

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020





1. Cinematica del corpo rigido

- Obiettivi
- Spostamento rigido
 - traslazione
 - rotazione
 - rototraslazione
- Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- Il problema cinematico
- Classificazione cinematica
- Esercizi (sito: E01-E03, testo: §2.7-2.8)

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

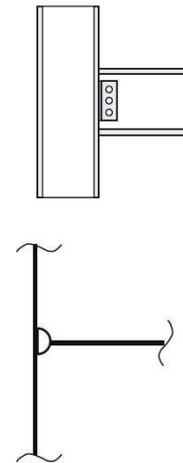
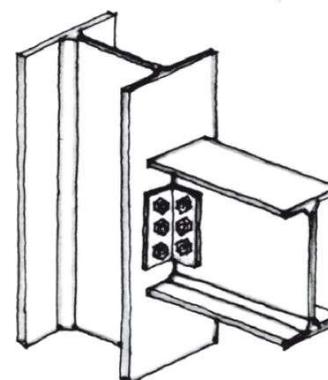
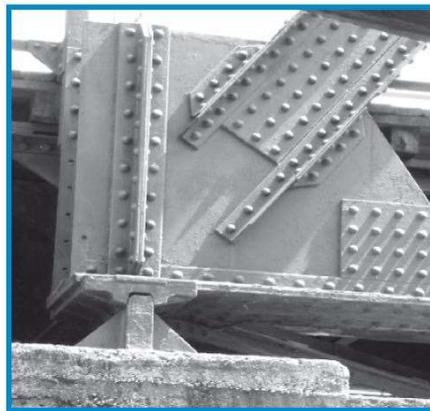
Definizioni. Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elementi fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due o più elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

Modello dei vincoli. I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida l'*ipotesi dei piccoli spostamenti*.

Prestazioni cinematiche. Dal punto di vista cinematico i vincoli pongono delle limitazioni agli spostamenti dei punti e/o alle rotazioni dei corpi cui sono applicati, riducendo il numero di gradi di libertà del sistema.



Vincoli esterni



Vincoli interni

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

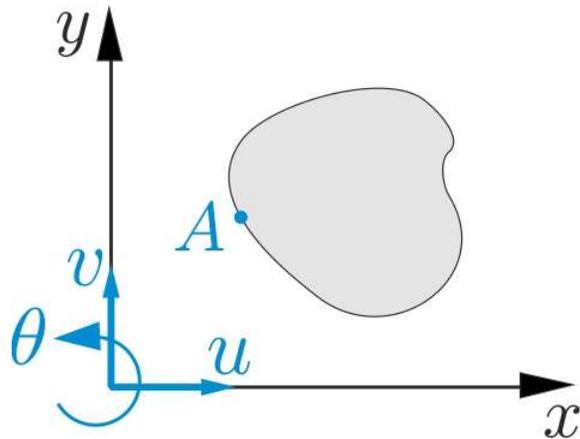
Molteplicità cinematica m . Analiticamente le prescrizioni cinematiche dei vincoli si traducono in equazioni algebriche lineari sugli spostamenti generalizzati: si definisce **molteplicità cinematica** del vincolo il numero m di equazioni scalari indipendenti che ne caratterizzano le prestazioni cinematiche.

Tipologie ideali di vincolo. In base al tipo di prescrizioni cinematiche e alla molteplicità m si possono distinguere diverse tipologie di vincolo (esterni o interni), ad esempio:

- Pendolo o biella, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Carrello, $m = 1$ (vincolo semplice)
- Cerniera, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Glifo o doppio pendolo, $m = 2$ (vincolo doppio)
- Incastro, $m = 3$ (vincolo triplo)

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



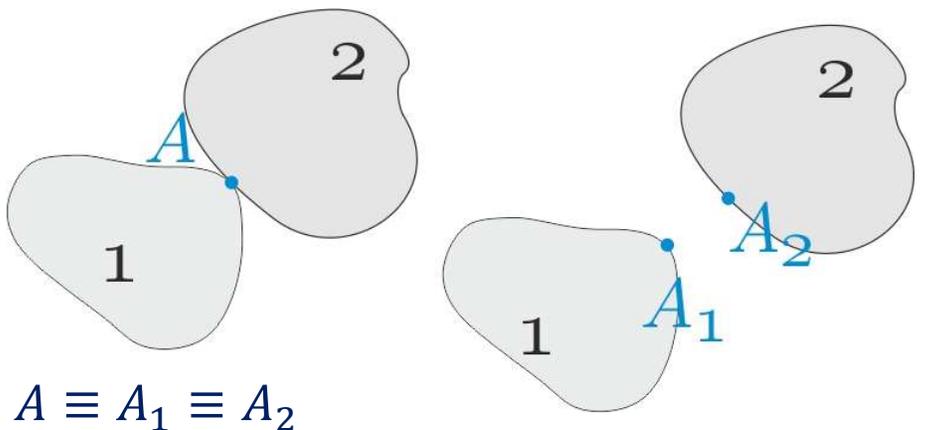
Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento \mathbf{u}_A del punto A in cui è applicato e alla rotazione θ del corpo:

Condizioni su \mathbf{u}_A e/o θ

Condizioni sugli scalari u_A e/o v_A e/o θ

Condizioni sul centro assoluto C_R

Vincoli interni fra due corpi



$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo $\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$ e alla rotazione relativa $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$:

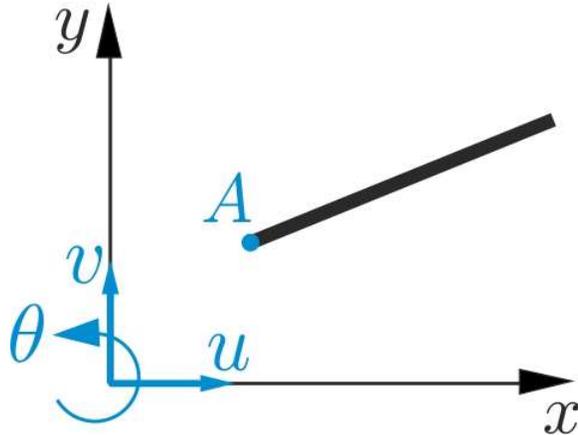
Condizioni su $\Delta \mathbf{u}_A$ e/o $\Delta \theta$

