

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- 3c. Forza normale eccentrica
- **4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)**
- 5. Torsione uniforme



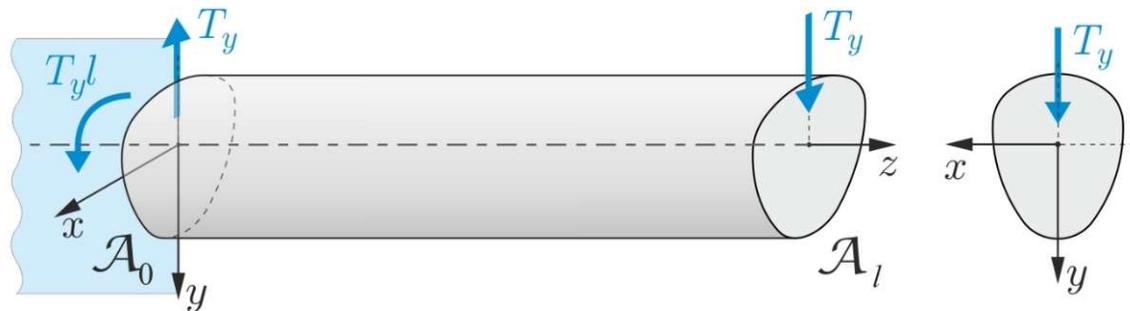
Lezione

4. Flessione e Taglio

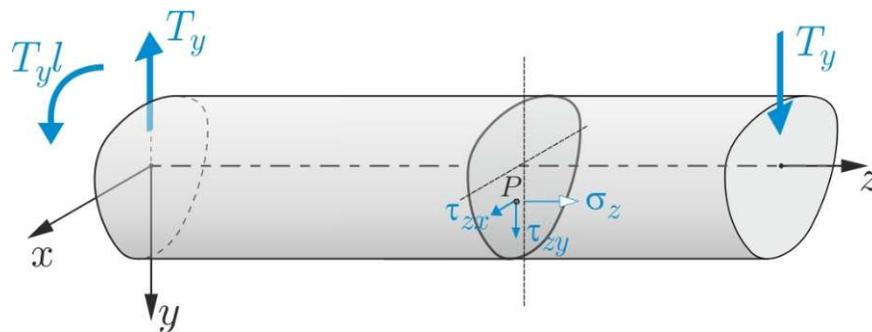
- **Posizione del problema**
- **Ipotesi sulla soluzione (tensioni)**
- **Tensioni normali**
- **Tensioni tangenziali**
- **Teoria approssimata di Jourawsky**
- **Esercizi (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)**

4. Flessione e Taglio

Posizione del problema



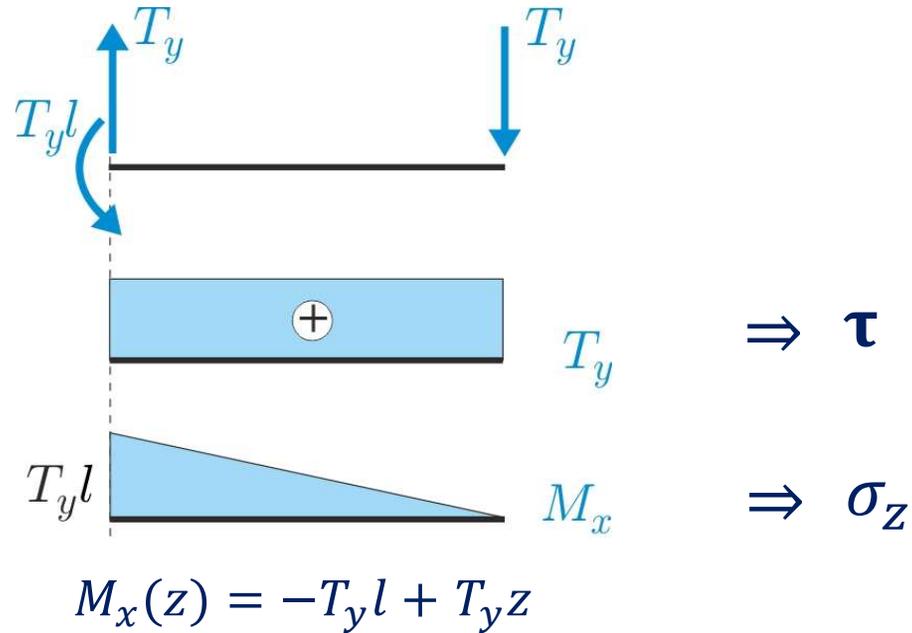
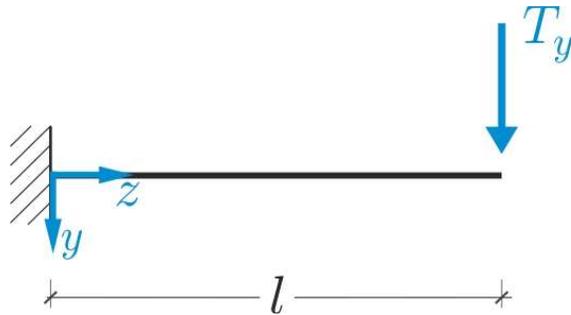
Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



$$\begin{aligned}
 &\sigma_z \neq 0 \\
 &\tau \neq 0 \\
 T(P) = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Flessione e Taglio

Modello 1D



Tensioni normali σ_z

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

$M_x(z) = -T_y l + T_y z$

$$\sigma_z(y, z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{T_y}{I_x} y(l - z)$$

