UNIVERSITÀ DI ROMA LA SAPIENZA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE
INGEGNERIA AMBIENTE E TERRITORIO, INGEGNERIA DELLA SICUREZZA

INSEGNAMENTO DI **SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**
a.a. 2022-2023
prof. Paolo Casini

Preparazione alla Prova d'esonero del 21.12.2022

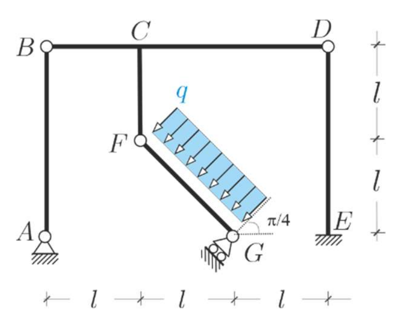
Problema 1. Con riferimento alla ***struttura isostatica*** riportata in Fig. 1 si chiede di: **a)** verificarne sinteticamente l'isostaticità; **b)** determinare le reazioni vincolari e tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione; **c)** (*facoltativo*) verificare l'equilibrio dei momenti nel nodo C.

Problema 2. Studiare la struttura iperstatica di Fig. **2** facendo uso del ***metodo degli spostamenti***. **a)** Scrivere le equazioni della linea elastica per ciascuno dei tratti e fornire la soluzione generale. **b)** Scrivere le condizioni al contorno necessarie a determinare la soluzione particolare. **c)** (*facoltativo*) Calcolare tutte le costanti d'integrazione. **d)** (*facoltativo*) Fornire le espressioni analitiche delle caratteristiche della sollecitazione in ogni tratto e tracciare i relativi diagrammi. **e)** (*facoltativo*) Calcolare lo spostamento del punto A e del punto B.
Si assumano le travi indeformabili a taglio, con rigidezze EA e EI uniformi. (Assumere: $EA = EI/l^2$).

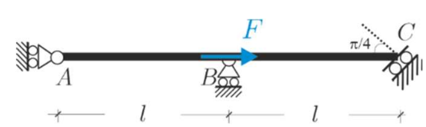
Problema 3. Si consideri il problema della ***flessione e taglio*** (flessione non uniforme) in un cilindro di Saint Venant la cui sezione è riportata in Fig. **3.** Applicando la teoria approssimata di Jourawsky: **a)** studiare l'andamento delle tensioni tangenziali dovute ad una forza di taglio *perpendicolare* all'asse di simmetria *y*; **b)** determinare la posizione del centro di taglio. La sezione è sottile con spessore costante s e $I_y = \frac{1}{6}(28 + 3\pi)b^3 s \cong 6.24 b^3 s$. Si possono usare le formule in Fig. 4.

Problema 4 (facoltativo). Disegnare qualitativamente il diagramma delle tensioni tangenziali che si avrebbe se, nel problema precedente, la forza di taglio fosse stata *parallela* all'asse di simmetria *y* e passante per il baricentro.

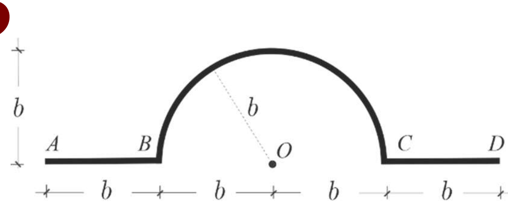
1



2

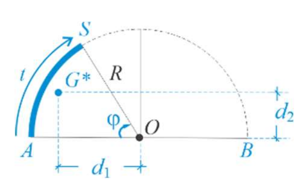


3



(Soluzione nelle pagine seguenti)

4 Arco di circonferenza A^* di piccolo spessore s, raggio R, ampiezza φ



$t = R\varphi \quad A^* = st = sR\varphi \quad d_1 = R\frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad d_2 = R\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}$

COGNOME...	Lasciare libero questo spazio
NOME..	
MAT.	

Preparazione alla Prova d'esonero del 21.12.2022
Soluzione problema 3

Problema 3.

- Si ipotizza per C_T una posizione arbitraria sull'asse di simmetria (y); poi si considera una forza di taglio arbitraria perpendicolare all'asse di simmetria e passante per C_T (forza T_x), Fig. A1.
- Si sceglie per ogni tratto il sistema di ascisse locali, Fig. A1

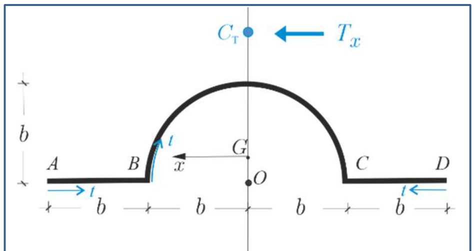


Fig. A1

Usando la formula di Jourawsky, si studia l'andamento del tensioni tangenziali in sezione.