Condizioni sugli scalari Δu_A e/o Δv_A e/o $\Delta \theta$

Condizioni sul centro relativo C_{12}

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli esterni



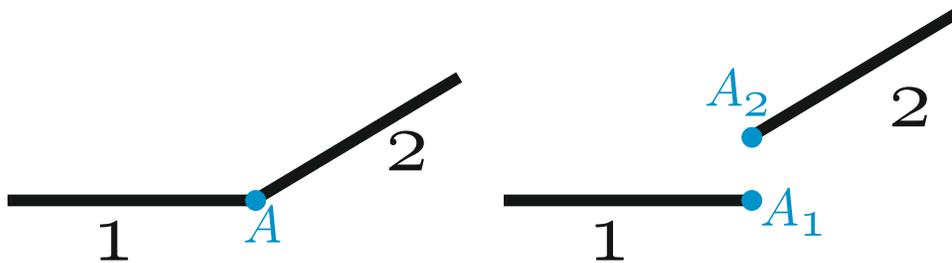
Un vincolo esterno applicato in un punto A del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento \mathbf{u}_A del punto A in cui è applicato e alla rotazione θ del corpo:

Condizioni su \mathbf{u}_A e/o θ

Condizioni sugli scalari u_A e/o v_A e/o θ

Condizioni sul centro assoluto C_R

Vincoli interni fra due travi



$$A \equiv A_1 \equiv A_2$$

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

Un vincolo interno applicato in un punto $A \equiv A_1 \equiv A_2$ di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo $\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$ e alla rotazione relativa $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$:

Condizioni su $\Delta \mathbf{u}_A$ e/o $\Delta \theta$

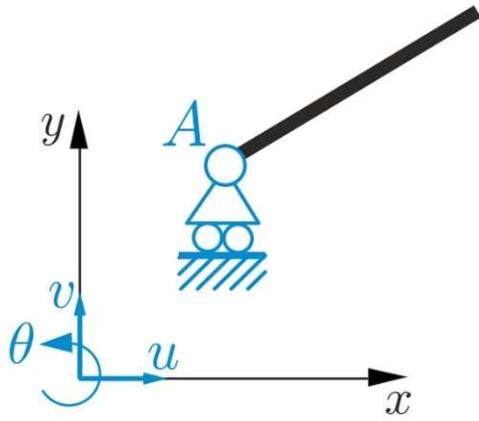
Condizioni sugli scalari Δu_A e/o Δv_A e/o $\Delta \theta$

Condizioni sul centro relativo C_{12}



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno

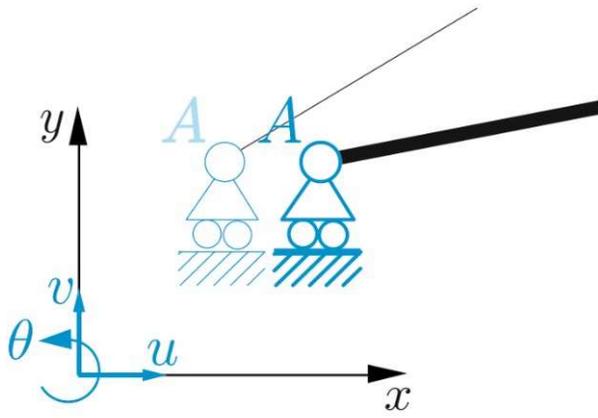


Carrello interno



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno

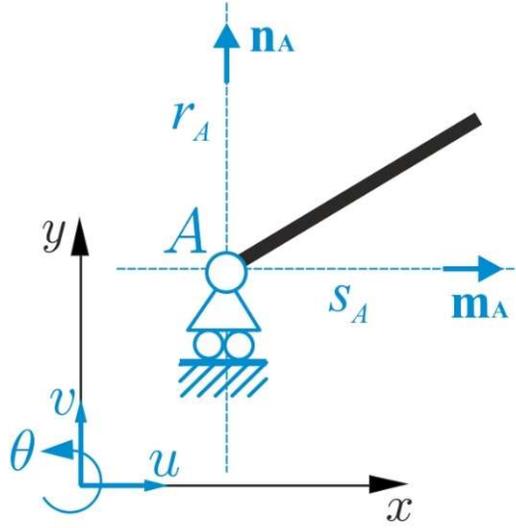


Carrello interno



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
 s_A asse di scorrimento

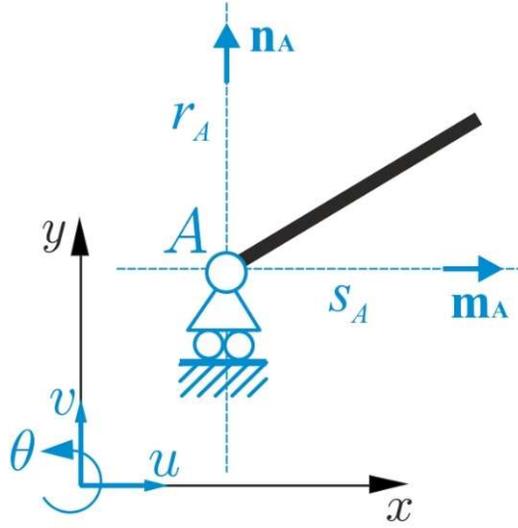
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
 s_A asse di scorrimento

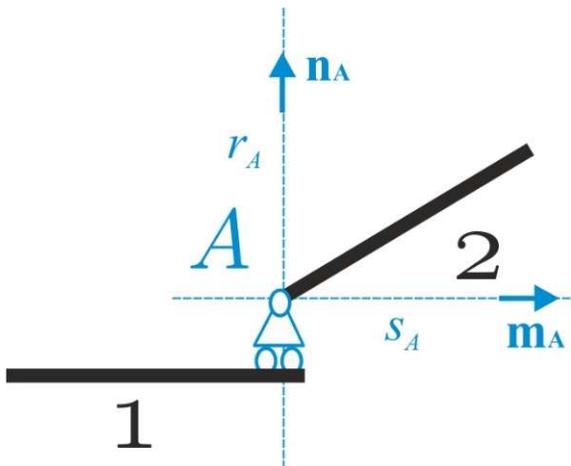
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

