Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: <u>p.casini@uniroma1.it</u> pagina web: <u>www.pcasini.it/disg/sdc</u>

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020





Instabilità Strutturale: instabilità elastica (testo cap. 23)

- Descrizione del fenomeno
- Definizioni e criterio di Eulero
- Ipotesi del modello
- Asta di Eulero (asta caricata di punta)
- Snellezza λ di una trave



Instabilità elastica: fenomenologia

Descrizione del fenomeno

- Carichi critici
- Materiale in fase elastica quando il fenomeno inizia a manifestarsi
- Perdita di stabilità della configurazione di equilibrio



(Video)

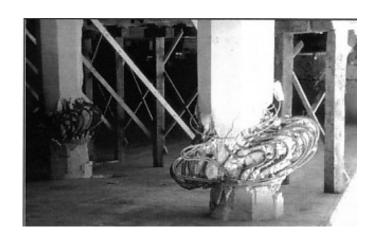


Instabilità elastica: fenomenologia

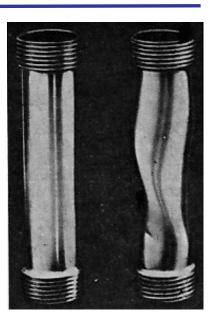
Esempi di tipologie strutturali interessate dal fenomeno

- Travi snelle soggette a compressione centrata o a pressoflessione
- Travi alte sezione sottile aperta soggette a flessione (instabilità flesso-torsionale)
- Lastre sottili (fenomeni locali di imbozzamento)
- Cilindri cavi sottili soggetti a pressione idrostatica esterna (ovalizzazione)
- Archi ribassati (fenomeni di snap-through)





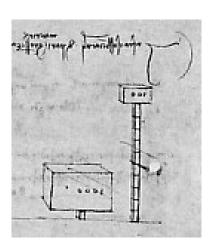


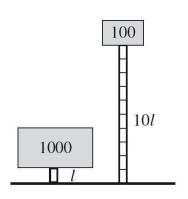




Instabilità elastica: fenomenologia

Studi sperimentali di Leonardo (Cod. Atl. f. 410r)





Infra i sostentacoli di pari materia e grossezza quello fia di maggiore fortezza del quale la sua lunghezza fia più brieve. Se collocherai un sostentacolo di pari grossezza e materia il quale resista a 100 e che poi tu ne tolga via i nove decimi dell'altezza, tu troverai che il suo rimanente, essendo nelli estremi sostenuto, resisterà a 1000. (Cod. Atl. f. 410r)

Modello di Eulero (1707-1783)

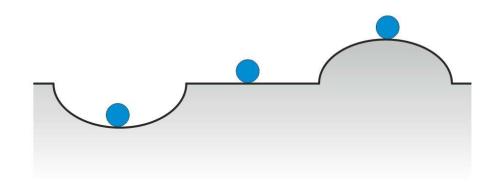


- L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietati gaudentes, 1744
- L. Euler, Sur la force des colonnes, Hist. acad. sci, pp. 252-282, 1759.



Instabilità elastica: definizioni

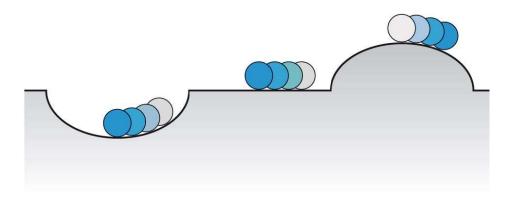
Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio





Instabilità elastica: definizioni

Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio



- Posizione di equilibrio stabile
- Posizione di equilibrio indifferente: sono possibili più posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale
- Posizione di equilibrio instabile



Instabilità elastica: definizioni

Carico critico

 Valore della forza esterna in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere stabile



Sistema meccanico euleriano

 Sistema meccanico soggetto a forze conservative e caratterizzato da un materiale che manifesta comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)

Criterio di Eulero (criterio statico)

 I carichi critici esprimono i valori delle forze esterne in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere unica e diventano possibili (infinite) posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale



Modelli lineari (trave 1D)

Ipotesi alla base del modello lineare di Trave Elastica 1D

Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti', il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (indeformata) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Esistenza e Unicità della soluzione

Modello lineare (→ soluzione unica) non compatibile con il criterio di Eulero (→infinite soluzioni in corrispondenza dei carichi critici): modificare alcune delle ipotesi precedenti



Instabilità elastica: ipotesi

 Oggetto di studio: instabilità in un sistema Euleriano: cioè soggetto a forze conservative e caratterizzato da un materiale a comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)



Nuove ipotesi (modello nonlineare)

Ipotesi 1 (cinematica): 'spostamenti finiti', il campo di spostamento in uno opiù punti può presentare modulo paragonabile alle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.



