Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- **3b. Tensoflessione**
- 3c. Forza normale eccentrica
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- 5. Torsione uniforme

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

3. Sollecitazioni composte

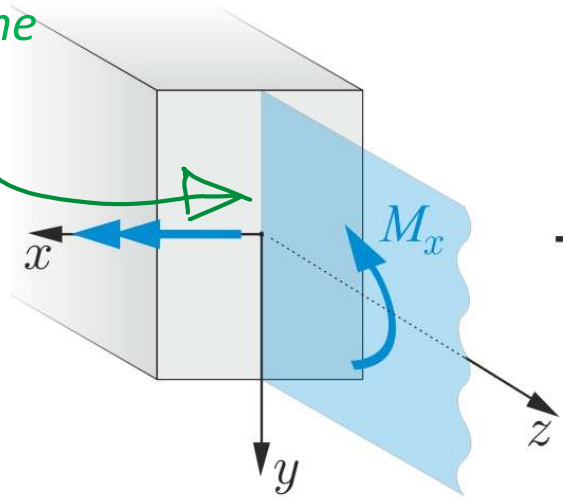
- Flessione deviata
- **Tensoflessione (pressoflessione) deviata**
- **Forza normale eccentrica**
- Esercizi (sito: E16, testo: §19.5-19.7)