Carrello interno

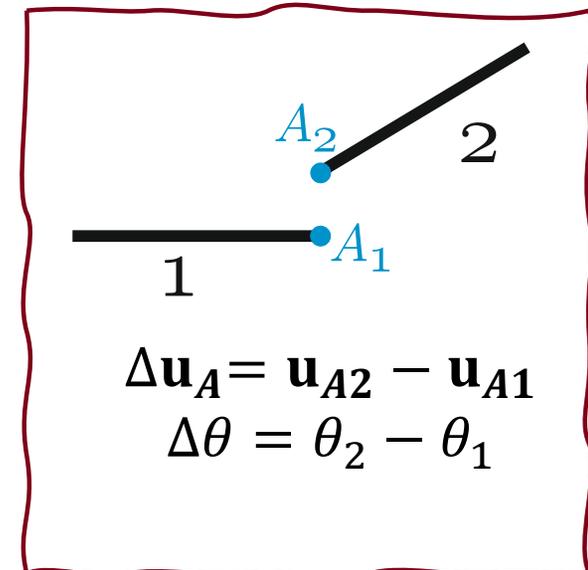


$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

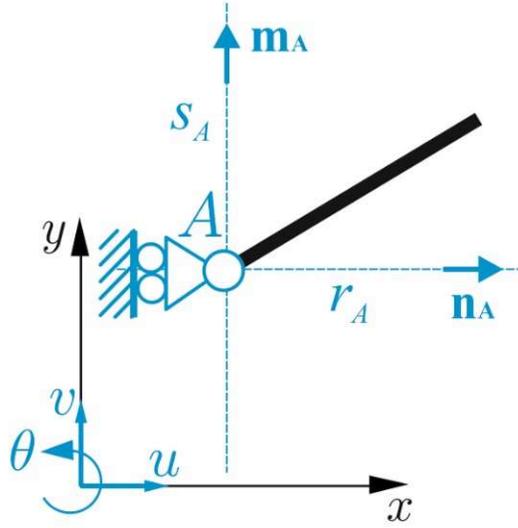
$$\Delta \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Carrello esterno



r_A asse del carrello
 s_A asse di scorrimento

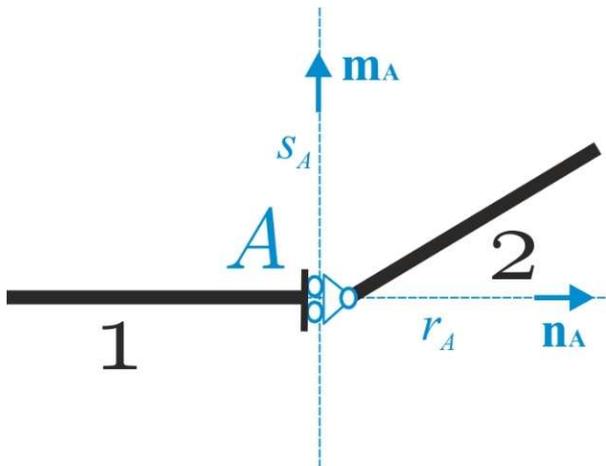
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

Carrello interno

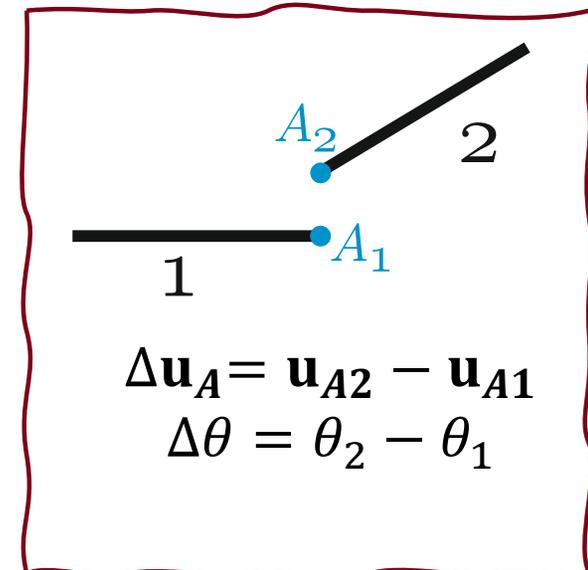


$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

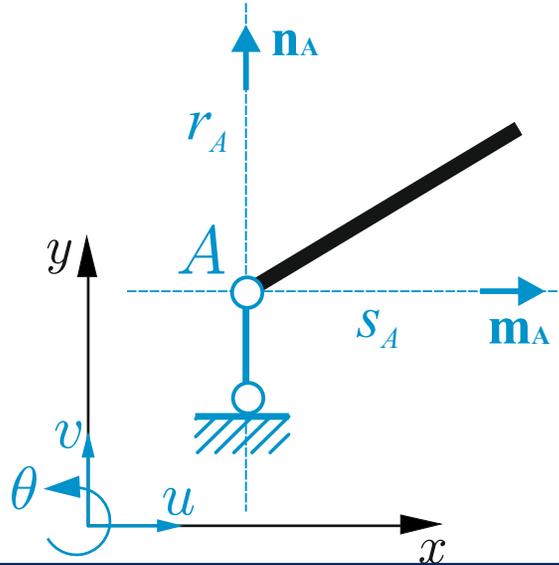
$$\Delta \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} \neq 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Pendolo (biella) esterno



r_A asse del pendolo
 s_A asse di scorrimento

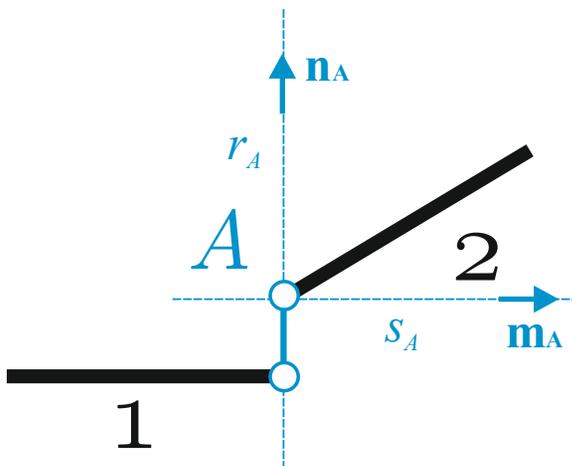
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

