Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Modelli strutturali

- PARTE I – Corpo rigido
- PARTE II – Trave elastica monodimensionale
- **PARTE III – Continuo tridimensionale**
- PARTE IV – Cilindro di Saint Venant

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione

Parte III - Il modello di continuo deformabile 3D

- Definizioni, ipotesi
- Cinematica del continuo 3D
- Statica del del continuo 3D
- Materiale costitutivo
- Problema elastico

Il modello di continuo deformabile 3D

Mezzo continuo deformabile: corpo ideale *esteso*, *continuo* e *deformabile*.

Proprietà. 1. Esteso: Occupa una porzione finita dello spazio detta *configurazione* C. **2. Continuo:** La materia costitutiva occupa la porzione di spazio in modo continuo (cioè senza lasciare vuoti), di conseguenza è possibile definire una *corrispondenza biunivoca* fra punti materiali del corpo e punti geometrici dello spazio euclideo. **3. Deformabile:** Il corpo (o qualsiasi sua parte) può cambiare forma e dimensioni: *deformabilità* sia a livello globale che locale. Nel presente modello non sono consentiti lacerazione o compenetrazione di materia, ed è assicurata la 'permanenza della materia' (*requisisti di plausibilità fisica*)

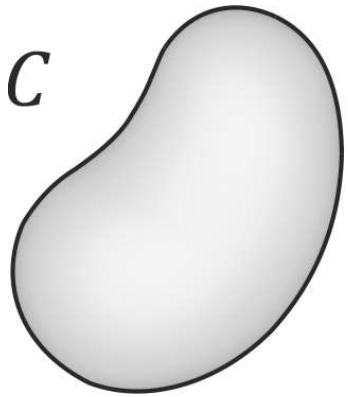
Configurazione:

$S = \partial C$: *frontiera*

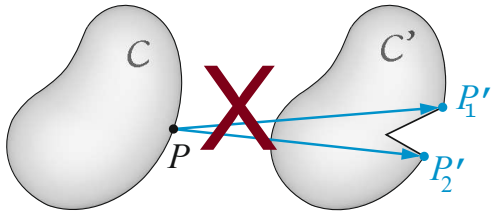
$S = S_u \cup S_f$

S_u : *frontiera vincolata*

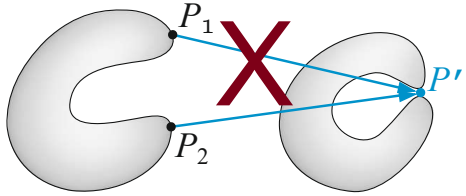
S_f : *frontiera libera*



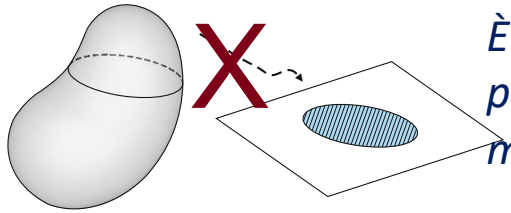
Requisiti di plausibilità fisica



non è ammessa lacerazione materia



non è ammessa compenetrazione materia



È assicurata la permanenza della materia

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

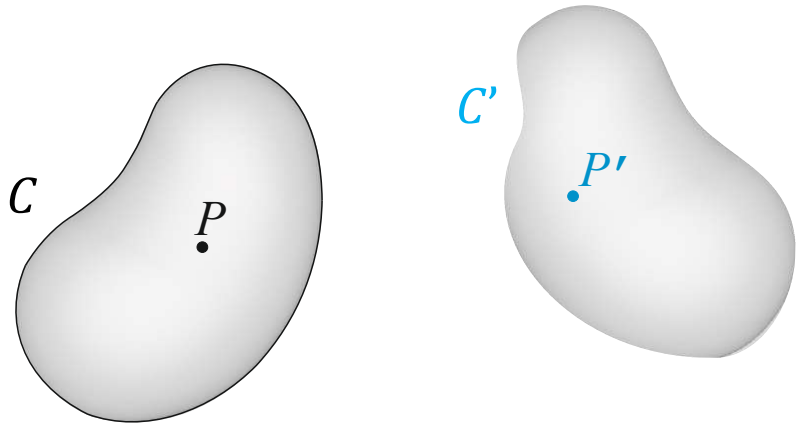
1. Cinematica del continuo 3D

- **Obiettivi**
- **Campo degli spostamenti**
- **Analisi della deformazione**
  - tensore della deformazione $\mathbf{E}(P)$
  - misure di deformazione
- **Equazioni implicite di congruenza**

1. Cinematica del continuo 3D: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare i cambiamenti di configurazione (da C a C') di un continuo tridimensionale

Obiettivo 2. Definire per il modello le grandezze atte a caratterizzare (misurare) i cambiamenti di forma e/o dimensione a livello globale e locale manifestati dal continuo nel passaggio da C a C'



C : configurazione iniziale

C' : configurazione finale

C : configurazione

$S = \partial C$ *: frontiera*

$S = S_u \cup S_f$

S_u *: frontiera vincolata*

S_f *: frontiera libera*

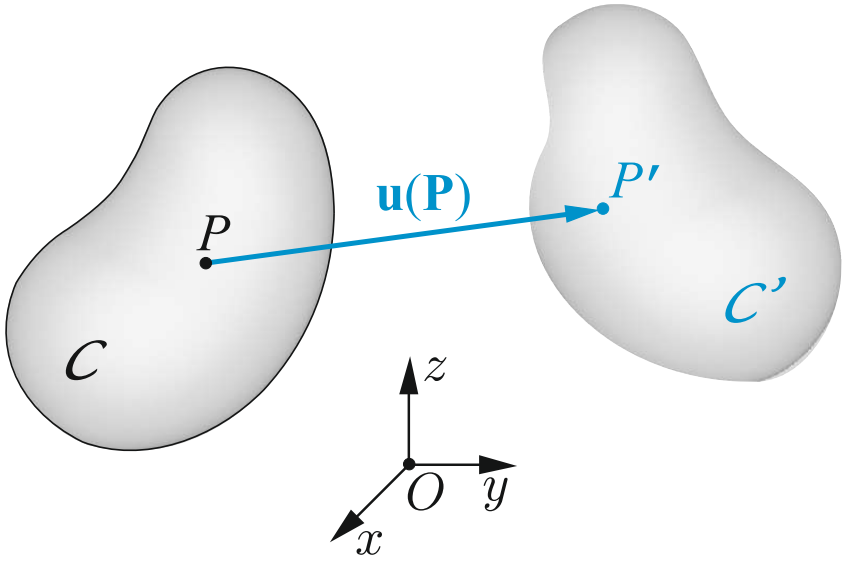
Trasporto f

f: C → C'