RIEPILOGO Flessione Retta

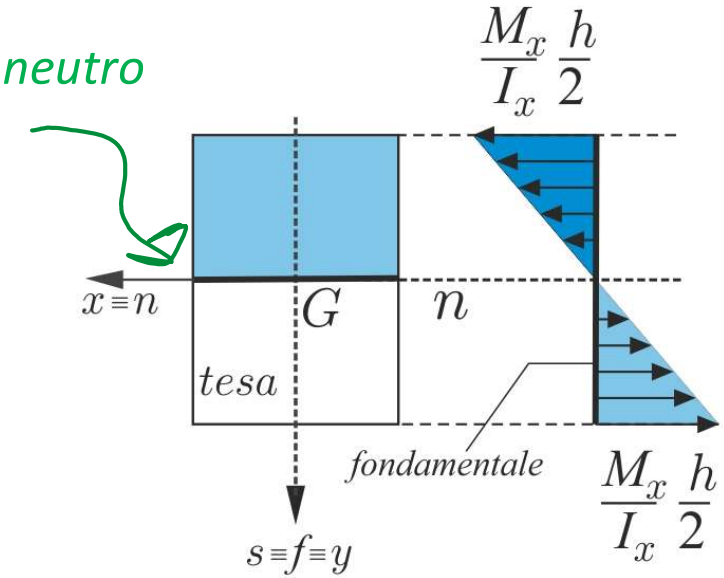
Flessione retta M_x

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Asse sollecitazione



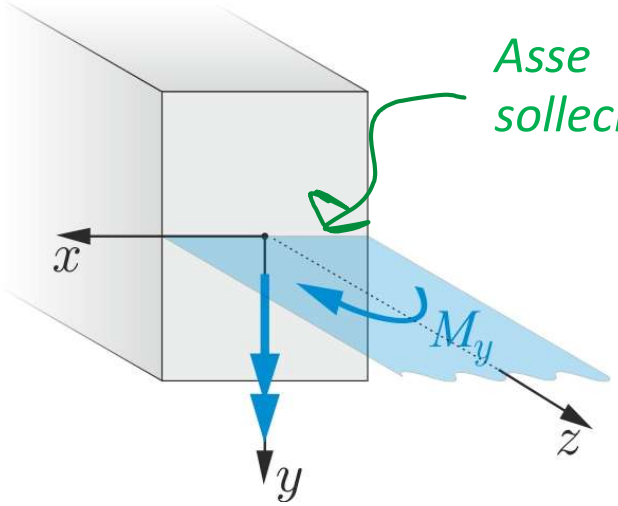
Asse neutro



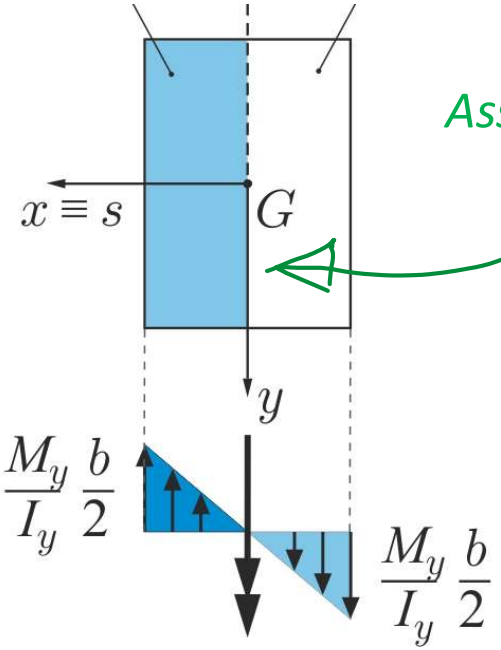
Flessione retta M_y

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x$$

Asse sollecitazione



Asse neutro

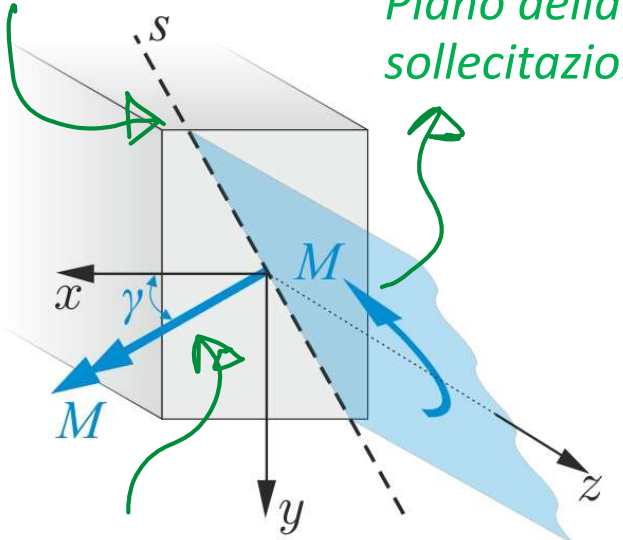


RIEPILOGO Flessione deviata

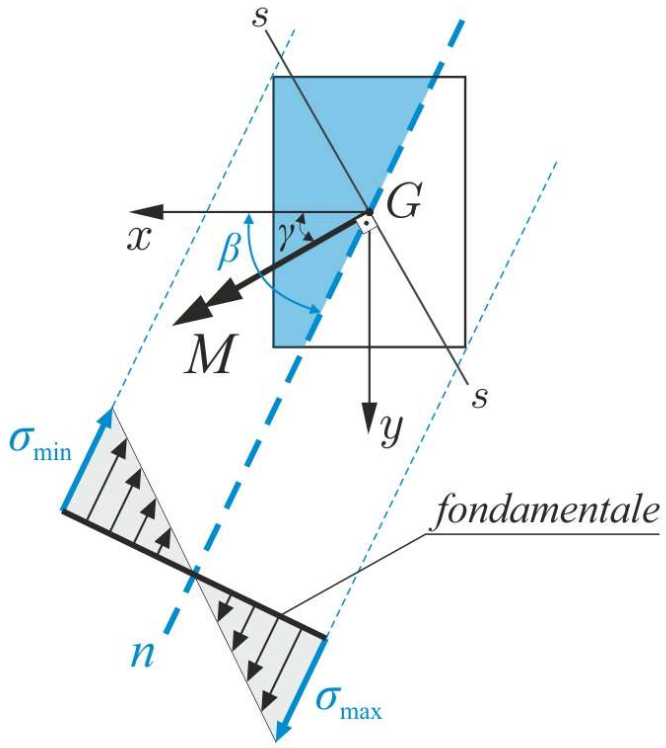
Posizione del problema

Asse sollecitazione

Piano della sollecitazione



Asse momento



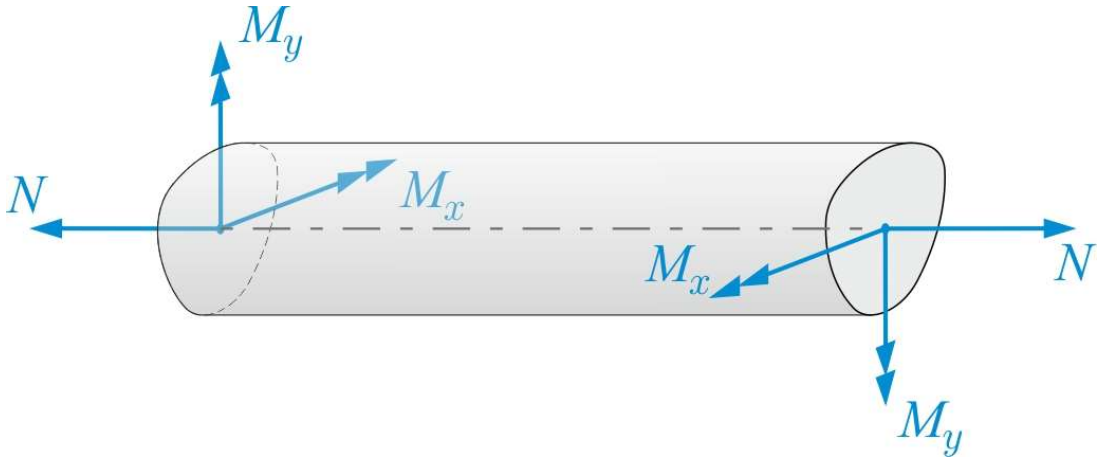