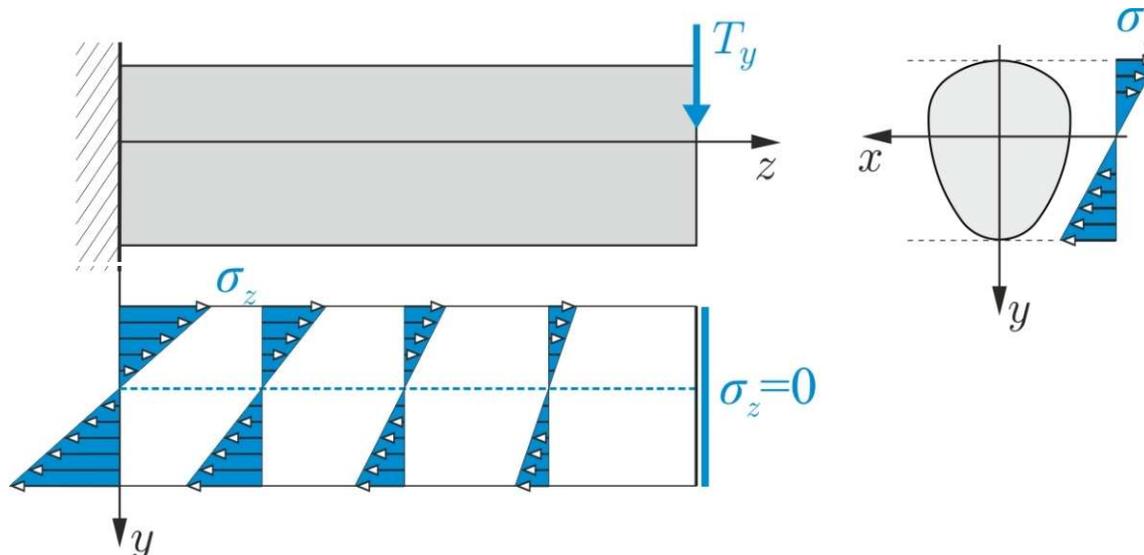
4. Flessione e Taglio

Tensioni normali σ_z

$$\sigma_z(y, z) = -\frac{T_y}{I_x} (l - z)y \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{I_x} y$$

$$\sigma_z(y, 0) = -\frac{T_y}{I_x} l y \quad \sigma_z(y, l) = 0$$

Tensioni normali σ_z : rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio

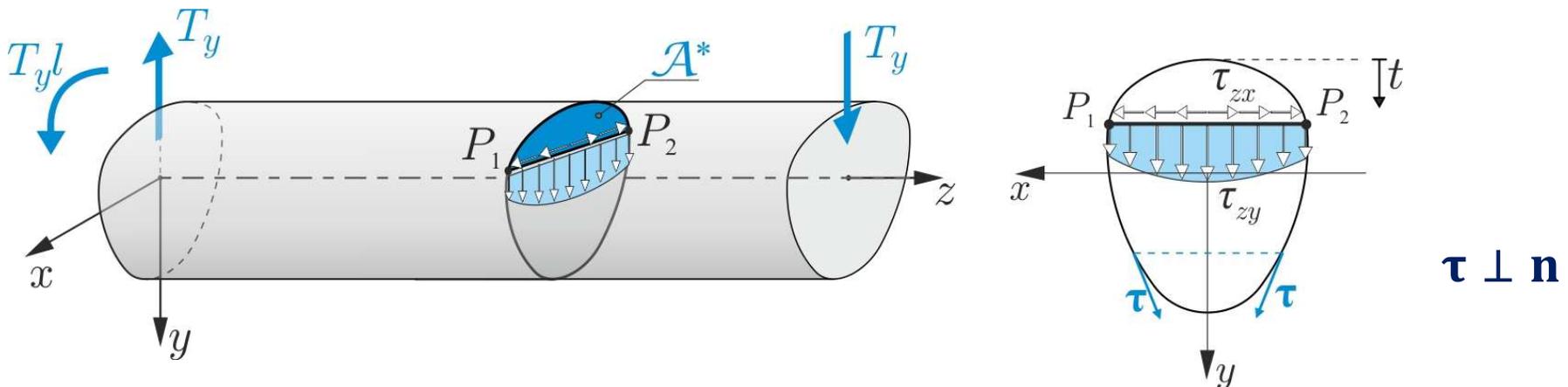
Tensioni tangenziali τ

Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x, y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x, y)\mathbf{j} = \text{cost}_z$$

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{div } \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y}$$

$$\text{c.c. su } \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma}$$



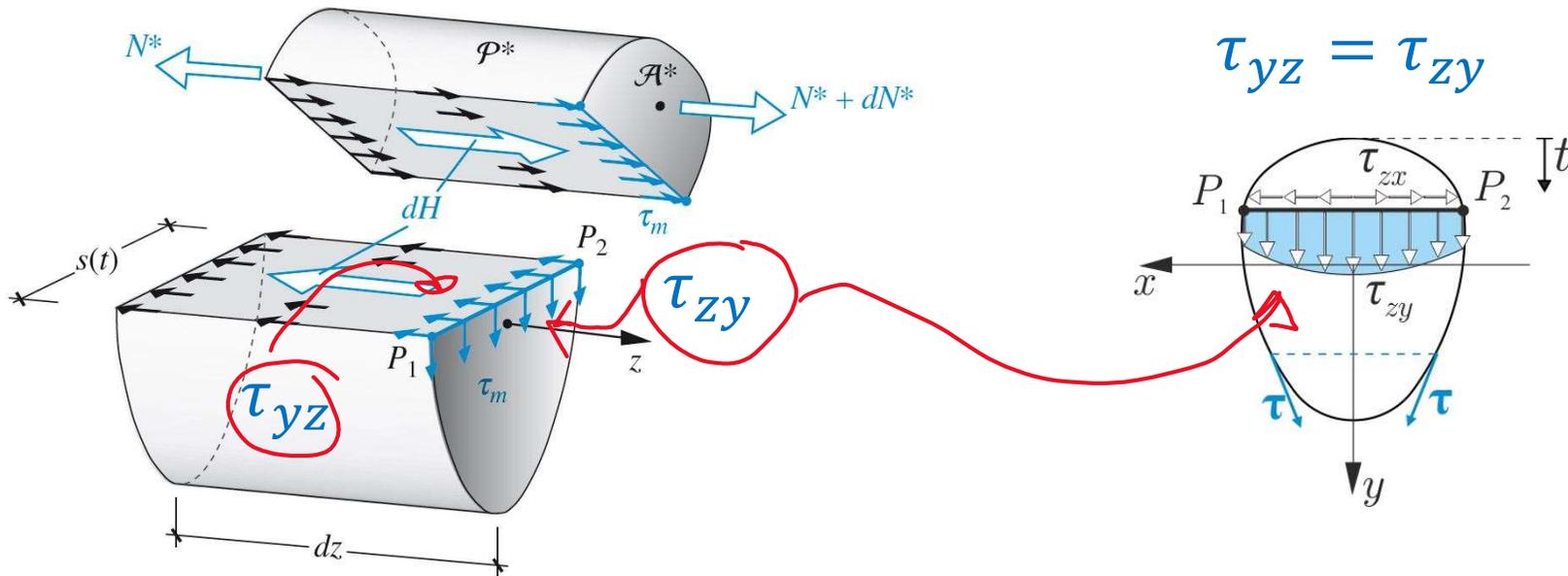
4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ : reciprocità delle tensioni tangenziali