L'applicazione f è biunivoca e ammette un'unica applicazione inversa continua (requisiti plausibilità)

1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

Vettore spostamento. Campo di spostamenti: Assegnato un punto $P \in C$, si definisce spostamento $\mathbf{u}(P)$ il vettore applicato **PP′.** Dimensioni fisiche [L], funzione vettoriale di punto Il campo vettoriale definito dallo spostamento di tutti i punti caratterizza la deformata del continuo



$$P \equiv (x, y, z)$$

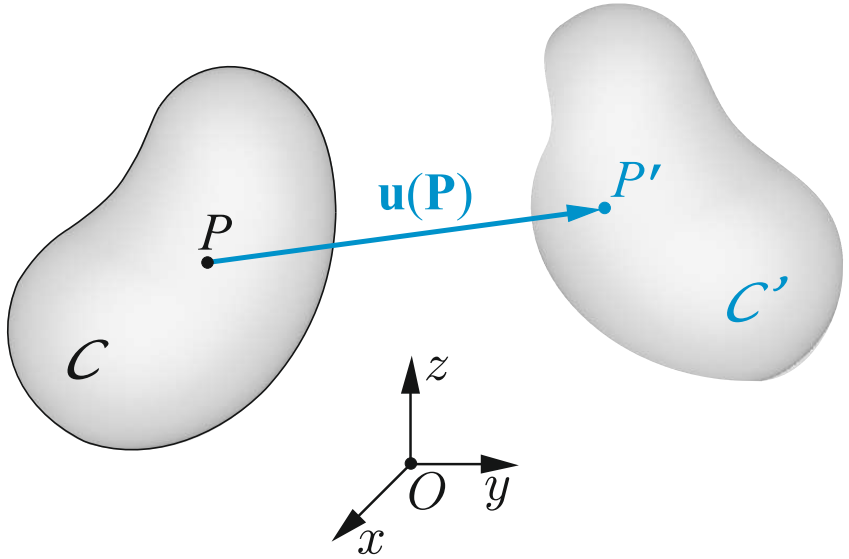
$$\mathbf{u}(P) \rightarrow \textit{Vettore spostamento } [L]$$

$$\mathbf{u}(P) = \overline{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

$\overline{\mathbf{u}}$ eventuali cedimenti vincolari assegnati

1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

Vettore spostamento. Componenti scalari: Le componenti del vettore $\mathbf{u}(P)$ in un assegnato sistema di riferimento hanno dimensioni fisiche [L] e sono funzioni scalari di tre variabili.



$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u_P} = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

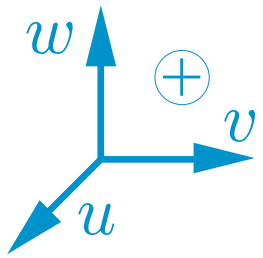
$u(x, y, z)$ → *componente x* $[L]$

$v(x, y, z)$ → *componente y* $[L]$

$w(x, y, z)$ → *componente z* $[L]$

$P \equiv (x, y, z)$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



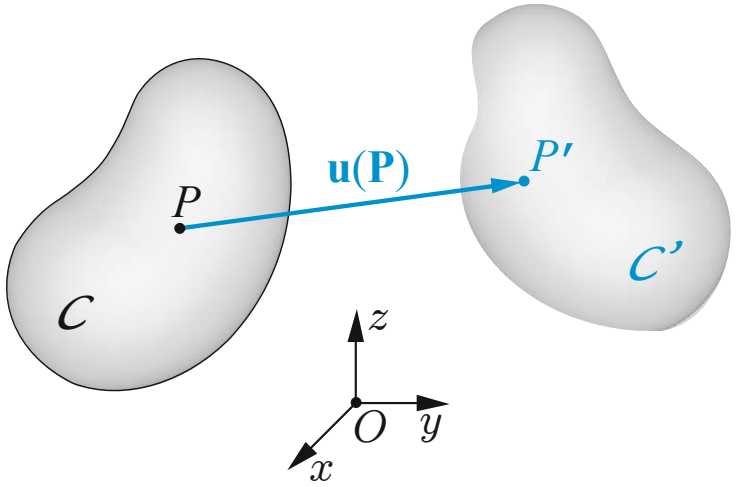
1. Cinematica del continuo 3D : spostamento

Ipotesi 1: piccoli spostamenti

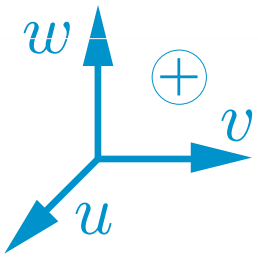
$$\forall\, P \in C, \quad |\mathbf{u}(P)| \ll \ell$$

ℓ dimensione caratteristica del corpo

Ipotesi 2: regolarità delle funzioni $w(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$



$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{u_P} = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