Posizione del problema

Determinare il valore (i valori) della forza assiale P in corrispondenza del quale la configurazione di equilibrio diventa instabile. Si consideri per iniziare lo schema di **trave appoggiata** e la **sezione circolare** di raggio R ($I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4$)



Ipotesi

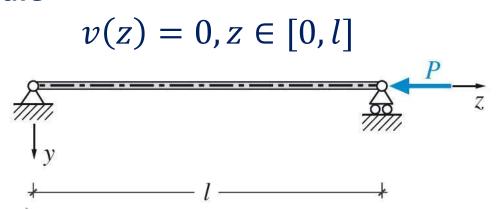
Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti', il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.



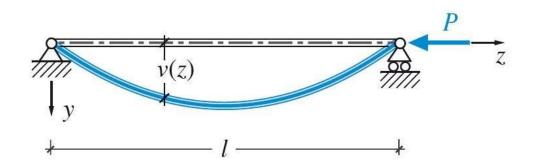
Soluzione banale



v(z): spostamento trasversale [L] positivo se concorde all'asse locale v

Applicazione del criterio di Eulero

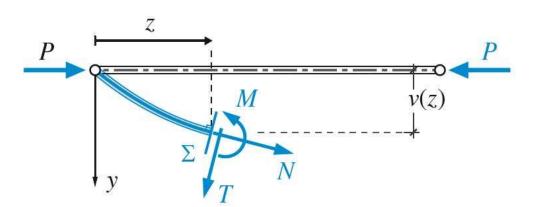
Determinare, se esistono, i valori del carico assiale P in corrispondenza dei quali divengano possibili soluzioni del problema elastico diverse da quella banale (cioè soluzioni con $v(z) \neq 0$). Tali valori sono i carichi critici cercati.





Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

$$M_{\Sigma}=0$$





Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

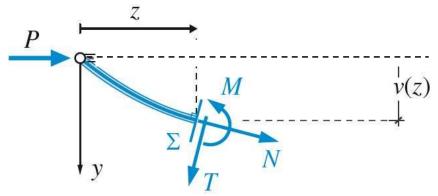
$$M_{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(z) - Pv(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad -EIv''(z) - Pv(z) = 0$$

$$v''(z) + \frac{P}{EI}v(z) = 0 \qquad (I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4)$$

Poiché $\frac{P}{EI} > 0$, posto $\frac{P}{EI} = \kappa^2$, si ha la seguente equazione della linea elastica

$$v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0 \qquad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

da integrare con le opportune condizioni al contorno





$$v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0 \qquad \kappa^2 = \frac{P}{FI}$$

$$\kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

Soluzione generale

$$v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z)$$
 $\kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

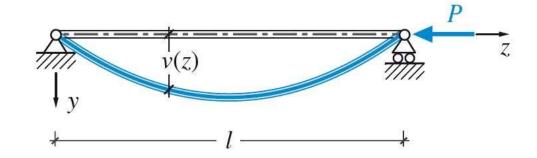
Soluzione banale: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

A norma del criterio di Eulero si devono trovare eventuali valori del carico $P = \kappa^2 EI$ in corrispondenza dei quali sono possibili **soluzioni non banali**: $C_1 \neq 0$, e/o $C_2 \neq 0$

Condizioni al contorno

$$v(0) = 0$$

$$v(l) = 0$$





Condizioni al contorno $v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z)$

$$v(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$v(l) = 0$$

$$C_1 \sin(\kappa l) + C_2 \cos(\kappa l) = 0$$

Sistema di equazioni algebrico lineare omogeneo nelle incognite C_1 e C_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, ammette soluzione diversa dalla banale solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0\\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} = -\sin(\kappa l) = 0$$



Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\sin(\kappa l) = 0 \qquad & \qquad C_2 = 0$$

$$C_1 \neq 0$$

Carichi critici (criterio di Eulero)

$$\sin(\kappa l) = 0$$
 $\Rightarrow \kappa = n\frac{\pi}{l}$, $n = 1,2,3,... \Rightarrow \kappa^2 = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$

Carichi critici:
$$P_{cr,n} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \qquad n = 1,2,3,...$$

Carico critico euleriano (n = 1):

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\frac{1}{\sin(\kappa l) = 0} & C_2 = 0$$

$$C_1 \neq 0$$

Deformate critiche

$$\begin{vmatrix}
\sin(\kappa l) = 0 \\
 \Rightarrow \kappa = n \frac{\pi}{l}, & n = 1,2,3,... \\
 C_1 \neq 0, C_2 = 0 \Rightarrow v(z) = C_1 \sin(\kappa z)
\end{vmatrix}$$

Deformate critiche:
$$v_{cr,n}$$

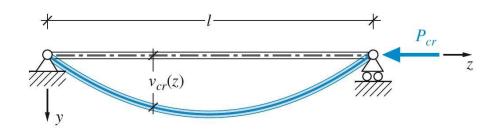
Deformate critiche:
$$v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right), \qquad n = 1,2,3,...$$

