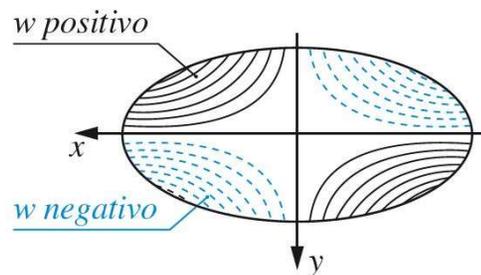
# 5. Torsione uniforme: sezione generica

## Esempio: sezione ellittica

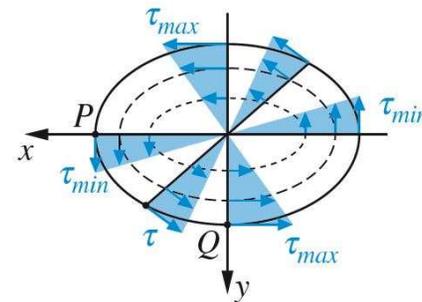


- Soluzione:**

$$I_t = I_p + k(I_y - I_x) = \pi \frac{p^3 q^3}{p^2 + q^2} \quad \tau_{zx} = -\frac{2}{\pi} \frac{M_t}{pq^3} y, \quad \tau_{zy} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{p^3 q} x. \quad \tau^{max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{pq^2}, \quad \tau^{min} = \frac{2}{\pi} \frac{M_t}{p^2 q}$$



a)



b)

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale  
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

# Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

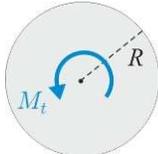
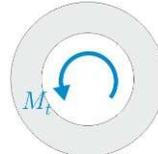
**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# Lezione

## 5. Torsione uniforme

- Posizione del problema
- Sezioni a simmetria polare  
- **Sezioni di forma qualsiasi, analogia idrodinamica**
- Sezioni rettangolari sottili, sezioni rettificabili
- Sezioni sottili aperte 
- Sezioni sottili chiuse:
  - Teoria approssimata di Bredt
  - Formule di Bredt
- Esercizi (sito: E20, testo: §20.10-20.12)

## Sezione generica: analogia idrodinamica

- Equazioni per il vettore tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0, P \in \mathcal{A}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 2G\Theta \mathbf{k}$$

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

- Problema con condizioni al contorno di Neumann

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad P \in \mathcal{A}$$

$$\alpha \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right) + \beta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) = 0, P \in \Gamma$$

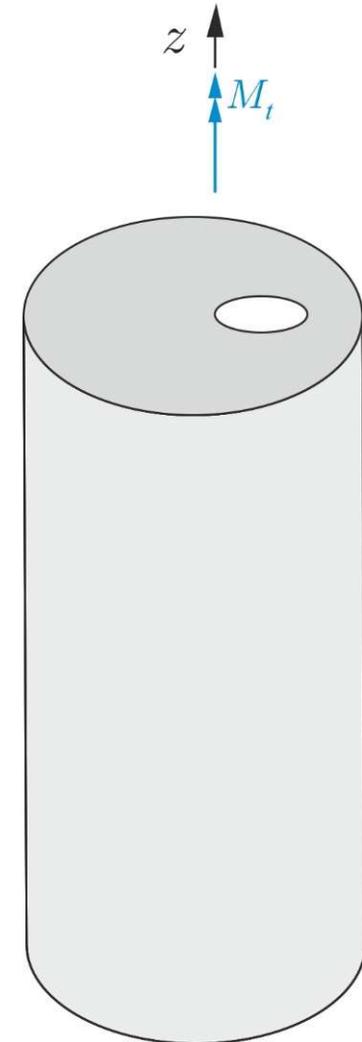
- Soluzione (tensioni)

$$\tau_{zx} = G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right),$$

$$\Theta = \frac{M_t}{GI_t}$$

$$\tau_{zy} = G\Theta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right)$$