- <u>TRATTO AB, $0 \leq t \leq b$, Fig. A2</u>

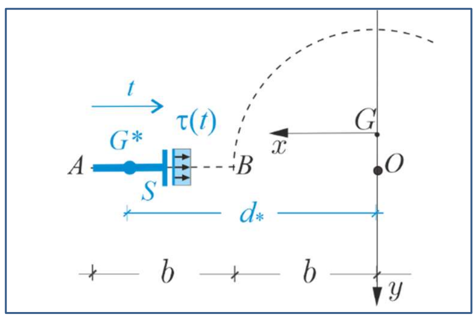


Fig. A2

$$\tau_{AB}(t) = -\frac{T_x}{I_y s} S_y^*(t)$$

$$A^* = st, \quad d^* = 2b - \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad S_y^*(t) = A^* d^* = st\left(2b - \frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{\tau_{AB}(t) = -\frac{T_x}{I_y} t\left(2b - \frac{t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau_{AB}(0) = 0, \tau_{AB}(b) = -\frac{3}{2}\frac{T_x}{I_y} b^2}$$

Pertanto nel tratto AB le tensioni tangenziali hanno verso opposto alle ascisse locali e il loro modulo varia con legge quadratica da 0 nel punto A a τ_1 nel punto B, con:

$$\tau_1 = \frac{3}{2}\frac{T_x}{I_y} b^2$$

- <u>TRATTO DC, $0 \leq t \leq b$</u>
  Stesso andamento del tratto AB ma con segno opposto, quindi le tensioni tangenziali hanno lo stesso verso dell'ascissa locale.

- <u>NODO B, Fig. A3</u>

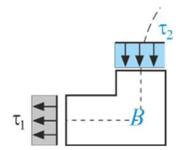


Fig. A3

Per l'equivalenza del flusso delle tensioni tangenziali, Fig. A3, essendo lo spessore costante, deve essere:

$$\tau_2 = \tau_1$$

Pertanto nel punto B l'arco di circonferenza presenta delle tensioni tangenziali di modulo τ_1 rivolte verso il basso e quindi con verso opposto rispetto all'ascissa locale.

- <u>TRATTO BC, $0 \leq t \leq \pi b$ ovvero $0 \leq \varphi \leq \pi$, Fig. A4</u>

La formula di Jourawsky è in questo caso ($R = b$):

$$\tau_{BC}(t) = -\tau_1 - \frac{T_x}{I_y s} S_y^*(t)$$

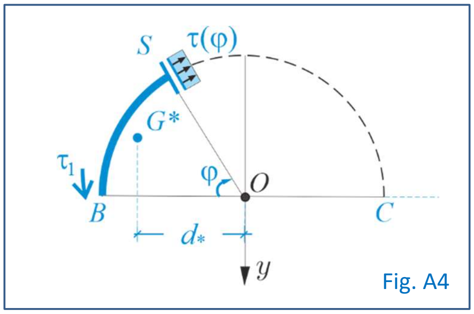


Fig. A4

$$A^* = st = sb\varphi, \;\; d^* = d_1 = b\frac{\sin\varphi}{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad S_y^*(\varphi) = A^* d^* = sb\varphi\left(b\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = sb^2\sin\varphi$$

$$\boxed{\tau_{BC}(\varphi) = -\tau_1 - \frac{T_x}{I_y} b^2 \sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \tau_{BC}(0) = -\tau_1, \quad \tau_{BC}(\pi) = -\tau_1}$$

Pertanto nel tratto BC le tensioni tangenziali hanno verso opposto alle ascisse locali e il loro modulo varia con legge sinusoidale con τ_1 nel punto A e ancora τ_1 nel punto B, raggiungendo il valore massimo sull'asse y a $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\tau_{max} = \left|\tau\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \tau_1 + \frac{T_x}{I_y} b^2 = \frac{5}{2}\frac{T_x}{I_y} b^2$$

- Andamento delle tensioni tangenziali, Fig. A5

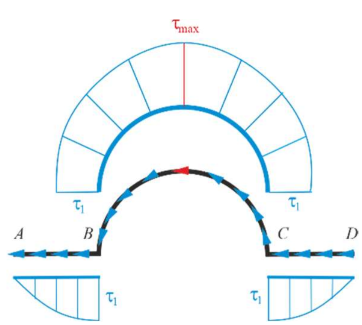


Fig. A5

- <u>Calcolo della posizione del Centro di Taglio</u>

Scelto come polo O l'origine della circonferenza, si deve imporre l'equivalenza fra il momento della forza rispetto a O, e il momento risultante rispetto allo stesso polo delle tensioni tangenziali calcolate al punto precedente.