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

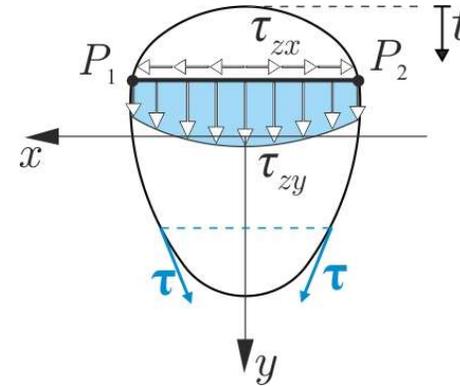
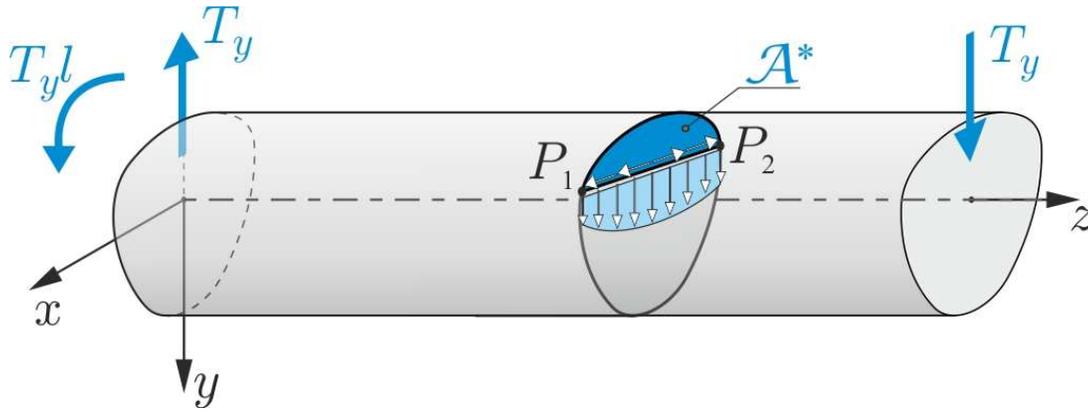
$$\mathbf{m} \perp \mathbf{n} \Rightarrow \tau_{mn} = \tau_{nm}$$



4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ : soluzione esatta

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

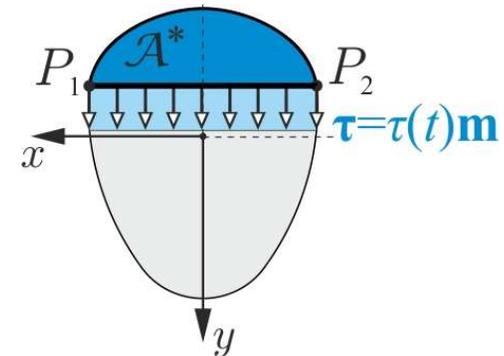
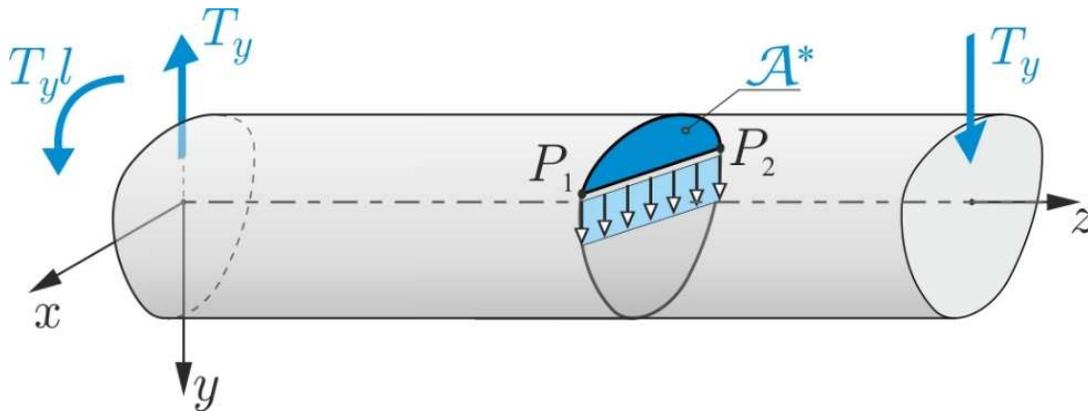