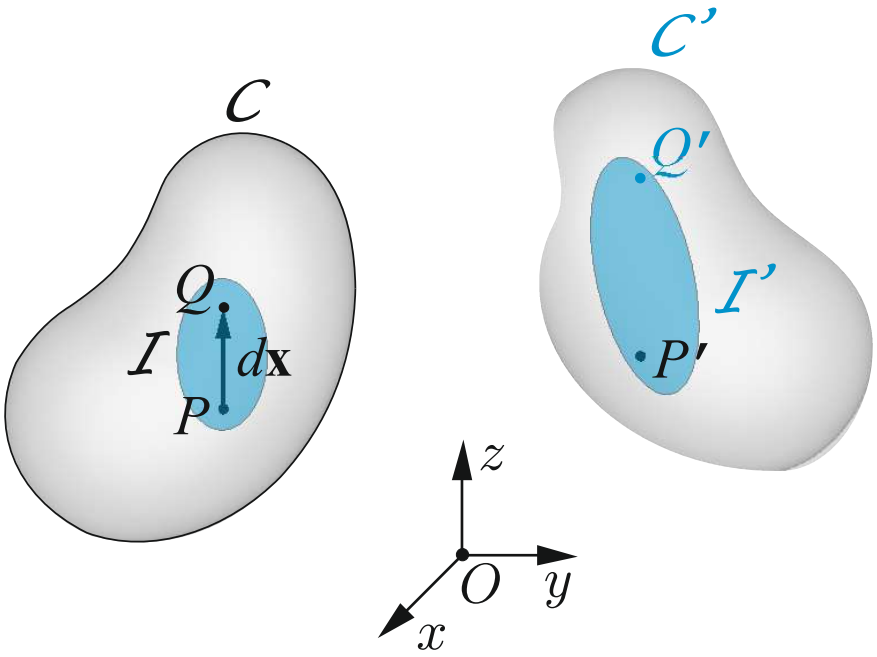
$u(x,y,z)$ → *componente x* $[L]$

$v(x,y,z)$ → *componente y* $[L]$

$w(x,y,z)$ → *componente z* $[L]$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di P



$$P \equiv (x, y, z)$$

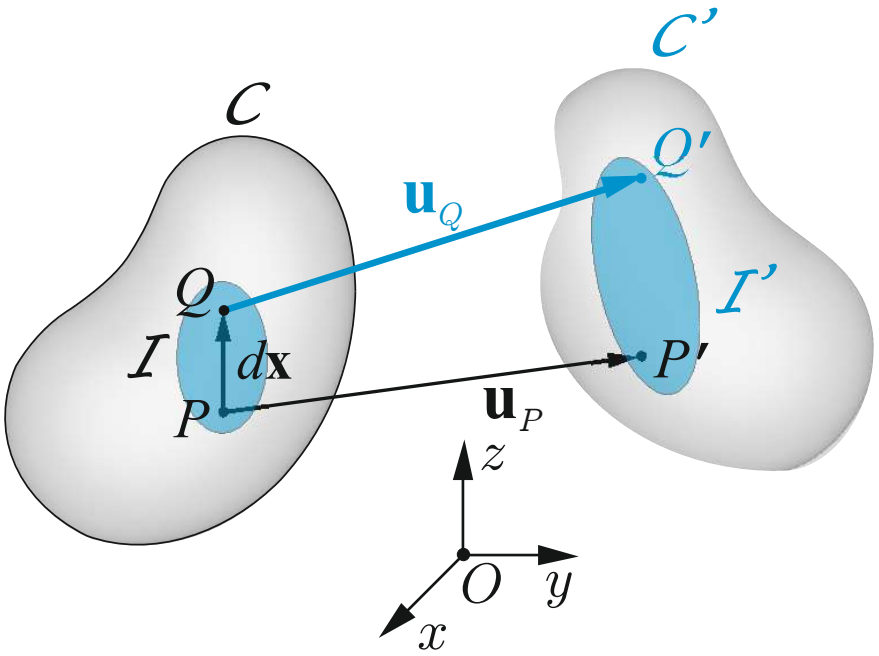
$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

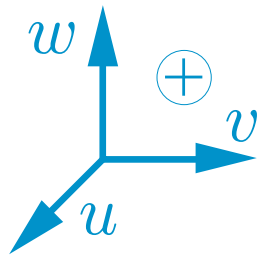
Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di P



$$\mathbf{u_P} = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{u_Q} = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

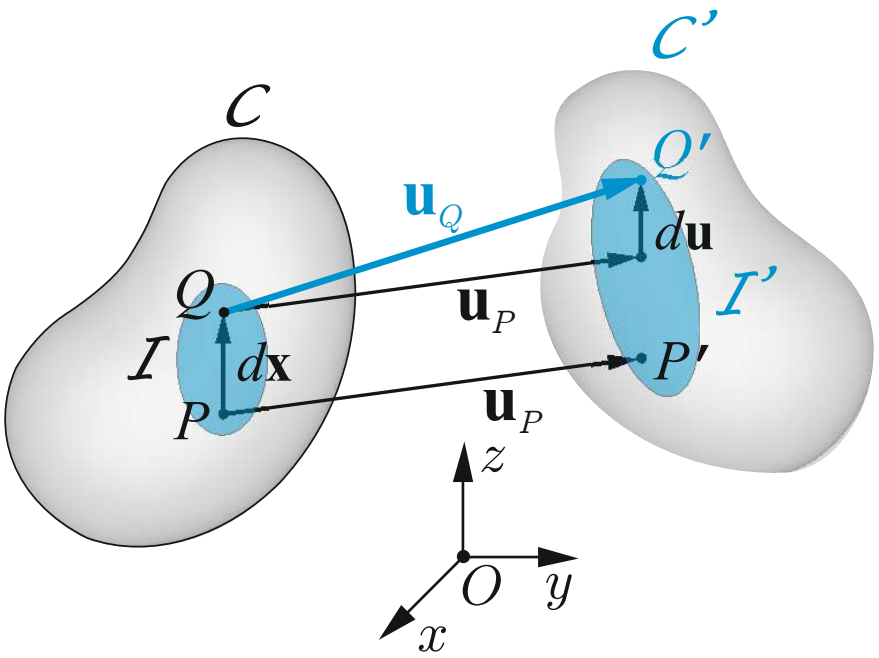
$$P \equiv (x, y, z)$$
$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$
$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di P



$$\mathbf{u_P} = u(P)\mathbf{i} + v(P)\mathbf{j} + w(P)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u_Q} = u(Q)\mathbf{i} + v(Q)\mathbf{j} + w(Q)\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{u_Q} = \mathbf{u_P} + d\mathbf{u}}$$