Asse neutro

$$y = \tan\beta\, x$$

$$\sigma_z = \frac{M\cos\gamma}{I_x} y - \frac{M\sin\gamma}{I_y} x$$

3b. Tensoflessione deviata

Posizione del problema



Sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

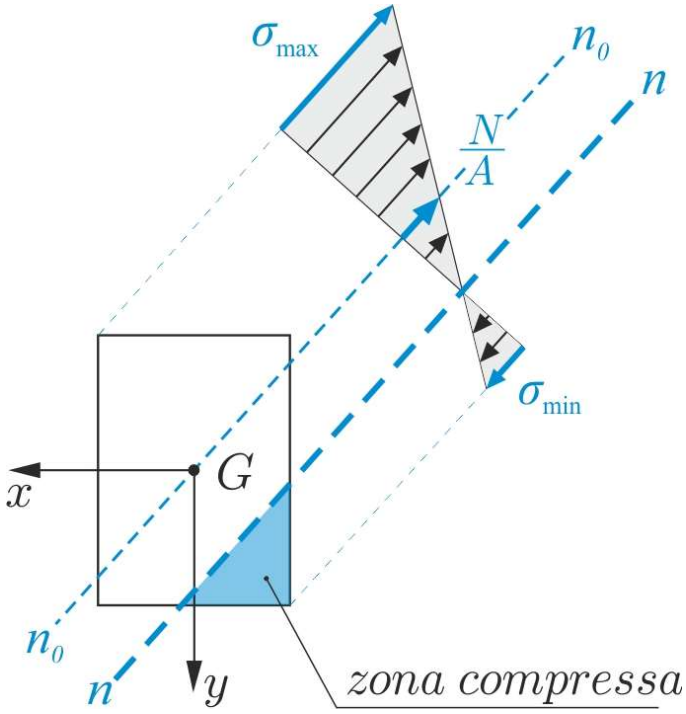
3b. Tensoflessione deviata

Stato tensionale: rappresentazione grafica

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$G \equiv (0,0) \Rightarrow \quad \sigma_G = \frac{N}{A}$$



Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tan\beta\, x + p$$

$$\tan\beta = \frac{M_y}{M_x}\frac{I_x}{I_y} \qquad p = -\frac{M_y}{N}\frac{A}{I_y}$$