$$\overline{P_1 P_2} = s$$

$$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$$

Tensioni tangenziali τ : valor medio sulla corda

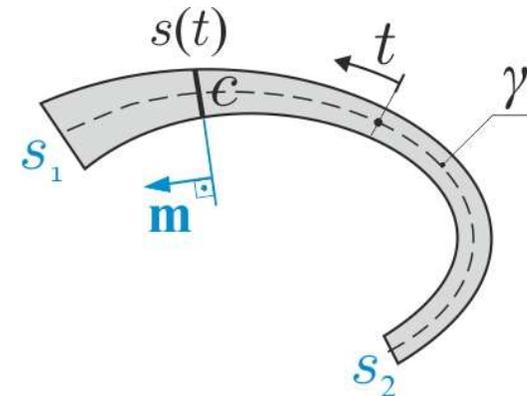
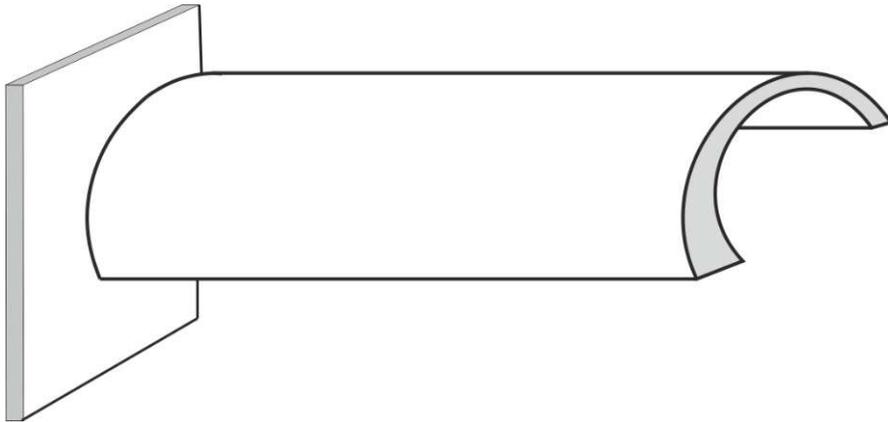
$$\tau_m = \frac{1}{s} \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{zy} dx$$



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

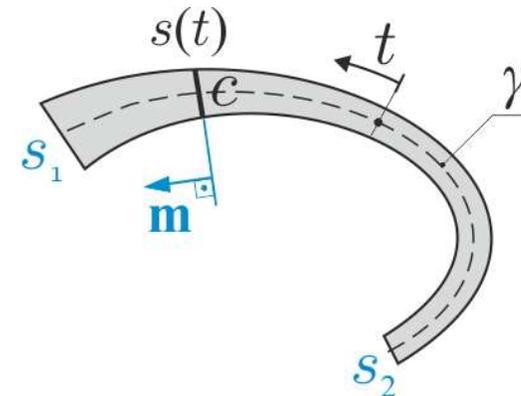
*Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (**corda c**) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (**linea media γ**), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.*



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Tensioni tangenziali τ nei prismi di SV a sezione sottile

Geometria: le sezioni di piccolo spessore sono figure piane descritte da un segmento (corda c) che si muove nel piano mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio punto medio (linea media γ), la lunghezza della linea media risultando sempre molto maggiore della lunghezza della corda.



γ : linea media

c : corda (segmento perpendicolare alla linea media)

t : ascissa locale

\mathbf{m} : versore perpendicolare alla corda e orientato concordemente all'ascissa locale

$s(t)$: lunghezza della corda detta spessore (costante o variabile con t)

$$mis(\gamma) := a$$

$$mis(c) := s(t)$$

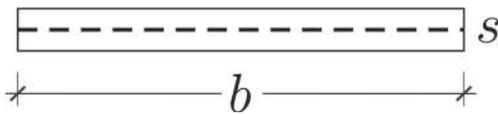
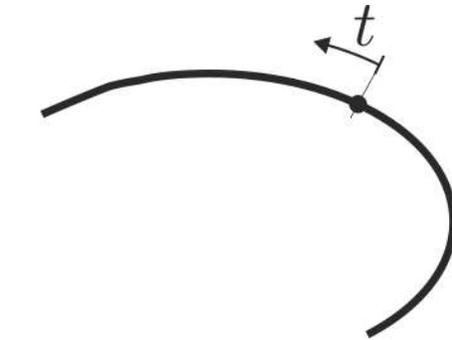
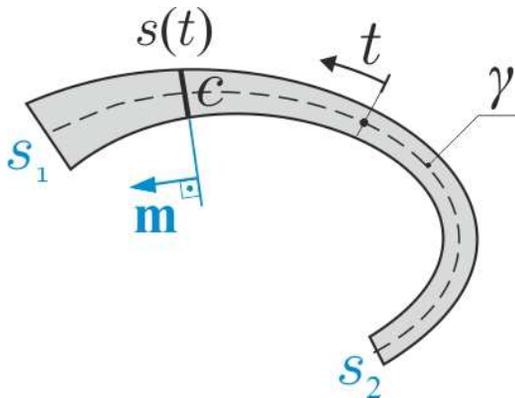
$$s \ll a$$

$$0 \leq t \leq a$$

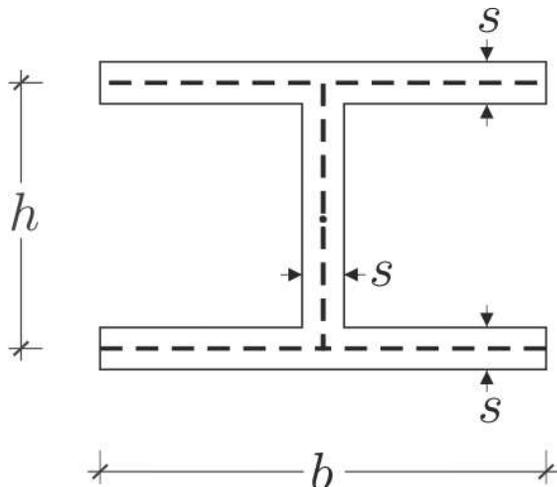
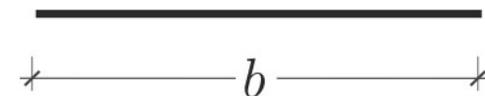
4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