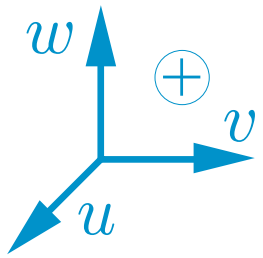
$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$P \equiv (x, y, z)$$

$$Q \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad d\mathbf{u} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di P

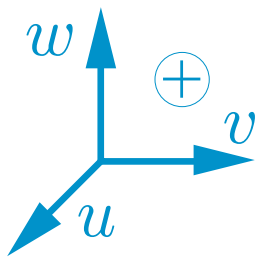
$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u}$$

$$d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$



$u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$

$w(x,y,z)$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Analisi della deformazione dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ di P

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u} \qquad d\mathbf{u} = du\mathbf{i} + dv\mathbf{j} + dw\mathbf{k}$$

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

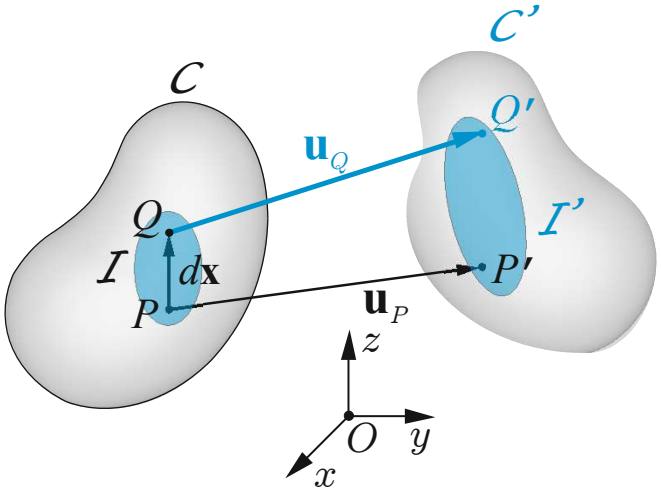
$$d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Tensore gradiente dello spostamento $\boldsymbol{F}(P)$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + d\mathbf{u} \qquad d\mathbf{u} = \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F}(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \mathbf{u}(P)$$



$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Decomposizione del tensore $\boldsymbol{F}(P)$

$$\mathbf{F}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} + \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T}{2}, \qquad \boldsymbol{\Omega} \in skw$$

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{F}^T}{2} = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2}, \qquad \mathbf{E} \in symm$$

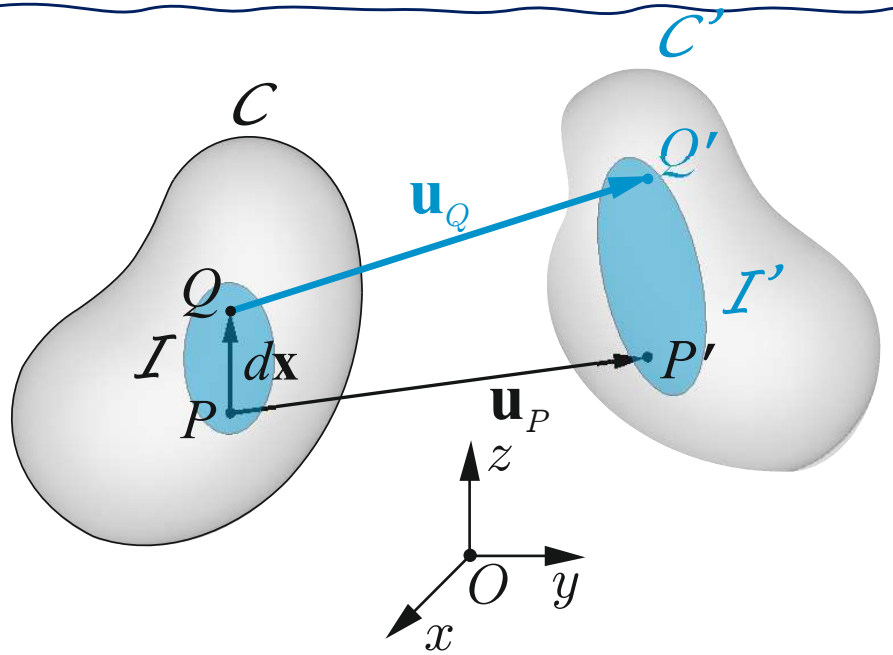
1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Decomposizione dello spostamento

$$\mathbf{F}(P) = \boldsymbol{\Omega}(P) + \mathbf{E}(P)$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \mathbf{F}(P)d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega}(P)d\mathbf{x} + \mathbf{E}(P)d\mathbf{x}$$



$$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione del tensore emisimmetrico $\boldsymbol{\Omega}$
tensore della rotazione rigida $\boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{x} + \mathbf{E} d\mathbf{x}$$

Cosa accade se $\mathbf{E} = \mathbf{0}$?

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{x}$$

$d\mathbf{x} = \mathbf{PQ}$

$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$

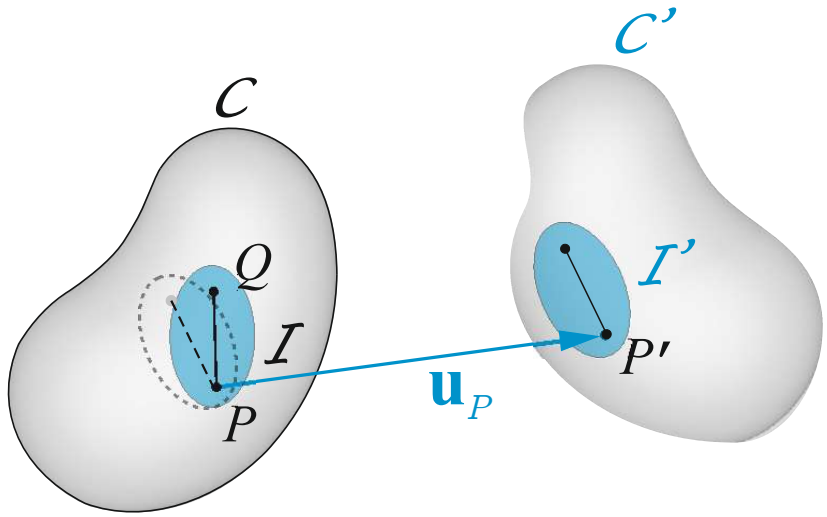
FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{OP}$