L'asse neutro NON passa per il baricentro

L'asse neutro NON è perpendicolare all'asse di sollecitazione

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

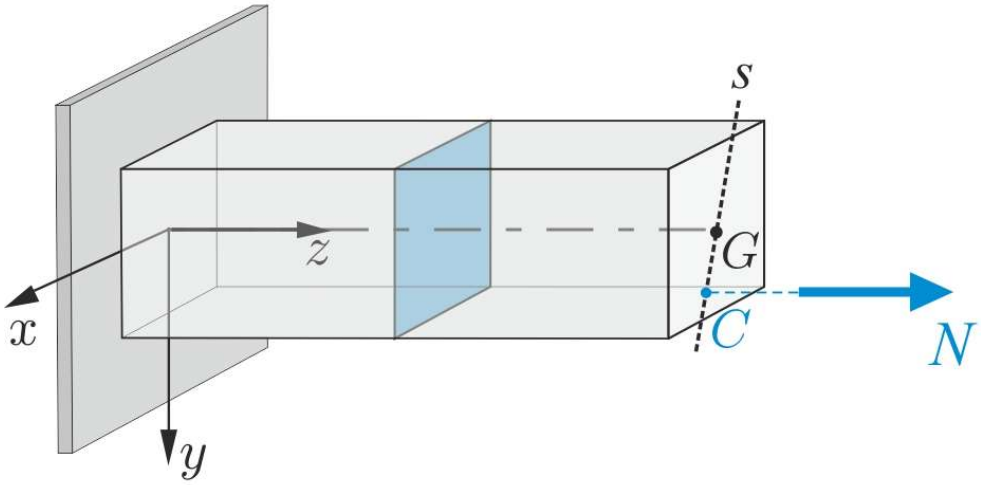
Lezione

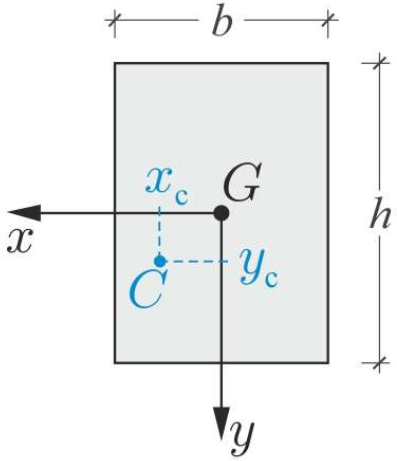
Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- Obiettivi, Generalità
- 1. Forza normale centrata
- 2. Flessione retta (flessione uniforme retta)
- 3a. Flessione deviata (flessione uniforme deviata)
- 3b. Tensoflessione
- **3c. Forza normale eccentrica**
- 4. Flessione e taglio (flessione non uniforme)
- 5. Torsione uniforme

3c. Forza normale eccentrica

Posizione del problema

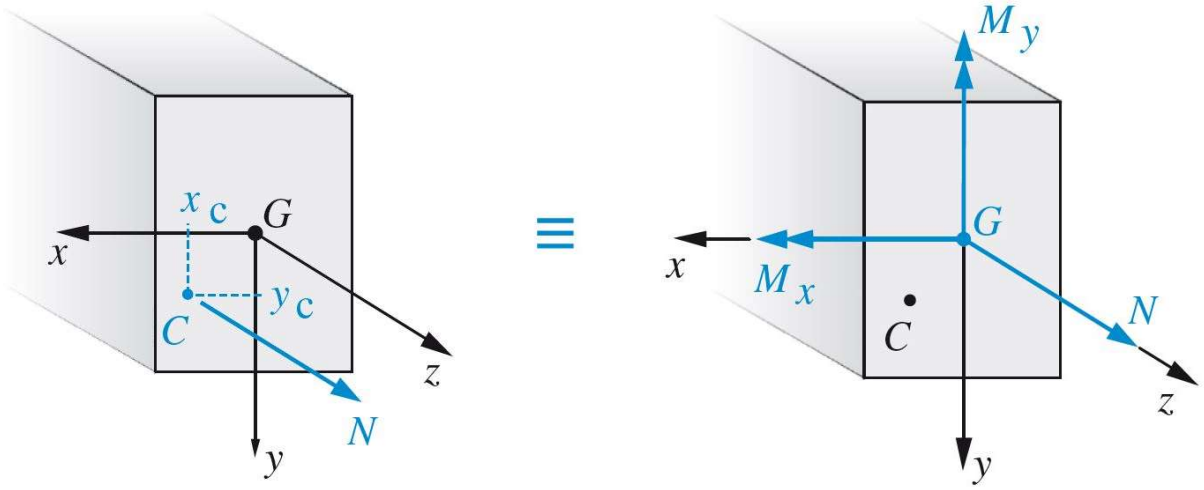




C : centro di sollecitazione

3c. Forza normale eccentrica

Posizione del problema



N $\qquad M_x = N y_C \qquad\qquad M_y = -N x_C$

Sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

3c. Forza normale eccentrica

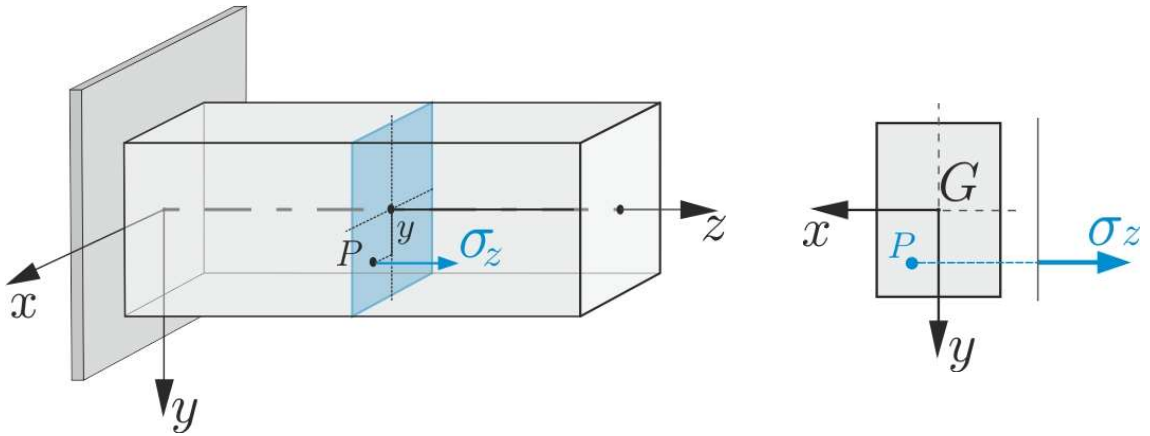
Soluzione in forma chiusa (tensioni)