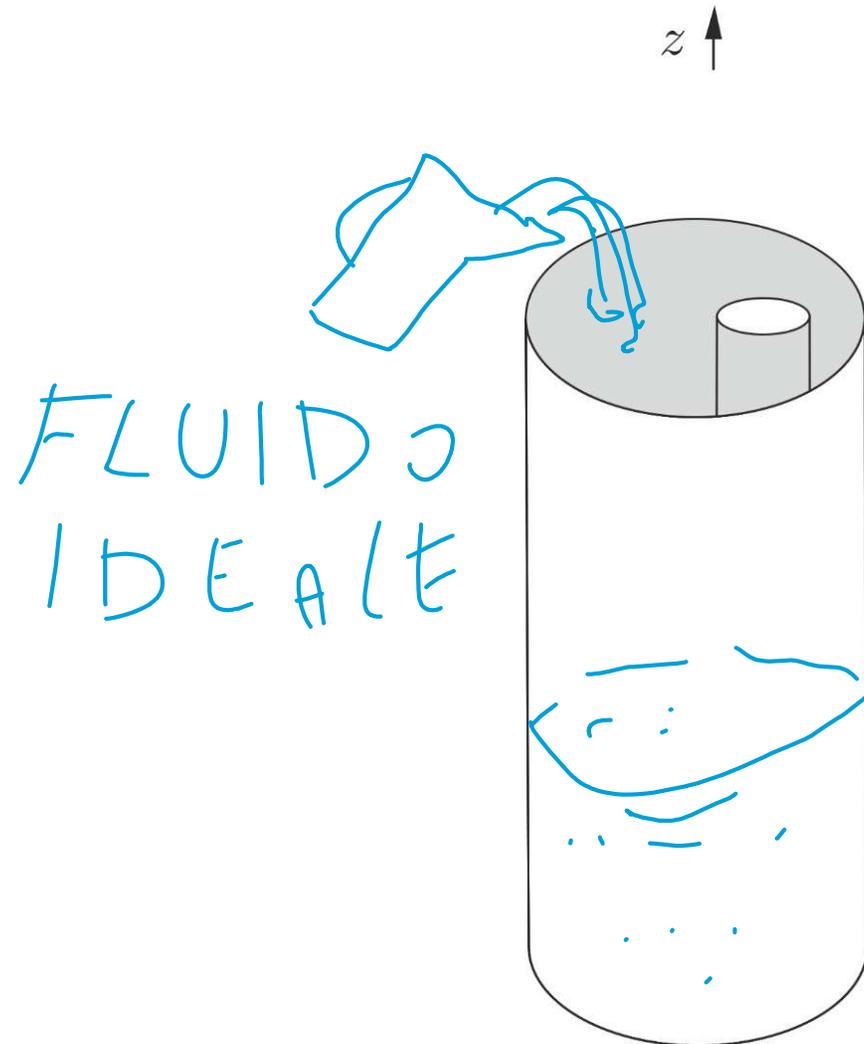
$$I_t = I_o + \int_{\mathcal{A}} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} x + \frac{\partial \Psi}{\partial x} y \right) dA$$





## 5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

### Sezione generica: analogia idrodinamica



## 5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

### Sezione generica: analogia idrodinamica

- *Equazioni campo velocità  $\mathbf{v}$*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

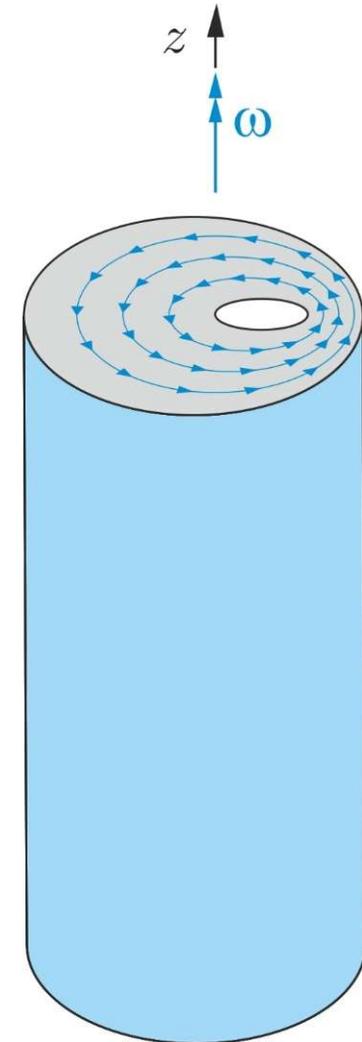
$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = c\mathbf{k}$$

$$\omega = \int_{\mathcal{A}} (v_y x - v_x y) dA$$

- *Analogia idrodinamica:*

$$\omega \leftrightarrow M_t$$

$$\mathbf{v} \leftrightarrow \boldsymbol{\tau}$$



## 5. Torsione uniforme: analogia idrodinamica

### Sezione generica: analogia idrodinamica

- *Le linee di flusso sono curve chiuse (campo solenodale:  $\text{div } \boldsymbol{\tau} = 0$ )*
- *Le linee di flusso si addensano in corrispondenza di restringimenti*
- *Le tensioni tangenziali (tangenti alle linee di flusso) sono orientate in modo da percorrere le linee di flusso nel verso del momento torcente*
- *Nelle sezioni sottili chiuse, le tensioni tangenziali sono parallele alla linea media e uniformi lungo la corda: l'intensità delle tensioni è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda (spessore)*
- *Nelle sezioni sottili aperte, le tensioni tangenziali sono parallele alla linea media, variano linearmente lungo la corda, sono massime ai bordi e nulle sulla linea media (distribuzione 'a farfalla')*