$\boldsymbol{\Omega}_R = -\boldsymbol{\Omega}_R^T$

se $E = 0$, ogni punto Q dell'intorno infinitesimo $\mathcal{I}$ obbedisce alla FGSR con polo di riduzione P. L'intorno $\mathcal{I}$ si sposta come un elemento rigido



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione del tensore emisimmetrico $\boldsymbol{\Omega}$
tensore della rotazione rigida $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Omega}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{\Omega}(P)^T$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione del tensore simmetrico $\mathbf{E}$
tensore della deformazione $\mathbf{E}$

Solo se $\mathbf{E}(P) \neq \mathbf{0}$, l'intorno $\mathcal{I}$ cambia forma e/o dimensione

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{E}(P)^T$$

Notazione convenzionale delle componenti (misure di deformazione)

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z,$

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$

$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$

ε_i Dilatazioni assiali

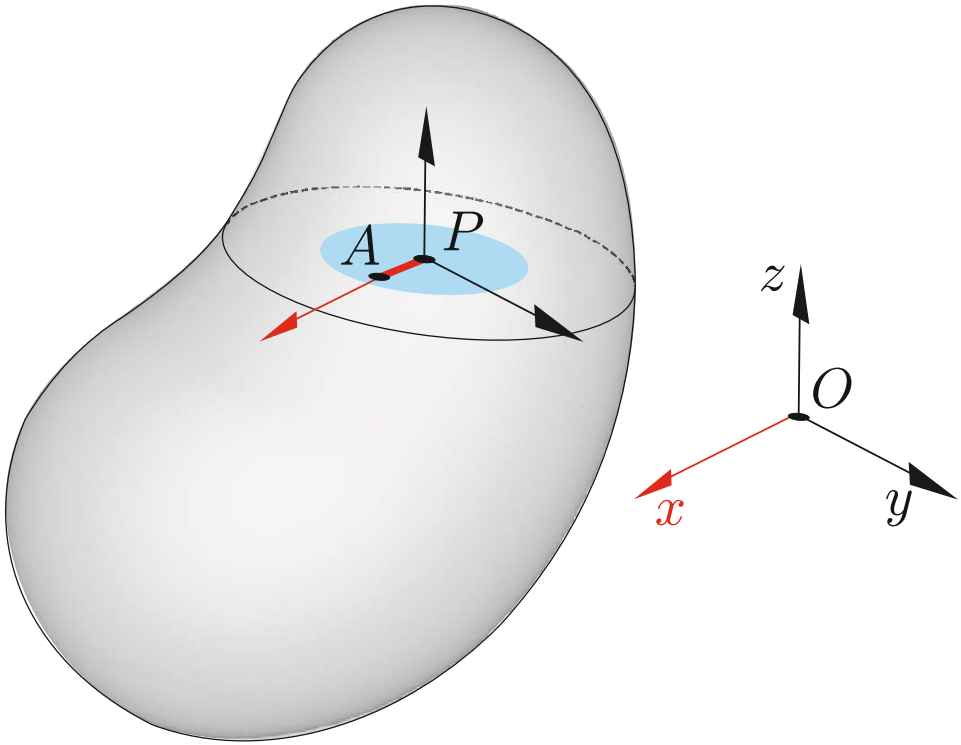
γ_{ij} Scorrimenti angolari

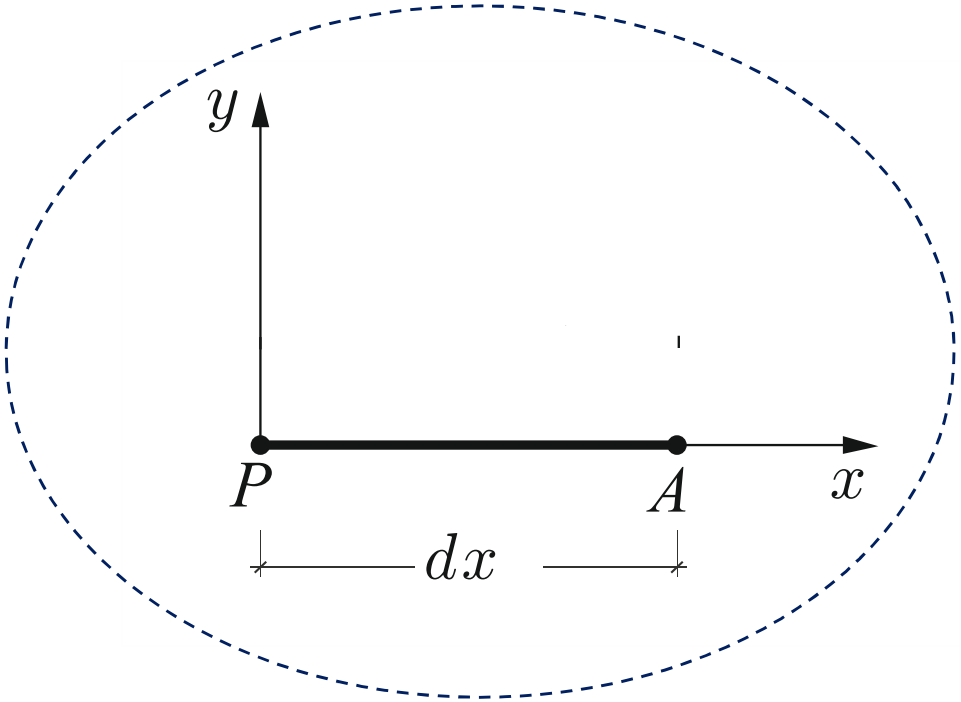
Grandezze adimensionali [0]