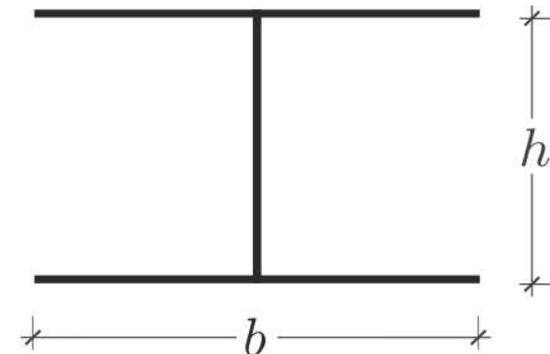
Sezioni di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$): rappresentazione



$$a = b$$



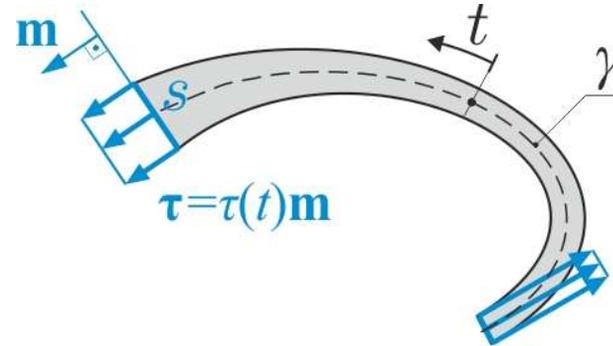
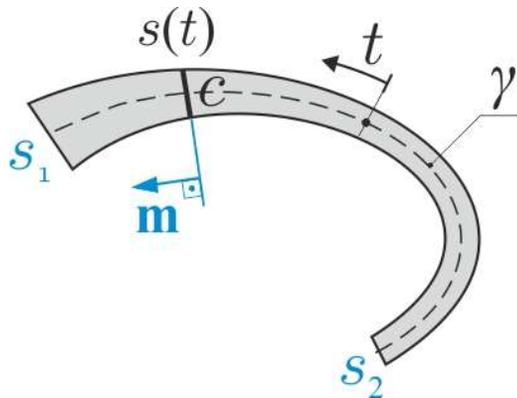
$$a = 2b + h$$



4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Teoria approssimata di Jourawsky

Ipotesi



Ipotesi 1: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è parallelo alla linea media e quindi perpendicolare alla corda

$$\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{m}$$

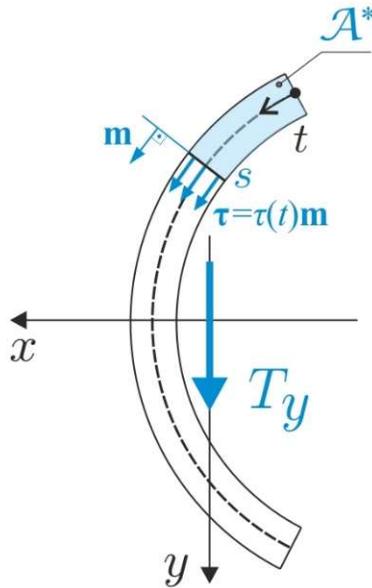
Ipotesi 2: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è costante lungo la corda, il suo modulo dipende quindi dalla sola ascissa locale t :

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

Formula di Jourawsky: *verso e modulo* del vettore delle tensioni tangenziali è fornito dalla formula approssimata di Jourawsky

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y . $[F]$

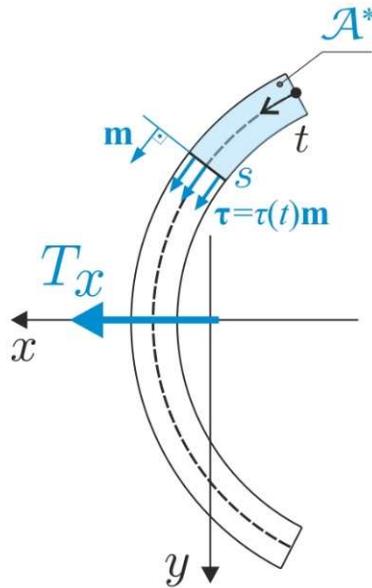
I_x : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x ($I_x > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

S_x^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a x ; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_x



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x S_y^*(t)}{I_y s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_x : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale x . $[F]$

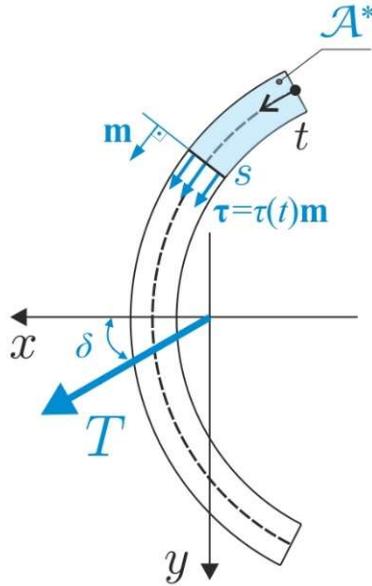
I_y : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale y ($I_y > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

S_y^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a y ; positivo se G^* è dalla parte delle x positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio deviato T



$$T_x = T \cos \delta, \quad T_y = T \sin \delta$$

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$$

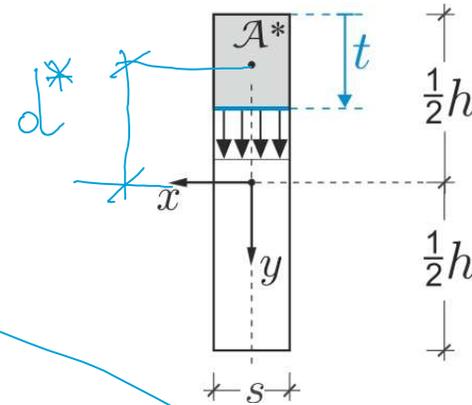
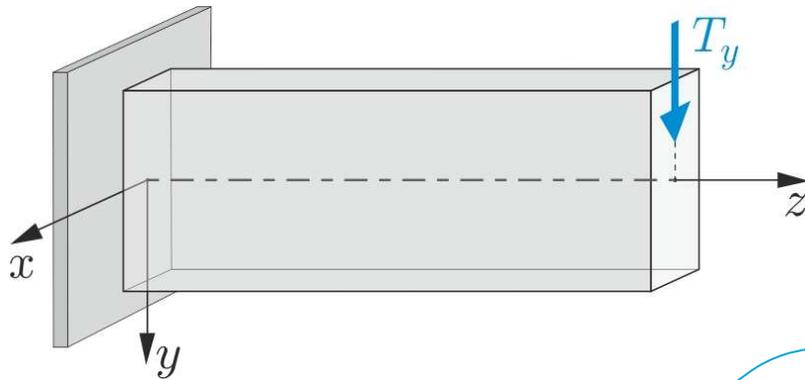
$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x S_y^*(t)}{I_y s(t)} - \frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t) \mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile



$$I_x = \frac{1}{12} s h^3$$

$$\tau(t) = \tau \cdot m = - \frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s}$$

$$S_x^*(t) = A^* d^* = - (s t) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \Rightarrow S_x^*(t) = -st \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \tau\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{T_y h^2}{8I_x}$$