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$$

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x}$$



3c. Forza normale eccentrica

Stato tensionale

L'asse neutro NON passa per il baricentro

Formula generalizzata di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x$$

$$G \equiv (0,0) \Rightarrow \quad \sigma_G = \frac{N}{A}$$

L'asse neutro NON è perpendicolare all'asse di sollecitazione

Asse neutro

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{A}\left(1 + \frac{A y_C}{I_x} y + \frac{A x_C}{I_y} x\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{A y_C}{I_x} y + \frac{A x_C}{I_y} x = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{y}{\left(\frac{I_x}{A y_C}\right)} + \frac{x}{\left(\frac{I_y}{A x_C}\right)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(-\frac{\rho_y^2}{x_C}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{\rho_x^2}{y_C}\right)} = 1$$

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} \qquad \rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

3c. Forza normale eccentrica

Stato tensionale

Formula generalizzata di Navier

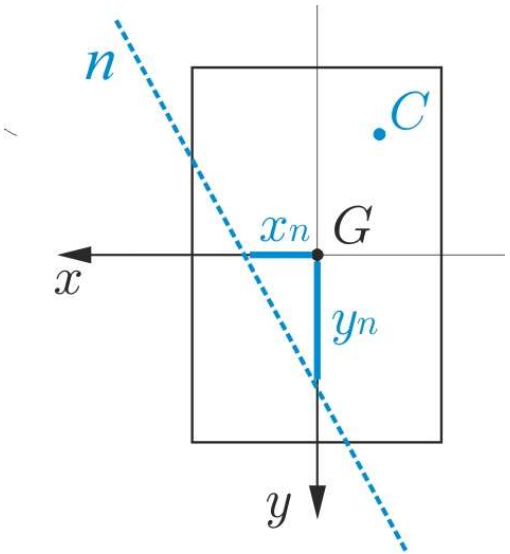
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x$$

$$G \equiv (0,0) \Rightarrow \quad \sigma_G = \frac{N}{A}$$

Asse neutro (forma segmentaria)

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1$$

$$x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_C}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_C}$$



- *L'asse neutro NON passa per il baricentro.*
- *La sua posizione dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche della sezione e dalla posizione del centro di sollecitazione.*
- *Fissata la geometria della sezione, esiste una corrispondenza biunivoca fra asse neutro e centro di sollecitazione (antipolarità)*
- *L'asse neutro si trova rispetto al baricentro dalla parte opposta del centro di sollecitazione.*

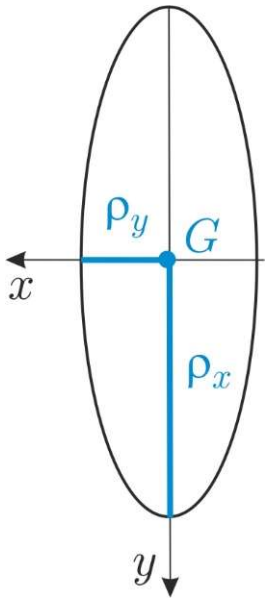
3c. Forza normale eccentrica

Interpretazione geometrica: ellisse centrale d'inerzia e antipolarità

Asse neutro (forma segmentaria)

$$\frac{x}{x_n}+\frac{y}{y_n}=1 \qquad x_n=-\frac{\rho_y^2}{x_C},\quad y_n=-\frac{\rho_x^2}{y_C} \qquad \rho_x^2=\frac{I_x}{A} \qquad \rho_y^2=\frac{I_y}{A}$$

Ellisse centrale d'inerzia della sezione



$$\frac{x^2}{\rho_y^2}+\frac{y^2}{\rho_x^2}=1$$

- *L'asse neutro è la **retta antipolare** del centro di sollecitazione rispetto all'ellisse centrale d'inerzia*

- *Il centro di sollecitazione è **l'antipolo** dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale d'inerzia*