Pendolo (biella) interno

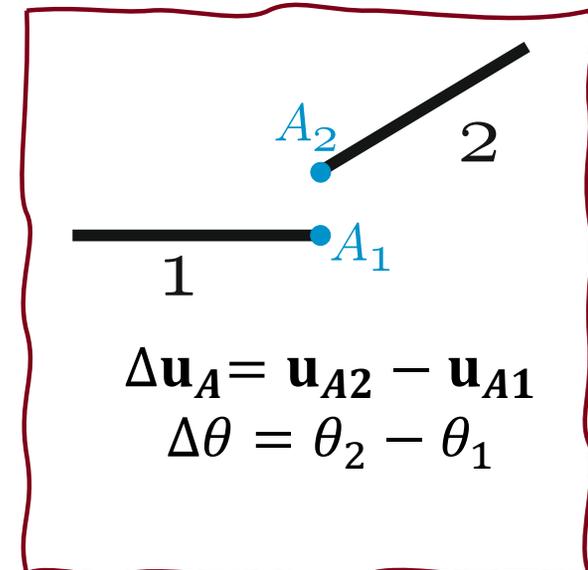


$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\Delta \theta \neq 0$$

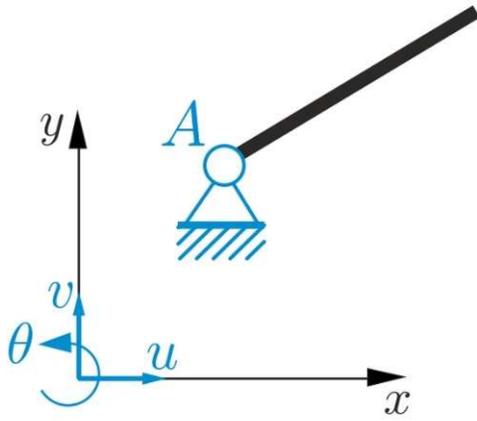
$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$





1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna

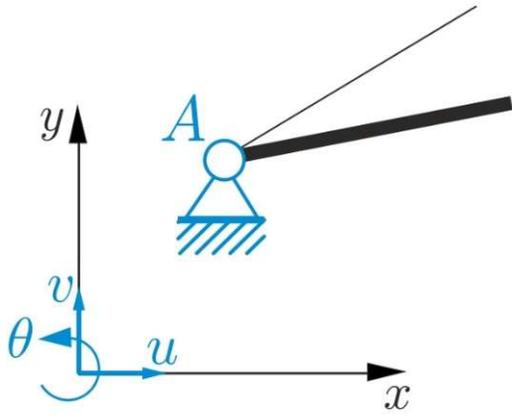


Cerniera interna



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

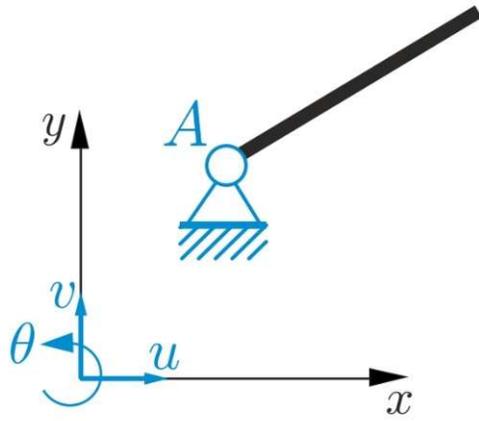
Cerniera esterna





1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna



*non ci sono direzioni
preferenziali*

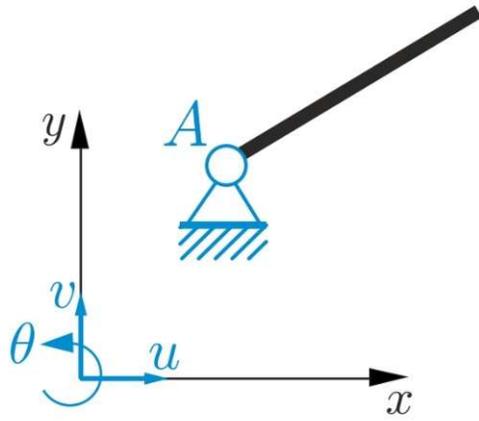
$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$
$$\theta \neq 0$$

$$C_R \equiv A$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$

1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cerniera esterna



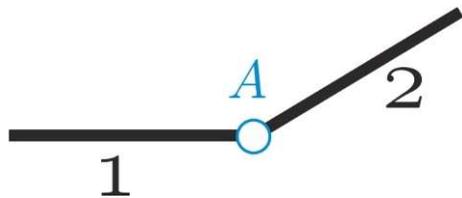
non ci sono direzioni preferenziali

$$C_R \equiv A$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \mathbf{0} \\ \theta &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$

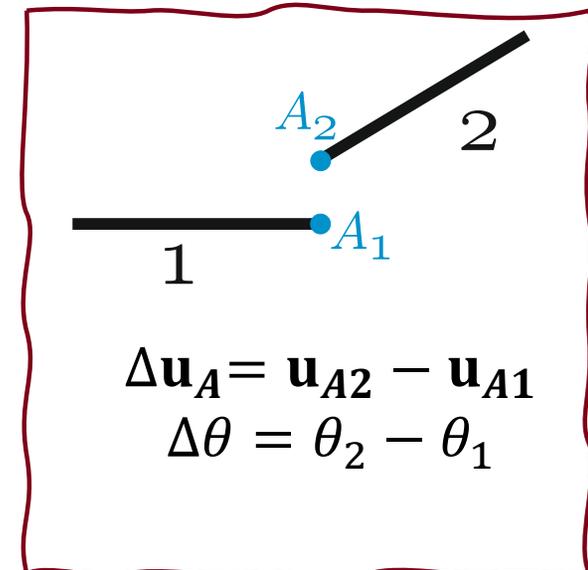
Cerniera interna



$$C_{12} = A$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_A &= \mathbf{0} \\ \Delta \theta &\neq 0 \end{aligned}$$

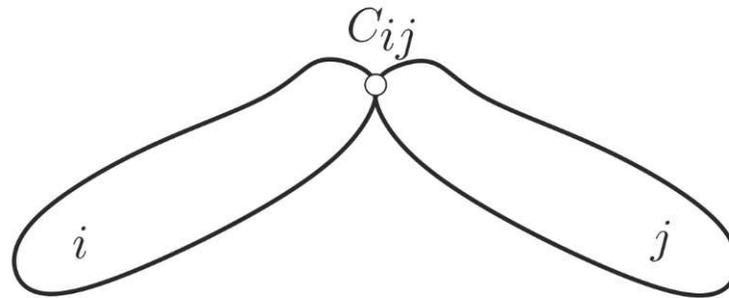
$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$





1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

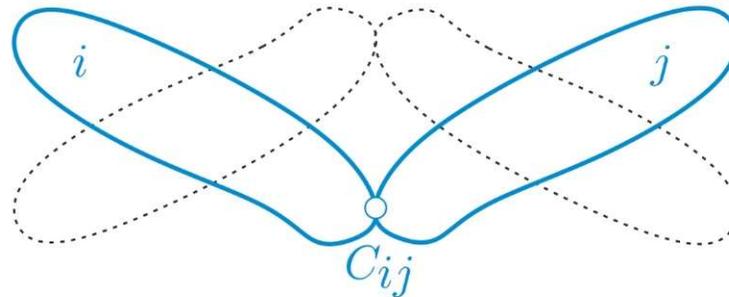
Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.