Deformata critica euleriana (n = 1):

$$v_{cr}(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right), \ C_1 \in \mathbb{R}$$

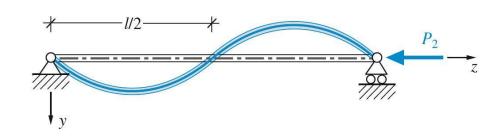


Deformate critiche $v_{cr,n}(z) = C_1 \sin(n\frac{\pi}{l}z)$ $C_1 \neq 0$ (∞^1 soluzioni)



Carico critico euleriano n = 1:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

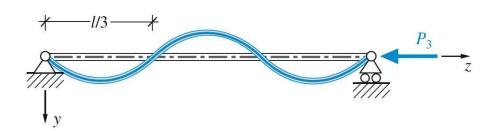


Carico critico n = 2:

$$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_{cr}$$

Carico critico n = 3:

$$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_2 > P_{cr}$$

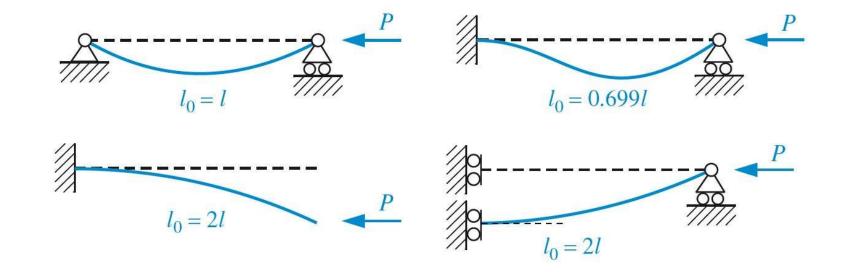




Condizioni di vincolo diverse

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

l₀: lunghezza libera di inflessione (dipende dalla lunghezza l e dalle condizioni di vincolo)





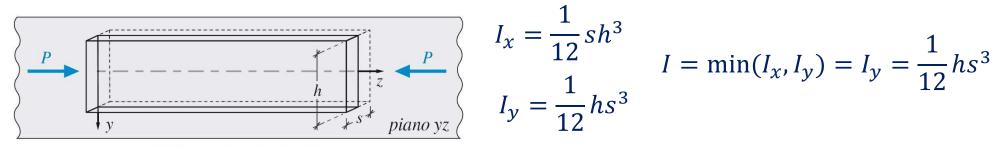
Sezioni diverse dalla sezione circolare

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$
 l_0 : lunghezza libera di inflessione

Se la sezione non è circolare e risulta $I_x \neq I_y$, il carico critico più pericoloso è quello più piccolo: si continua quindi a utilizzare la formula precedente ponendo:

$$I = \min(I_x, I_y)$$

Esempio: asta a sezione rettangolare sottile



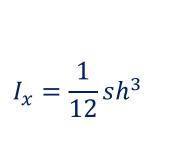
$$I_x = \frac{1}{12}sh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hs^3$$

$$I = \min(I_x, I_y) = I_y = \frac{1}{12}hs^3$$

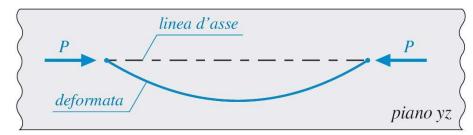


Piano 'forte' di inflessione



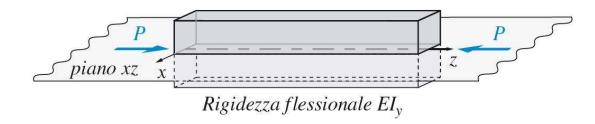


Rigidezza flessionale EI_x

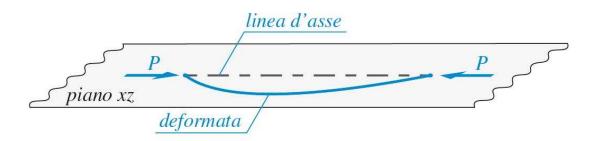




Piano 'debole' di inflessione



$$I_y = \frac{1}{12}hs^3$$







Snellezza di una trave

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2 A} = \pi^2 \frac{E}{l_0^2} \rho^2 = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l_0^2}{\rho^2}\right)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \min(\rho_x, \rho_y)$$

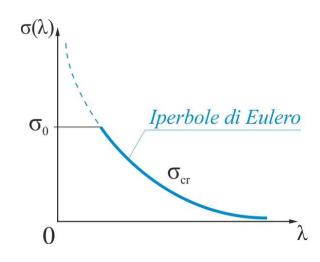
Snellezza λ

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho}$$

Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)



Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica



Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica

Snellezza limite λ_0

$$\sigma_{cr}(\lambda_0) = \sigma_o = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

$$\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o \Rightarrow \qquad \lambda > \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

Travi snelle: $\lambda > \lambda_0$ Travi tozze: $\lambda < \lambda_0$