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale

Dilatazioni assiali ε_i





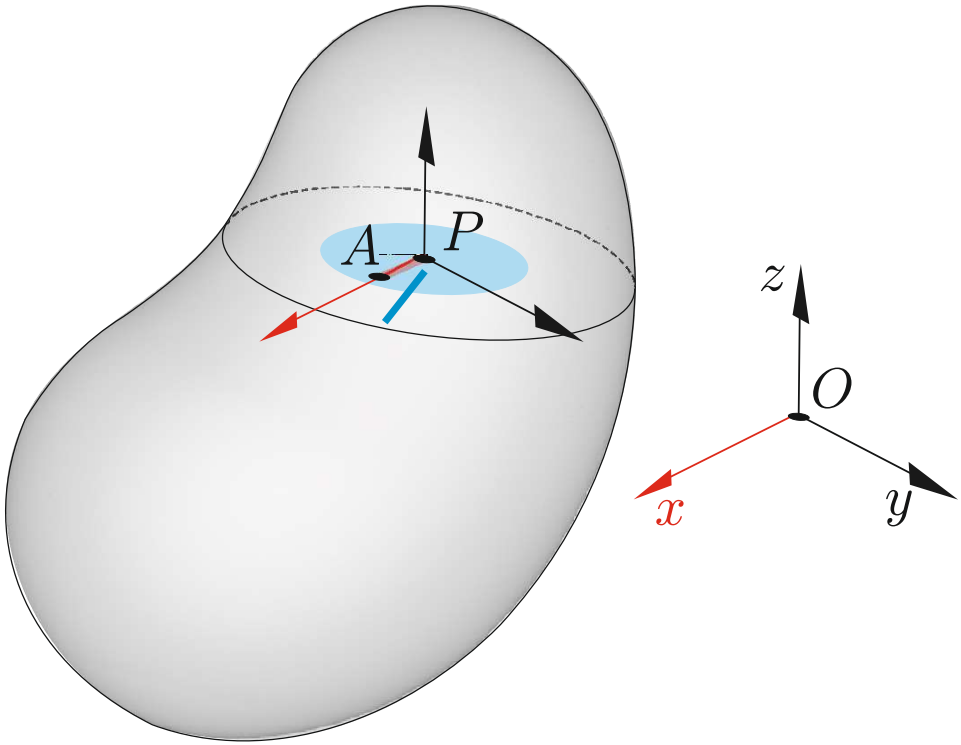
$P \equiv (x, y, z)$

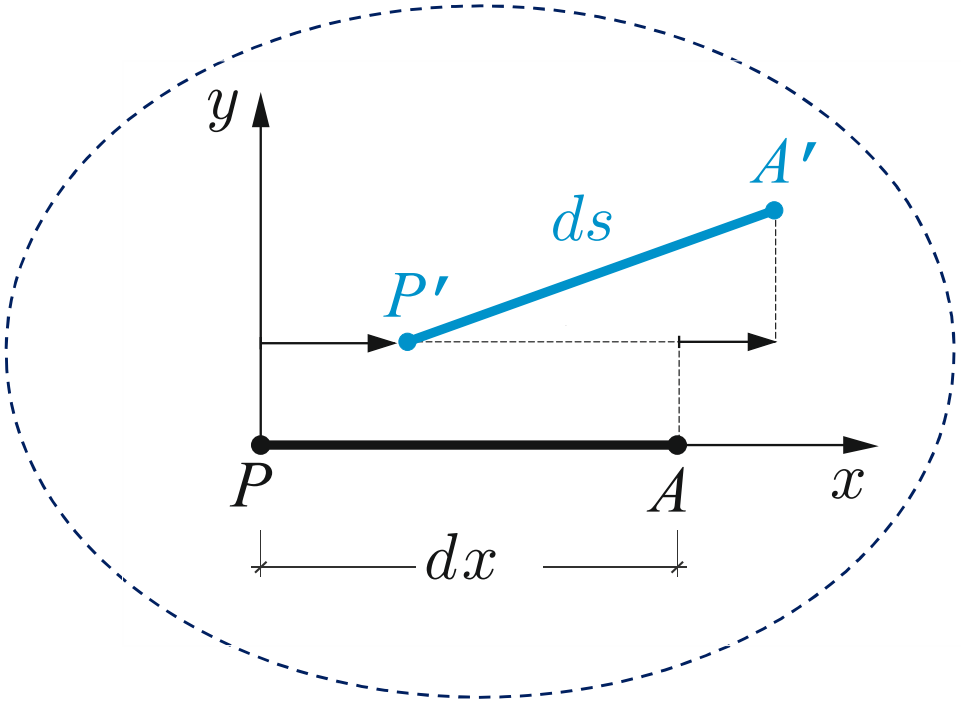
$A \equiv (x + dx, y, z)$

$\mathbf{PA} = dx\mathbf{i}$ *fibra parallela all'asse* x

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti sulla diagonale
Dilatazioni assiali ε_i





$P \equiv (x, y, z)$

$A \equiv (x + dx, y, z)$

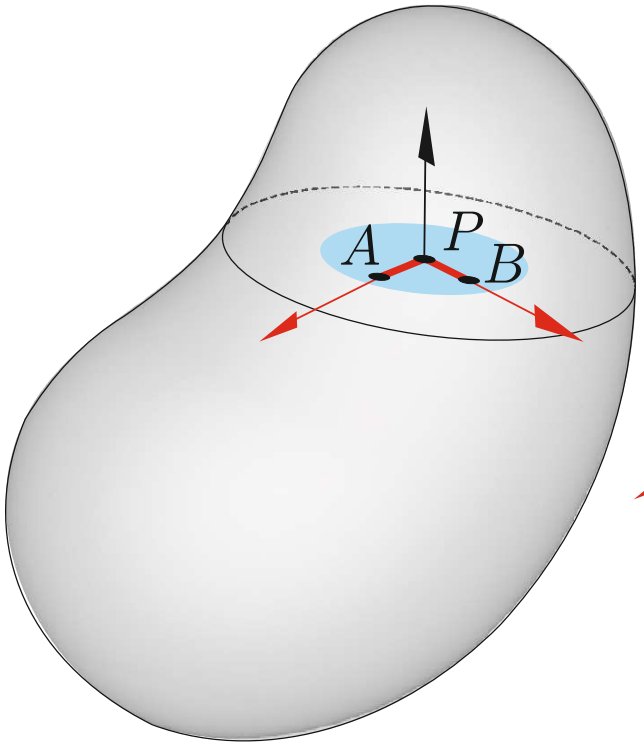
$\mathbf{PA} = dx\mathbf{i}$ *fibra parallela all'asse* x