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Sezioni rettangolare sottile

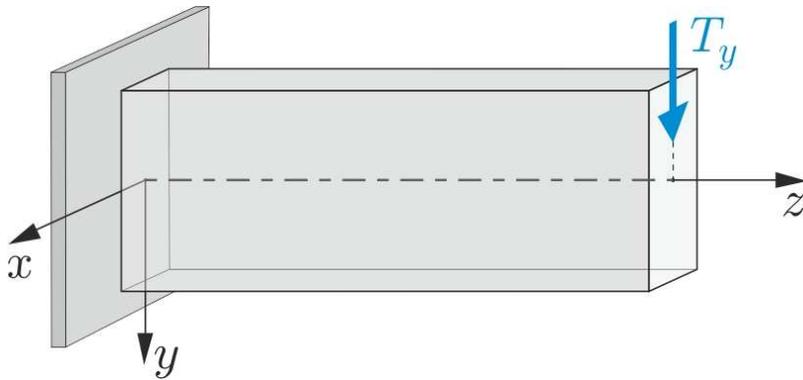
$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

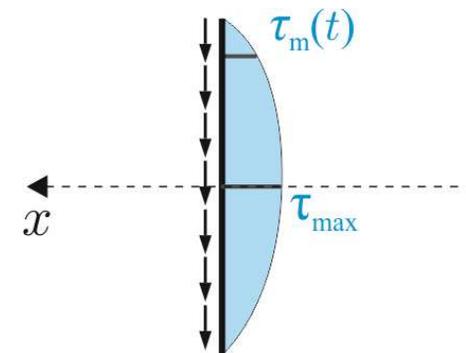
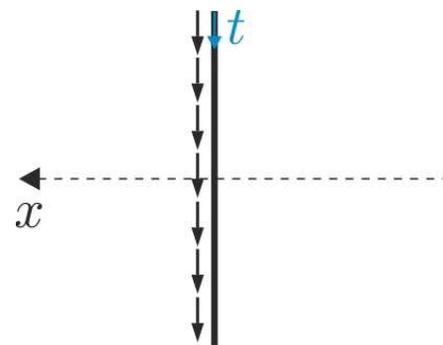
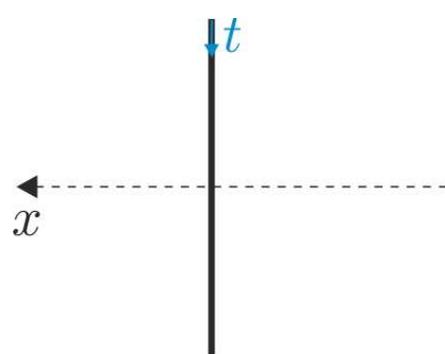
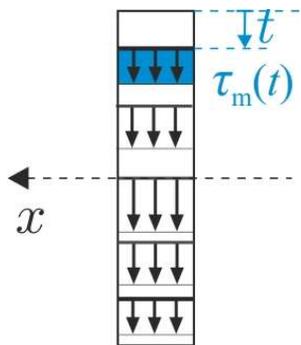
$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T_y h^2}{8I_x}$$



Tensioni tangenziali: rappresentazione grafica



Osservazioni generali (testo § 21.4.4)

Si riassumono nel seguito gli aspetti salienti della teoria approssimata di Jourawsky, valida per sezioni di piccolo spessore:

1. le tensioni tangenziali dovute al taglio, distribuite allo stesso modo in ogni sezione del cilindro, sono dirette parallelamente alla linea media e sono costanti lungo lo spessore. Verso e intensità lungo la linea media si ricavano utilizzando la formula di Jourawsky.
2. il *flusso delle tensioni tangenziali* dovute al taglio, definito come $q(t) = s(t)\tau_m(t)$, non è costante lungo la linea media (come nel caso della torsione uniforme), ma varia *in modo continuo* con t .
3. il campo delle tensioni tangenziali *non è solenoidale* poiché la sua divergenza è diversa da zero e varia da punto a punto nella sezione; le linee di flusso sono quindi generalmente aperte.
4. in corrispondenza agli estremi liberi della sezione le tensioni tangenziali e i relativi flussi sono nulli.
5. le tensioni tangenziali raggiungono il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro (nei casi visti finora è l'asse x).
6. nei tratti paralleli all'asse x le tensioni variano linearmente, nei tratti paralleli all'asse y le tensioni variano secondo una legge quadratica.
7. la trattazione sin qui svolta non si modifica se l'asse principale y non è di simmetria per la sezione, e si estende immediatamente al caso in cui la forza tagliante è parallela all'asse principale x .