3c. Forza normale eccentrica

Stato tensionale: rappresentazione grafica

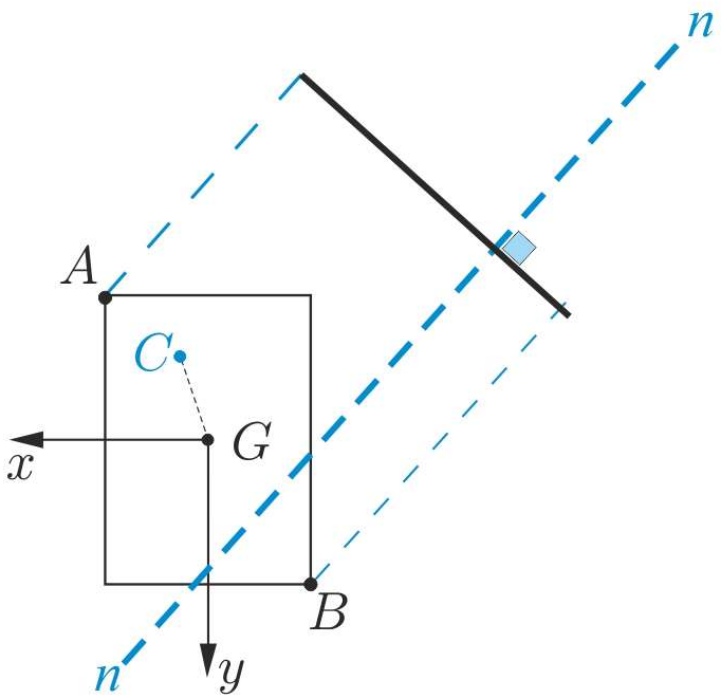
Formula di Navier

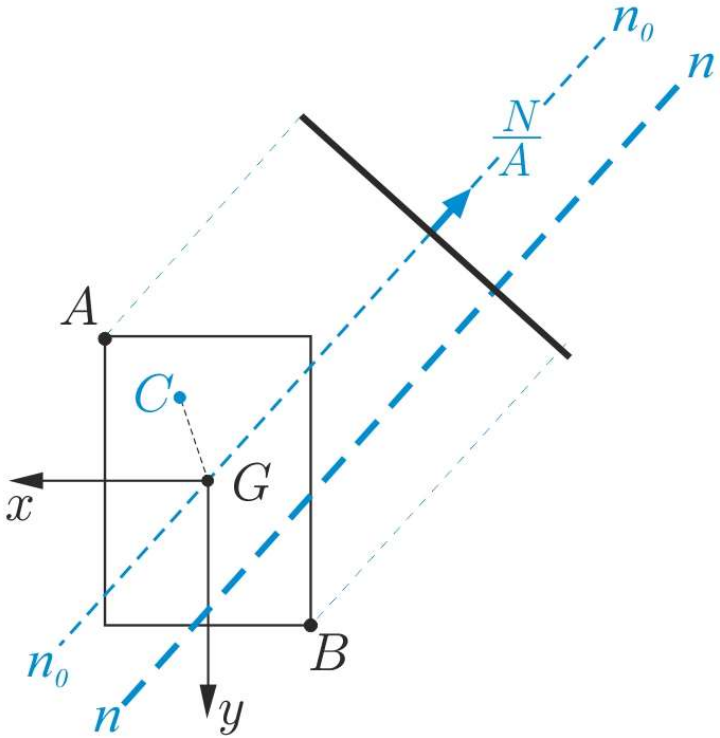
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x$$

Asse neutro

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1$$

$$x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_C}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_C}$$





3c. Forza normale eccentrica

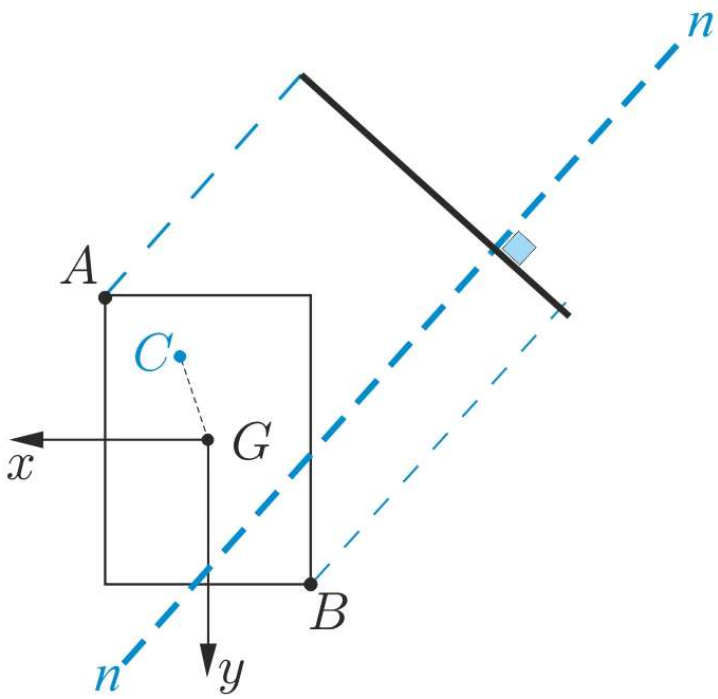
Stato tensionale: rappresentazione grafica