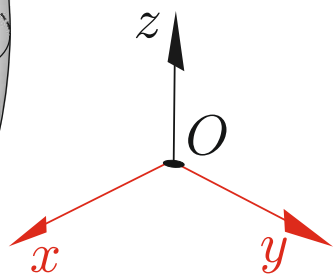
$$\frac{ds - dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

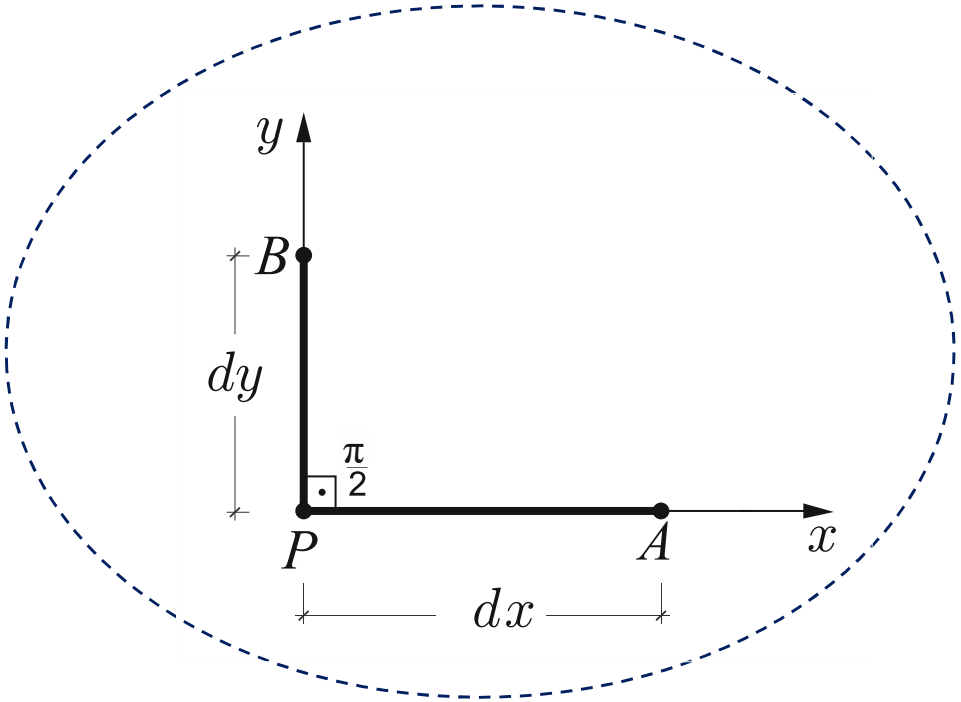
Variazione percentuale di lunghezza della fibra: ε_x

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale
Scorrimenti angolari γ_{ij}