1. Cinematica del corpo rigido: FGSR (sistemi)

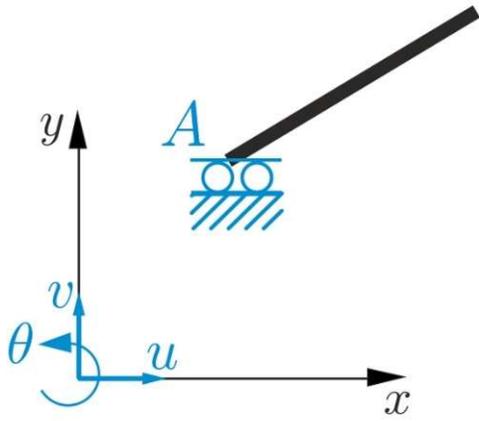
Sistemi di corpi rigidi, centro rotazione relativa. Presi due *corpi* i e j di un sistema si definisce centro di rotazione relativa o semplicemente *centro relativo* C_{ij} il punto attorno a cui un osservatore solidale al corpo i vede ruotare il corpo j o viceversa.





1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno

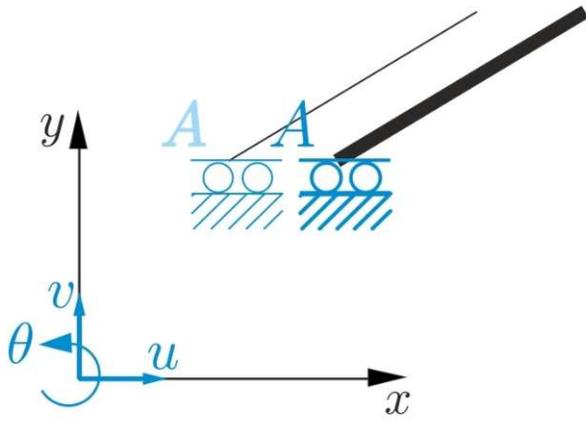


Glifo o doppio pendolo interno



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

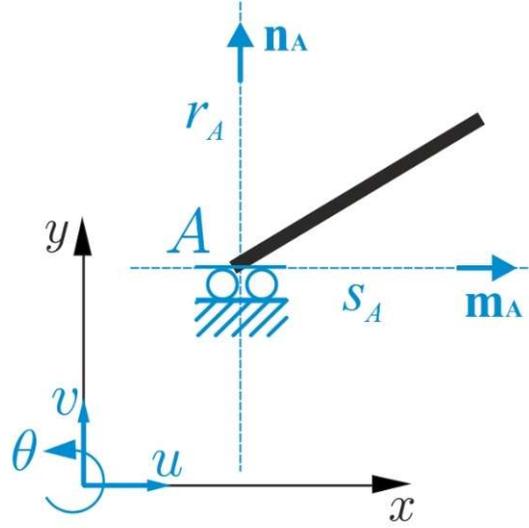
Glifo o doppio pendolo esterno





1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno

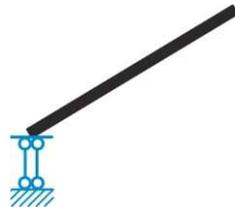


r_A asse del glifo
 s_A asse di scorrimento

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$
$$\theta = 0 \quad \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 2$$

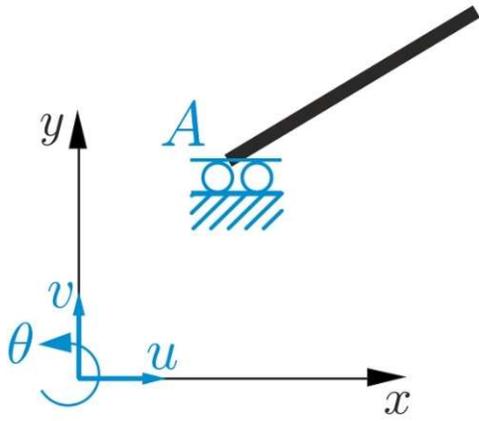


1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Glifo o doppio pendolo esterno

r_A asse del glifo
 s_A asse di scorrimento

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$



$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta = 0 \quad \theta = 0$$

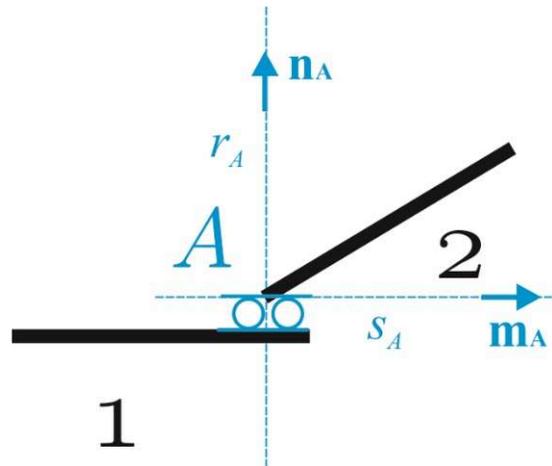
$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 2$$

Glifo o doppio pendolo interno

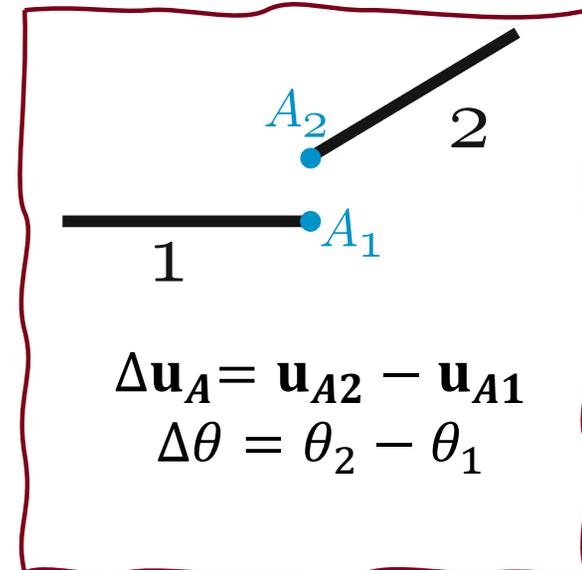
$$C_{12} \equiv C_{r\infty}$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\Delta \theta = 0$$