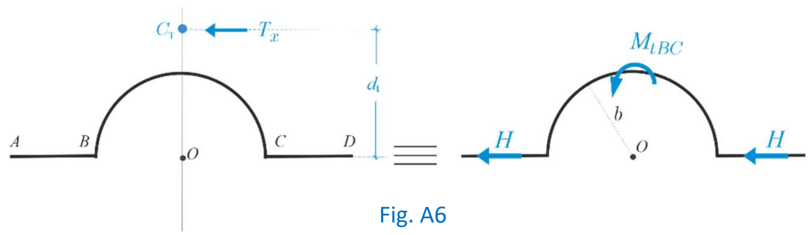


Fig. A6

Con riferimento alla figura A6:

$$+T_x d_t = +M_{tBC} + 2H \cdot 0 \qquad \Rightarrow \ d_t = +\frac{M_{tBC}}{T_x}$$

Dove M_{tBC} è il momento risultante delle tensioni tangenziali sull'arco BC rispetto al polo O (antiorario).
Per calcolare M_{tBC}, si osservi che su ogni areola infinitesima $dA = s\,dt = s\,bd\varphi$ le tensioni tangenziali fanno nascere una forza infinitesima $\boldsymbol{df}$ tangente alla semicirconferenza, diretta come in Fig. A7 e di modulo $|\boldsymbol{df}| = |\tau_{BC}(t)\,dA|$:

$$|\boldsymbol{df}| = |\tau_{BC}(t)\,dA| = \left(\tau_1 + \frac{T_x}{I_y} b^2 \sin\varphi\right) s\,bd\varphi$$

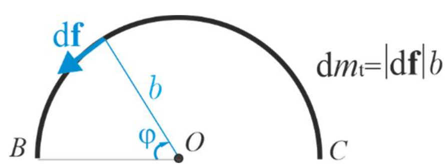


Fig. A7

Essendo $\boldsymbol{df}$ sempre tangente alla semicirconferenza, la forza $\boldsymbol{df}$ ha ovunque la stessa distanza da O pari al raggio della circonferenza, Fig. A7. Il braccio di tale forza rispetto O è quindi sempre b, ne segue che essa genera rispetto a O un momento infinitesimo antiorario di modulo:

$$dm_t = |\boldsymbol{df}|b = \left(\tau_1 + \frac{T_x}{I_y} b^2 \sin\varphi\right) s\,b^2 d\varphi$$

Il momento risultante risulta:

$$M_{tBC} = \int_{BC} dm_t = \int_{BC} |\boldsymbol{df}|b = \int_0^{\pi} \left(\tau_1 + \frac{T_x}{I_y} b^2 \sin\varphi\right) s\,b^2 d\varphi = \tau_1 s\,b^2\pi + \frac{T_x}{I_y} sb^4 \int_0^{\pi} (\sin\varphi) d\varphi$$

$$M_{tBC} = \tau_1 s\,b^2\pi + \frac{T_x}{I_y} 2sb^4$$

Sostituendo il valore di τ_1, si ottiene infine:

$$M_{tBC} = \frac{T_x}{2I_y} sb^4(3\pi + 4) \ \ \text{(antiorario)}$$

Ora è possibile calcolare la posizione esatta di C_T:

$$d_t = +\frac{M_{tBC}}{T_x} \qquad \Rightarrow \ d_t = +\frac{3\pi + 4}{2I_y} sb^4$$

Sostituendo il valore di I_y fornito nel testo, Fig. A8:

$$d_t = +\frac{3(3\pi + 4)}{28 + 3\pi} b \cong 1.08b$$

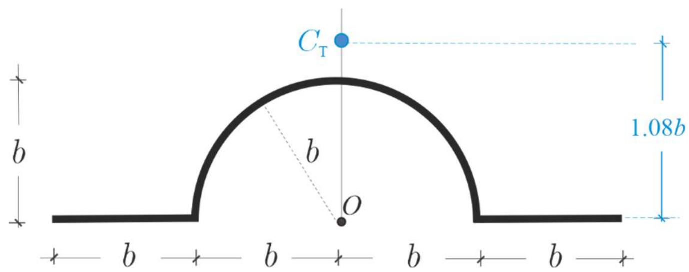


Fig. A8