$P \equiv (x, y, z)$

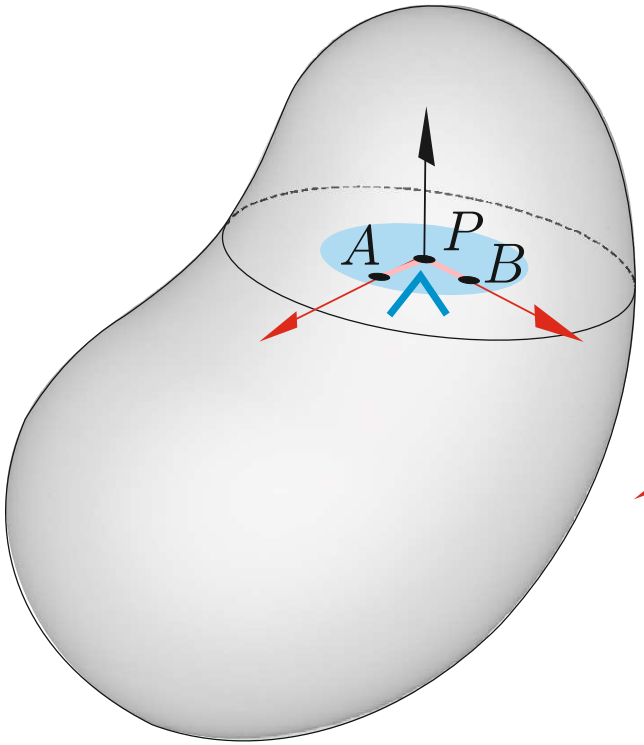
$A \equiv (x + dx, y, z)$

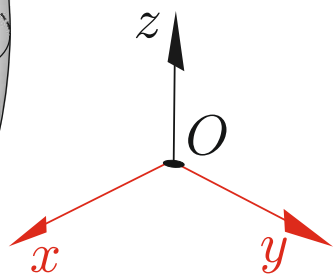
$B \equiv (x, y + dy, z)$

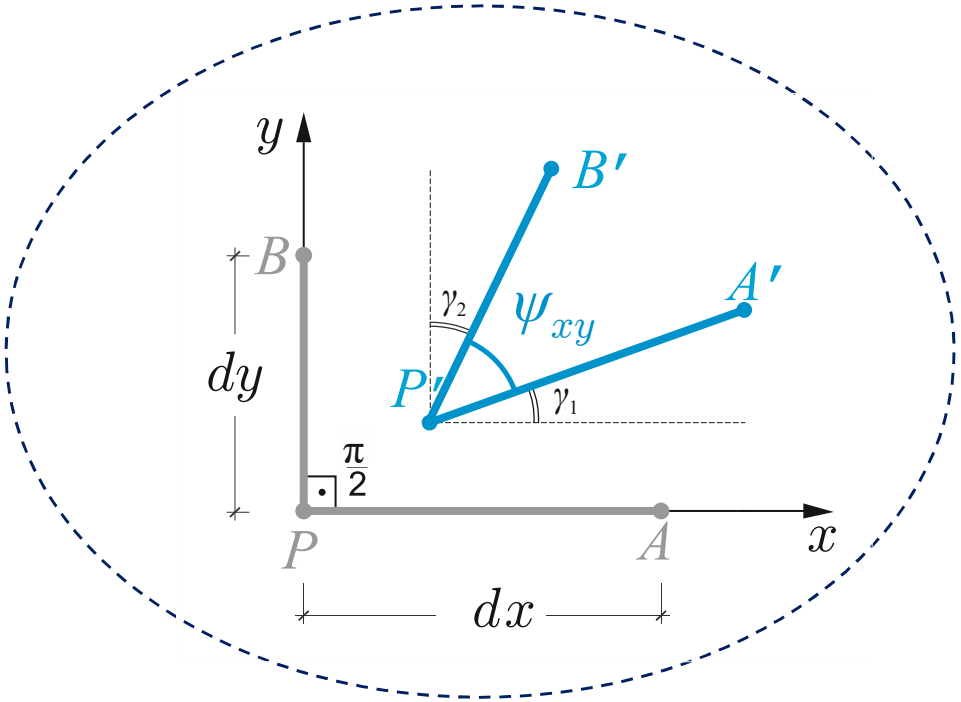
$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j}$ *fibra parallela all'asse* y

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle componenti fuori diagonale
Scorrimenti angolari γ_{ij}







$$P \equiv (x, y, z)$$

$$A \equiv (x + dx, y, z)$$

$$B \equiv (x, y + dy, z)$$

$\mathbf{PB} = dy\mathbf{j}$ *fibra parallela all'asse* y

$$\frac{\pi}{2} - \psi_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Variazione dell'angolo fra due fibre parallele agli assi x *e* y

1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Interpretazione meccanica delle misure di deformazione

Dilatazioni assiali $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_x$ (variazioni di dimensione)

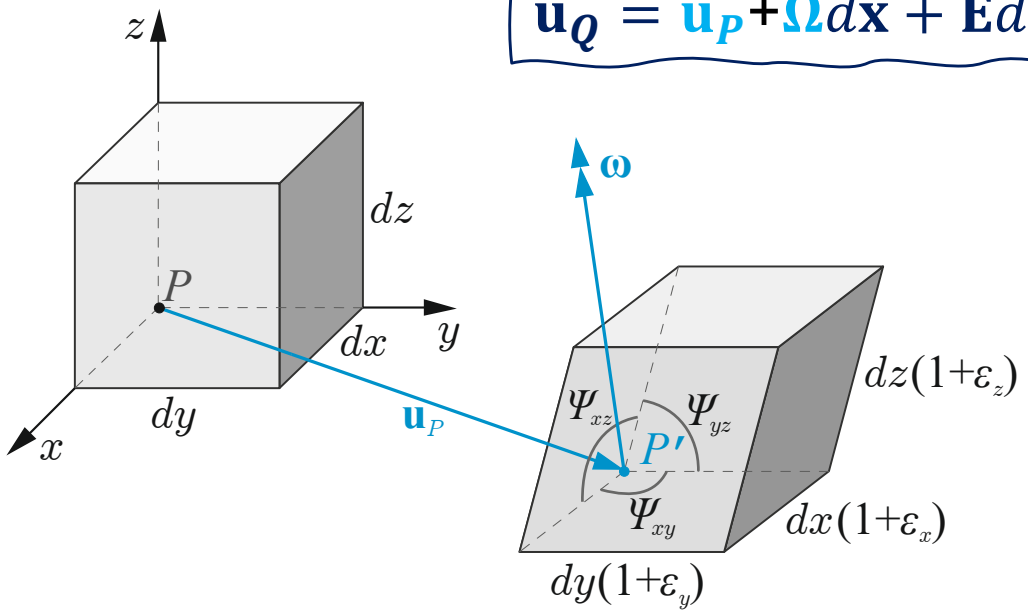
rappresentano le dilatazioni assiali delle fibre poste secondo le direzioni x, y e z rispettivamente

Scorrimenti angolari $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (variazioni di forma)

rappresentano le variazioni angolari delle fibre disposte, prima della deformazione, secondo le direzioni (x, y), $(x, z,)$ e (y, z), rispettivamente

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Omega} d\mathbf{x} + \mathbf{E} d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



1. Cinematica del continuo 3D : deformazione

Tensore della deformazione

$\mathbf{E}(P) \rightarrow$ *dipende solo dal posto* P

$\mathbf{E}(P) \in symm \rightarrow$ *è simmetrico:* $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}^T(P)$

Essendo $E_{ij} = E_{ji}$*, le componenti indipendenti sono 6 e sono funzioni scalari di tre variabili (grandezze adimensionali,* $[E_{ij}] = [0]$*)*

Ruotando il sistema di riferimento cambiano anche le componenti del tensore ma non variano le seguenti tre funzioni:

$$J_1 = \mathrm{Tr}(\mathbf{E}) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy} + \gamma_{yz} + \gamma_{xz}\right)^2$$

$$J_3 = \det(\mathbf{E})$$

→ *Invarianti della deformazione*

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(P) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

Forma scalare

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad +c.c.$$

Forma compatta

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

1. Cinematica del continuo 3D : equazioni implicite di congruenza

Forma compatta

Incognite cinematiche

$\mathbf{u}(P), \mathbf{E}(P)$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T}{2} \qquad P \in \mathcal{C}$$

$$\mathbf{u}(P) = \bar{\mathbf{u}} \quad P \in S_u$$

Forma scalare

Incognite cinematiche

$u(P),\ v(P), w(P)$

$\varepsilon_x(P), \varepsilon_y(P), \varepsilon_z(P)$

$\gamma_{xy}(P), \gamma_{yz}(P), \gamma_{xz}(P)$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$