$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 2$$



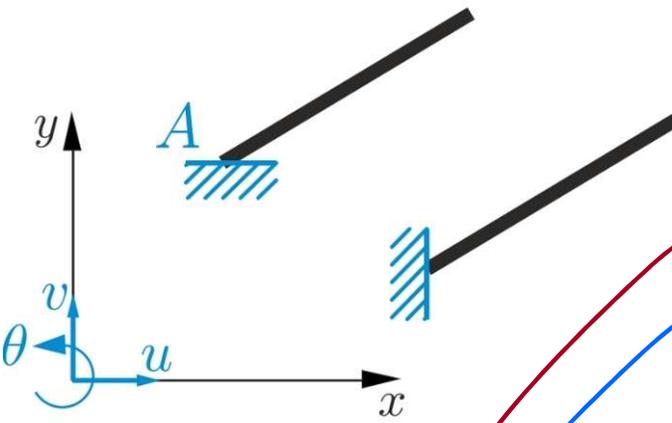


1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Incastro esterno

non ci sono direzioni preferenziali

C_R non esiste
Il corpo non può spostarsi



$$u_A = 0$$

$$\theta = 0$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

$$C_R \equiv A$$

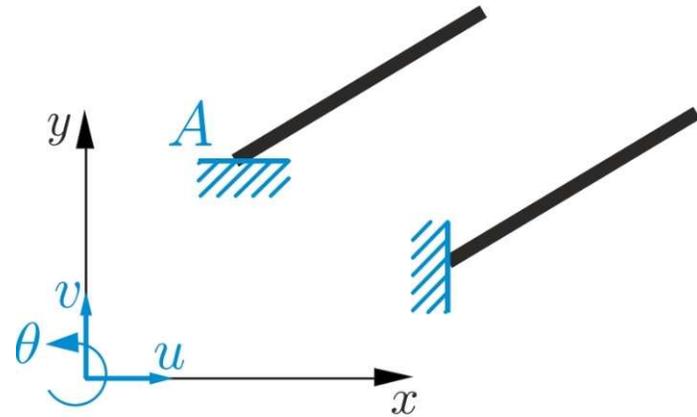
$$C_R \rightarrow \infty$$

Condizioni non compatibili: $C_R \nexists$



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Incastro esterno



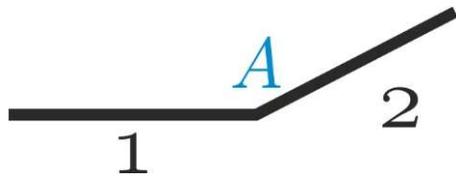
non ci sono direzioni preferenziali

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_A &= \mathbf{0} \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

C_R non esiste
Il corpo non può spostarsi

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

Incastro interno (vincolo di continuità)

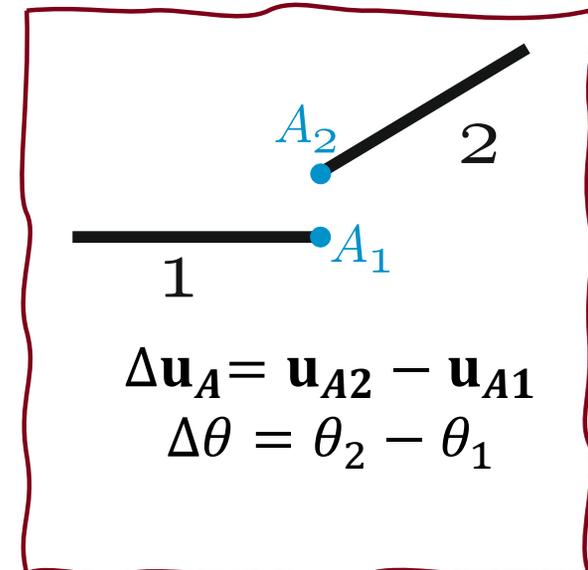


$$C_{12} \neq \emptyset$$

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

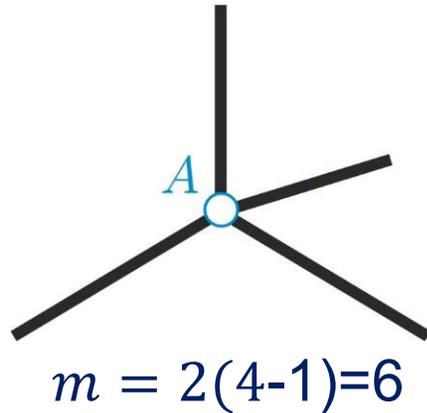
$$\Delta \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 3$$



1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Vincoli interni che connettono più di due corpi

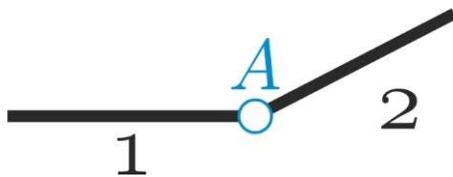


Molteplicità

$$m = n_V(n_C - 1)$$

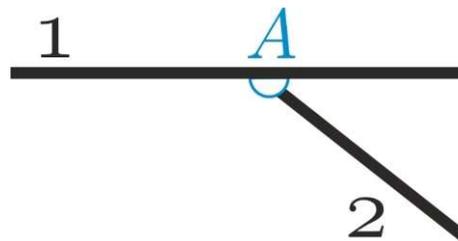
Rappresentazione grafica

$m = 2$



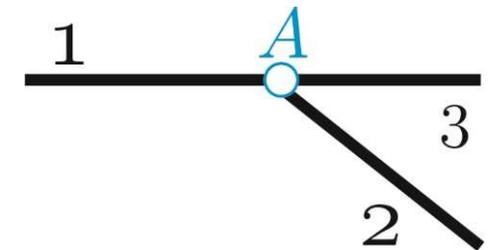
*Cerniera che collega
due travi alle estremità*