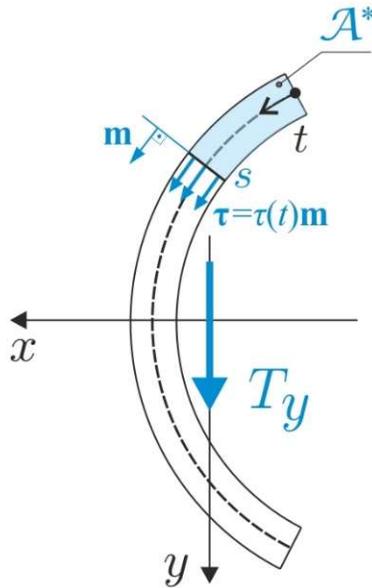
Lezione

4. Flessione e Taglio

- Posizione del problema
- Ipotesi sulla soluzione (tensioni)
- Tensioni normali
- Tensioni tangenziali
- Teoria approssimata di Jourawsky
 - **Dimostrazione della formula di Jourawsky**
- Esercizi (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)

4. Flessione e Taglio: sezioni sottili

Formula di Jourawsky: taglio T_y



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$

$$S_x^*(t) = \int_{\mathcal{A}^*} y dA$$

\mathbf{m} : versore uscente perpendicolare alla corda t : ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con \mathbf{m} se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y : forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y . $[F]$

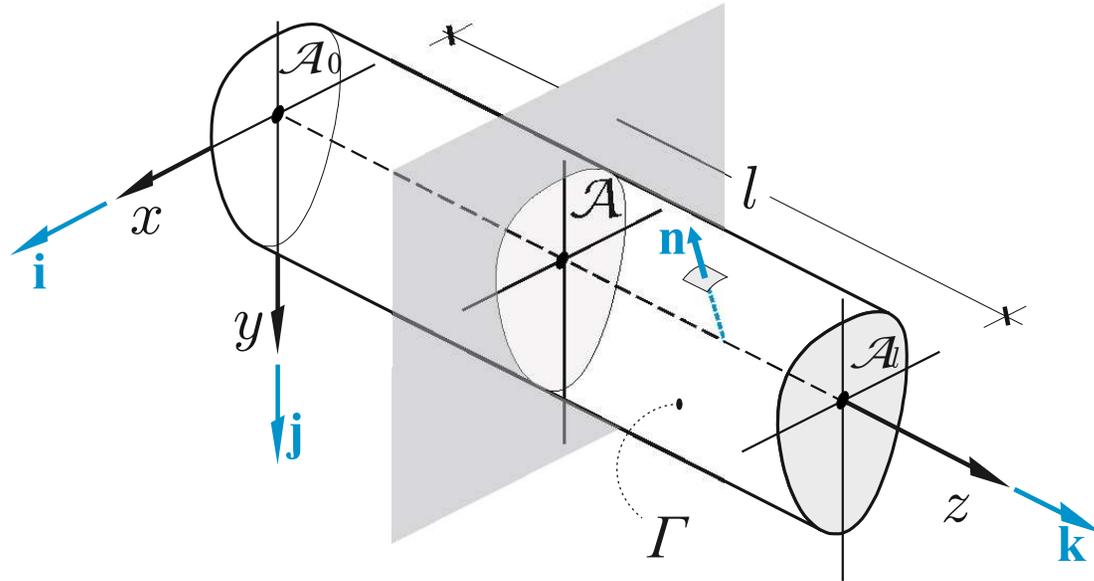
I_x : momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x ($I_x > 0$) $[L^4]$

s : lunghezza della corda c , spessore ($s > 0$) $[L]$

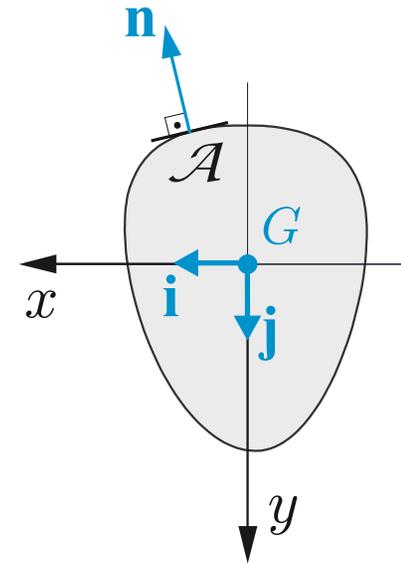
S_x^* : momento statico della porzione \mathcal{A}^* rispetto a x ; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio

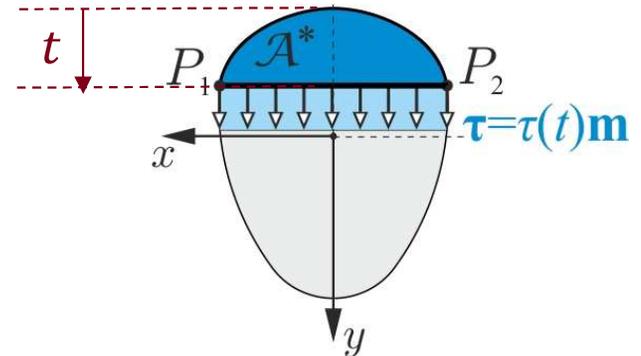
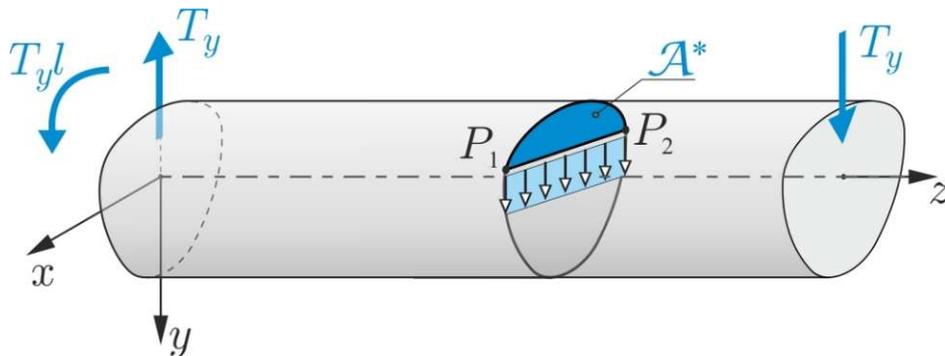
Dimostrazione della formula di Jourawsky