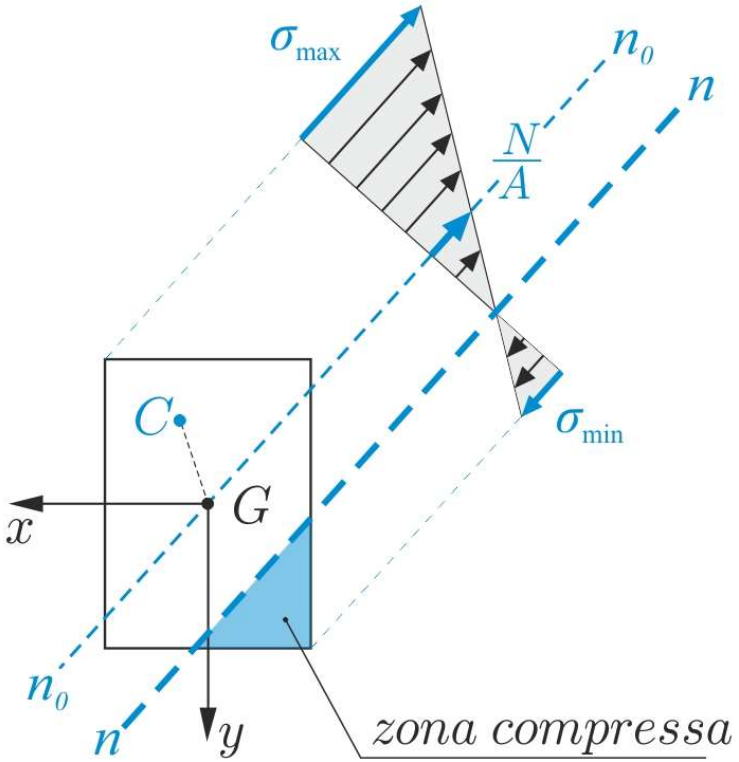
Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N}{I_x} y_C \, y + \frac{N}{I_y} x_C \, x$$

Asse neutro

$$\frac{x}{x_n} + \frac{y}{y_n} = 1 \qquad x_n = -\frac{\rho_y^2}{x_C}, \quad y_n = -\frac{\rho_x^2}{y_C}$$