$m = 2$



*Cerniera che collega
due travi non alle estremità*

$m = 4$

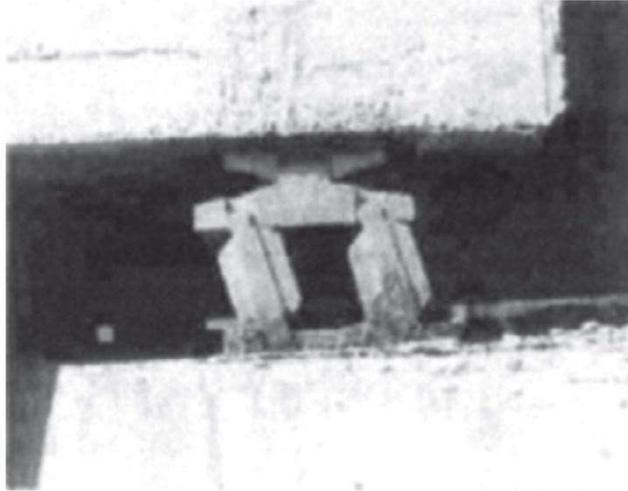


*Cerniera che collega
tre travi alle estremità*

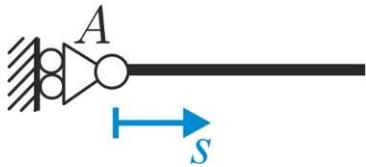


1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

Cedimenti vincolari

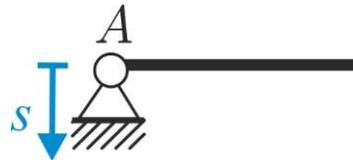


Modello: esempi



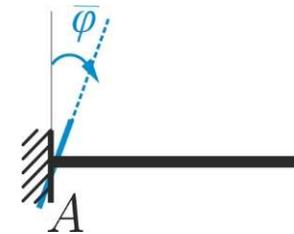
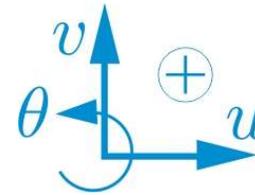
Cedimento carrello

$$\begin{cases} u_A = s \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



Cedimento cerniera

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = -s \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



Cedimento angolare incastro

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = -\bar{\varphi} \end{cases}$$

1. Cinematica del corpo rigido: FGSR

FGSR per spostamenti piani: *riepilogo*

FGSR in forma vettoriale

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{OP}$$

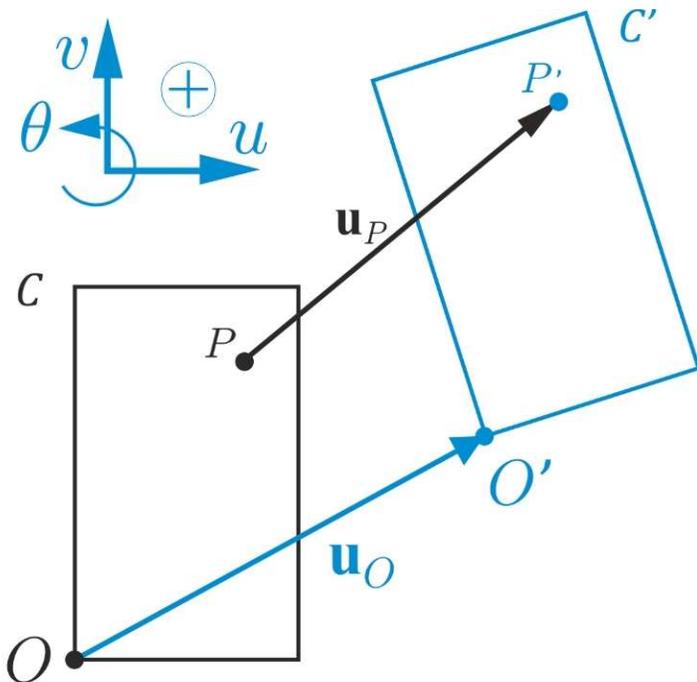
FGSR in forma scalare

$$\begin{cases} u = u_O - \theta y \\ v = v_O + \theta x \end{cases}$$

(origine coincidente con il polo)

FGSR in forma matriciale

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\Omega}_R \mathbf{x}$$



Vettore spostamenti
generalizzati

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_O \\ v_O \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

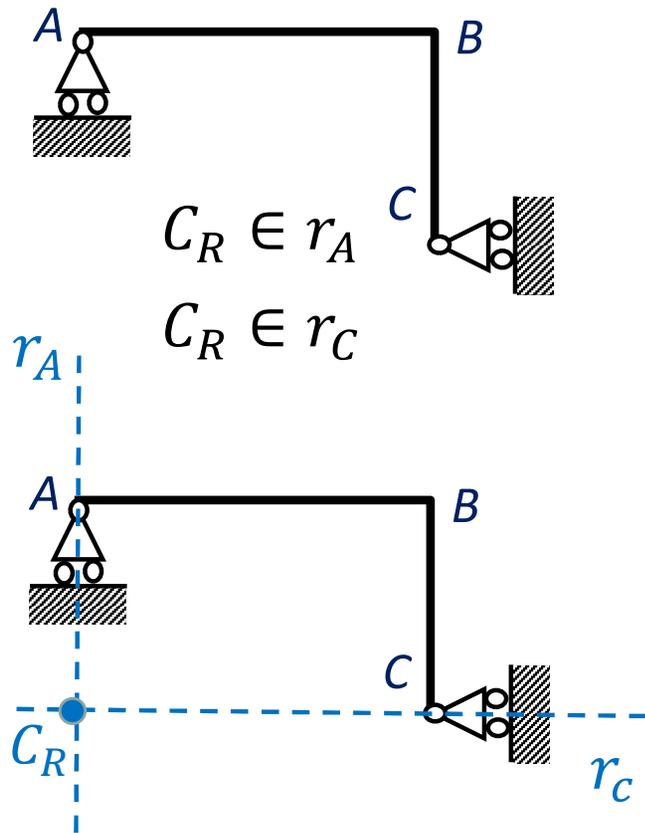
Numero di g.d.l.: $n = 3$

Ogni generico spostamento piano (infinitesimo) è riconducibile ad una rotazione rigida intorno ad un punto C_R detto centro assoluto di rotazione