Mantello Γ : versore normale uscente \mathbf{n}

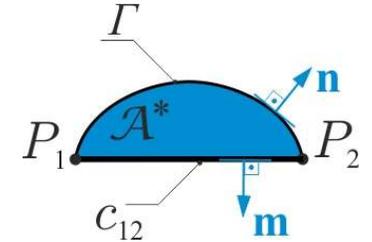
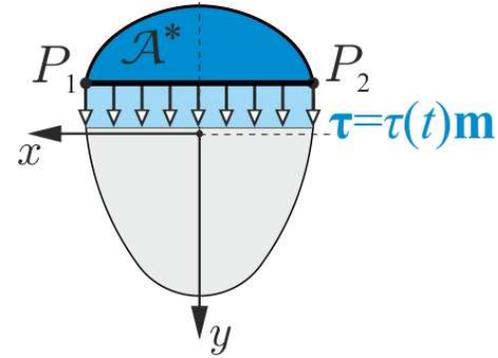
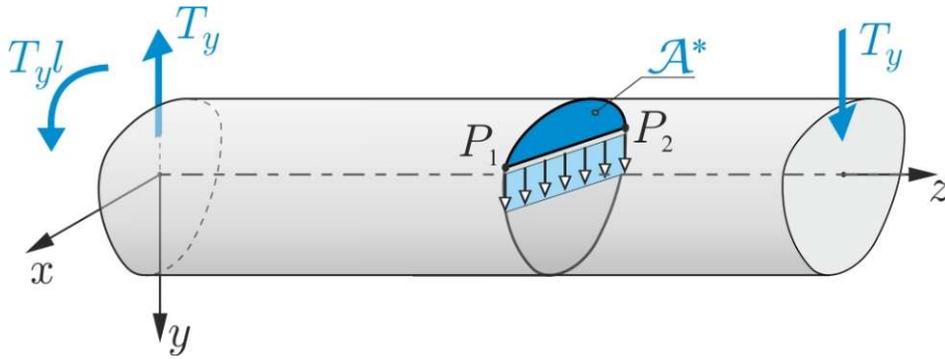


Sezione generica \mathcal{A}
 x, y assi centrali principali d'inerzia



4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky



$$\text{Frontiera: } \partial \mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$$

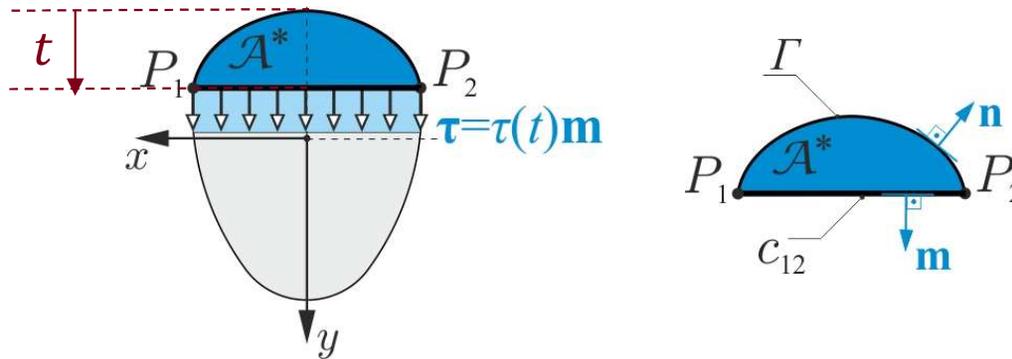
$$\text{Normali uscenti: } \mathbf{n}^* \quad \mathbf{n} \quad \mathbf{m}$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y} \quad \boxed{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma}$$



$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = \int_{\mathcal{A}^*} \left(-\frac{T_y}{I_x} y \right) dA \quad \int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} \int_{\mathcal{A}^*} y dA$$

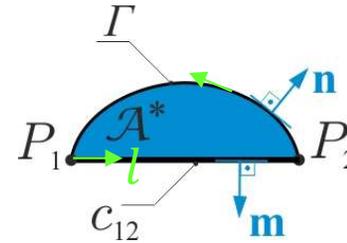
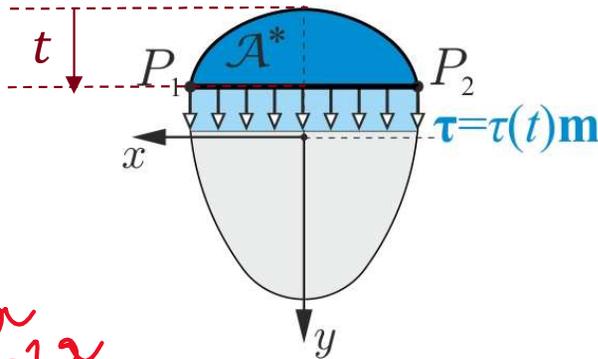
$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky

$$\partial \mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 \mathbf{n}^* \mathbf{n} \mathbf{m}



$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

Teorema di divergenza

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

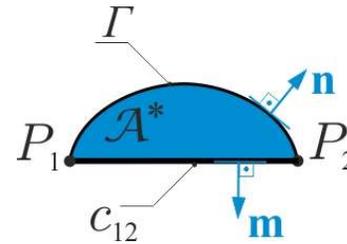
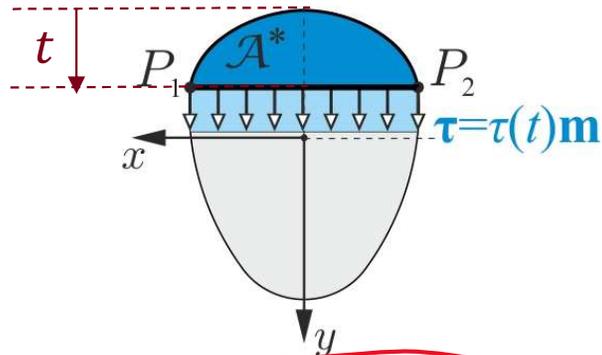
$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \oint_{\partial \mathcal{A}^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^* dl$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \int_{c_{12}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} dl + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dl$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \text{div } \boldsymbol{\tau} dA = \int_{c_{12}} \tau(t) dl = \tau(t) \int_{c_{12}} dl = \tau(t) \text{mis}(c_{12}) = \tau(t) s(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky



$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0, P \in \Gamma$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\int_{\mathcal{A}^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = \tau(t) s(t)$$

$$\tau(t) s(t) = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y S_x^*(t)}{I_x s(t)}$$