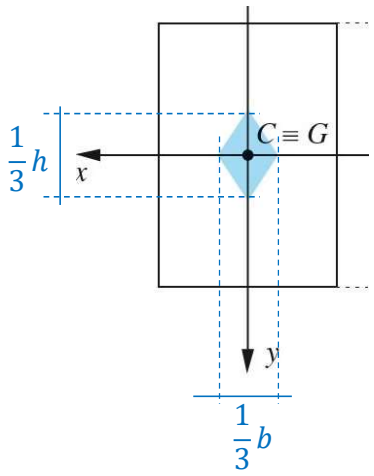




3c. Forza normale eccentrica

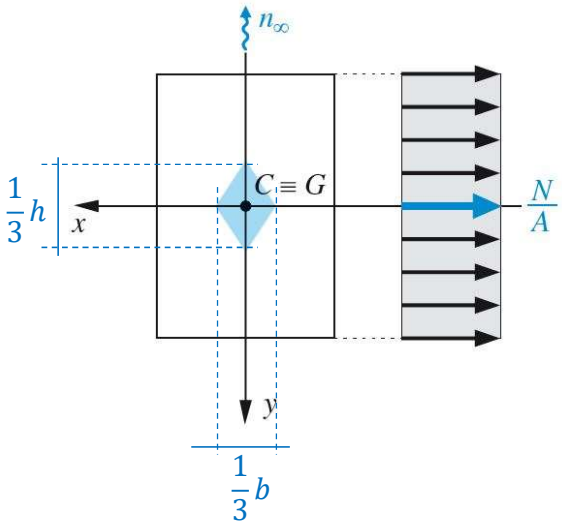
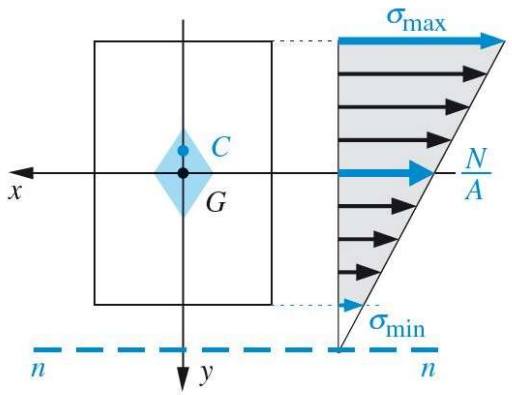
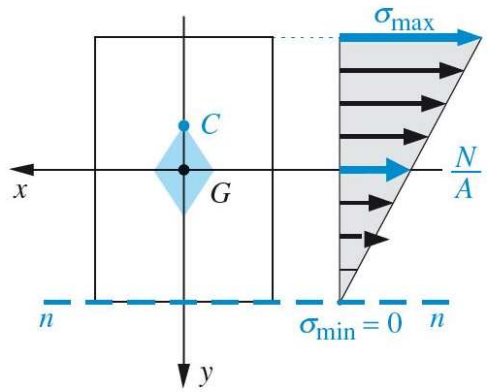
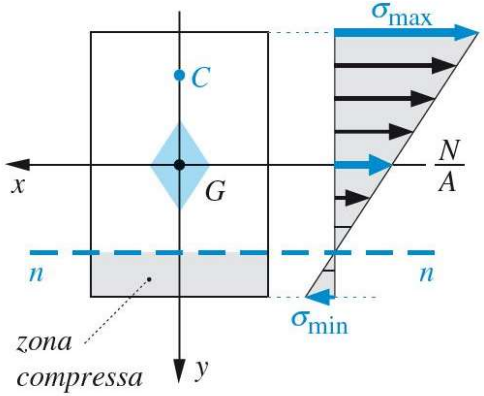
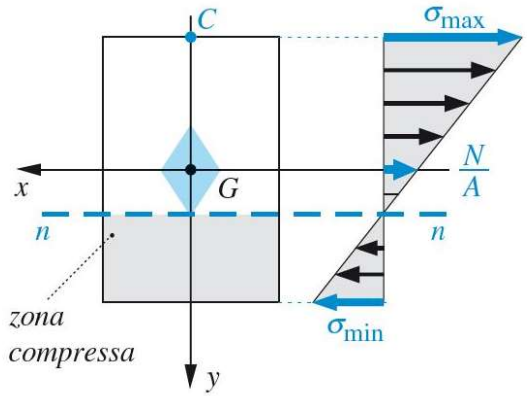
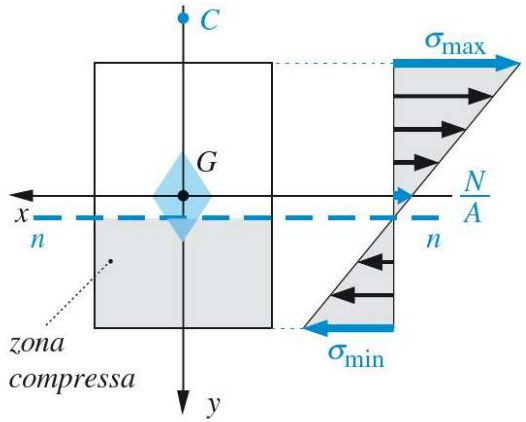
Nocciolo centrale d'inerzia

Luogo geometrico degli antipoli (rispetto all'ellisse centrale d'inerzia) di rette non secanti la sezione



Alcune proprietà

- *Se il centro di sollecitazione appartiene al nocciolo, l'asse neutro è esterno alla sezione.*
- *Regione piana la cui forma dipende unicamente dalla geometria della sezione.*
- *Il centro di figura appartiene al nocciolo.*
- *Se il centro di sollecitazione sta sulla frontiera del nocciolo, l'asse neutro è tangente alla sezione.*
- *Se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo, l'asse neutro è interno alla sezione che risulta pertanto soggetta a tensioni normali sia di trazione che di compressione.*

3c. Forza normale eccentrica

Nocciolo centrale d'inerzia