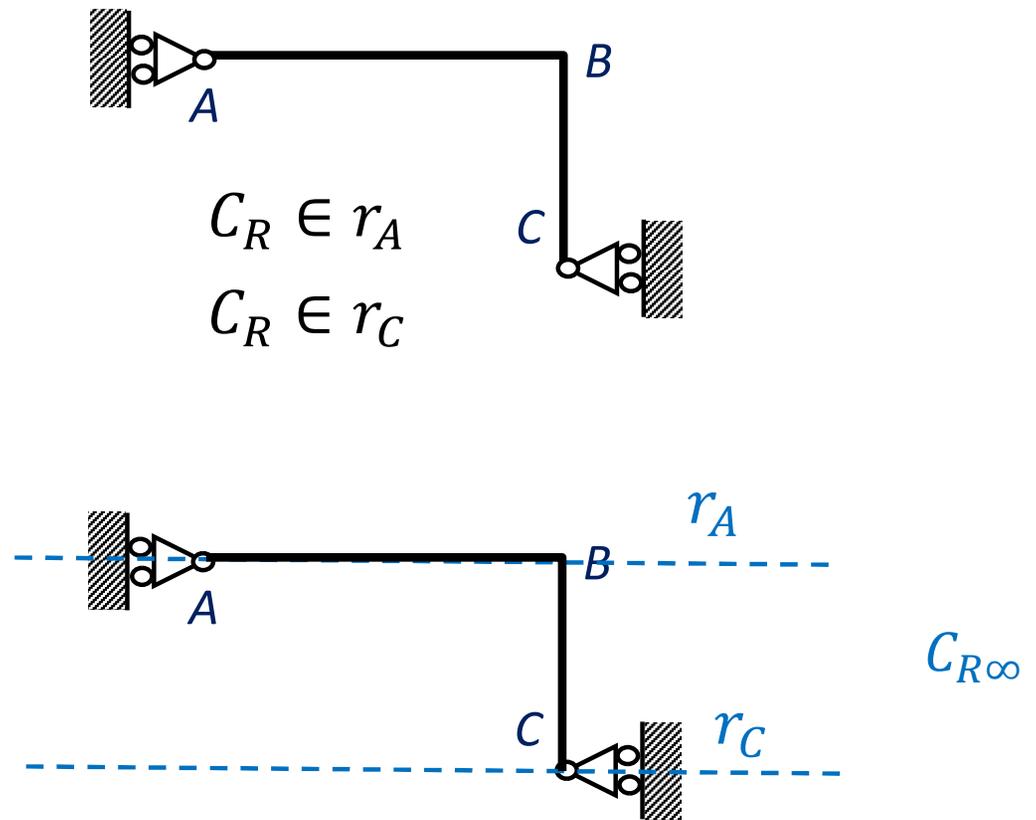
1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:

trovare, se esiste, il centro di rotazione nei seguenti corpi rigidi vincolati



Cerniera ideale

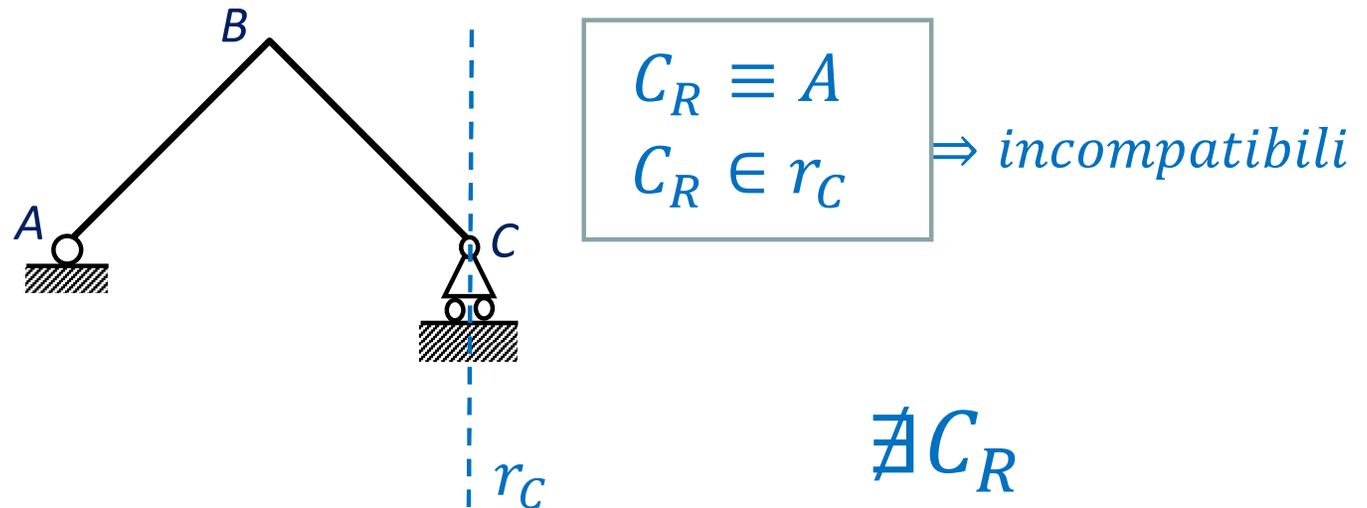


Glifo ideale

1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:

trovare, se esiste, il centro di rotazione nel seguente corpo rigido vincolato

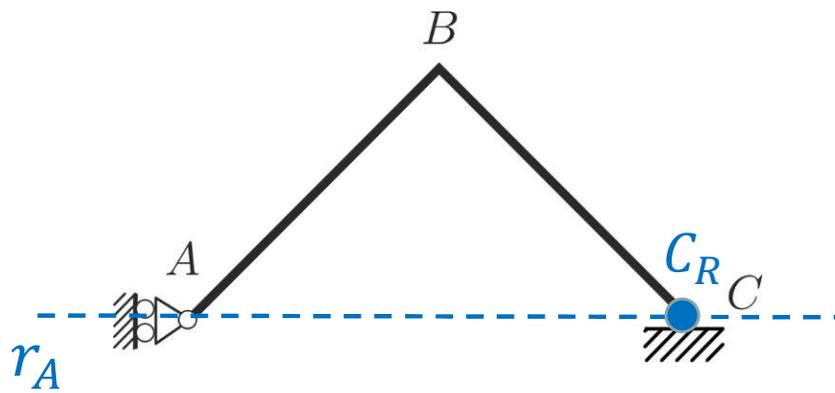


Trave semplicemente appoggiata (non sono possibili spostamenti compatibili con i vincoli)

1. Cinematica del corpo rigido

Esercizio:

trovare, se esiste, il centro di rotazione nel seguente corpo rigido vincolato



$$\begin{array}{l} C_R \in r_A \\ C_R \equiv C \end{array} \Rightarrow \text{compatibili}$$

$\exists C_R$

Trave appoggiata degenera (sono possibili spostamenti compatibili con i vincoli)