

*Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza*

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

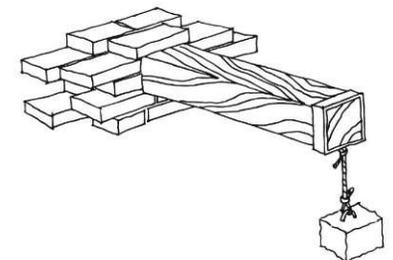
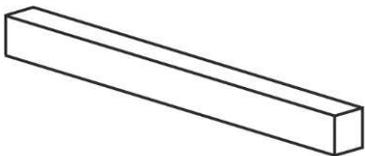


SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA



Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- **Statica della trave**
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





Parte II - Il modello di trave elastica 1D

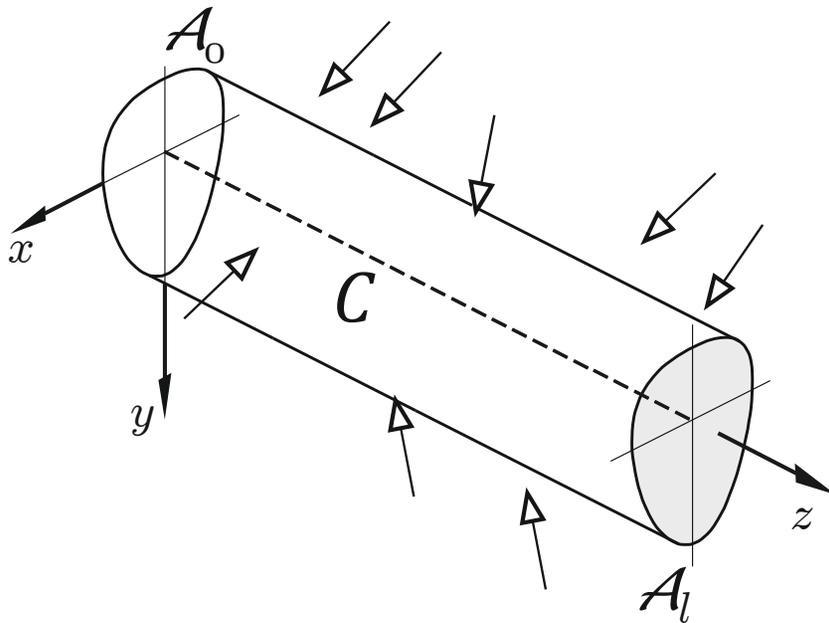
2. Statica della trave

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze interne**
 - definizioni
 - caratteristiche della sollecitazione (CdS)
 - convenzioni
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Problema statico**
- **Leggi e diagrammi delle CdS**
- **Esercizi** (sito: E11-E13, testo: §6.7-6.9)

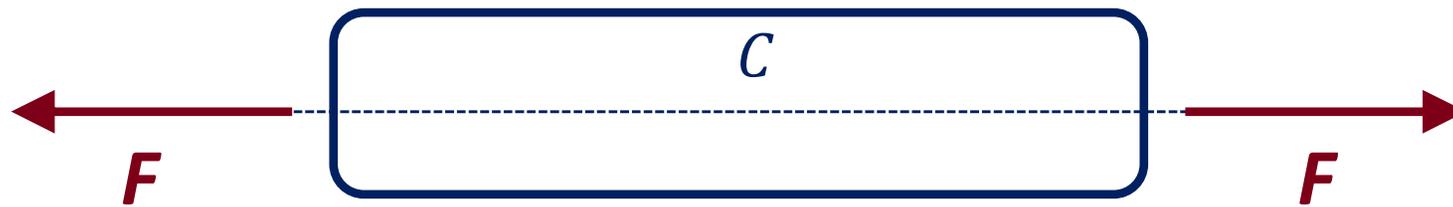
2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle forze esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

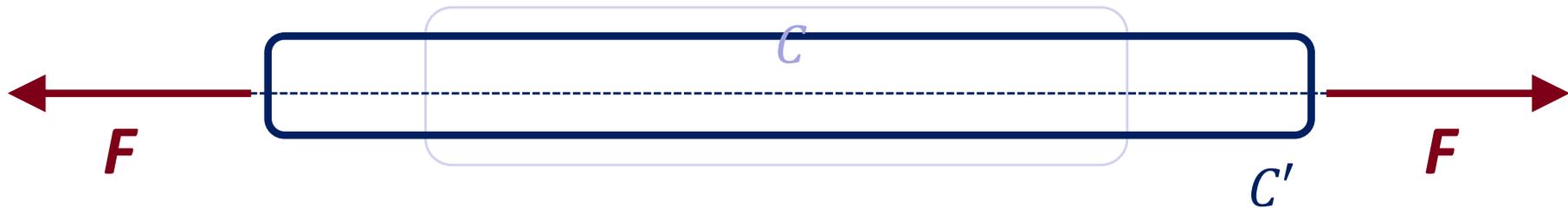


$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$



Osservazione

*Se il corpo è deformabile la condizione che il sistema delle forze esterne sia nullo in genere è necessaria ma **non sufficiente** per l'equilibrio del corpo*

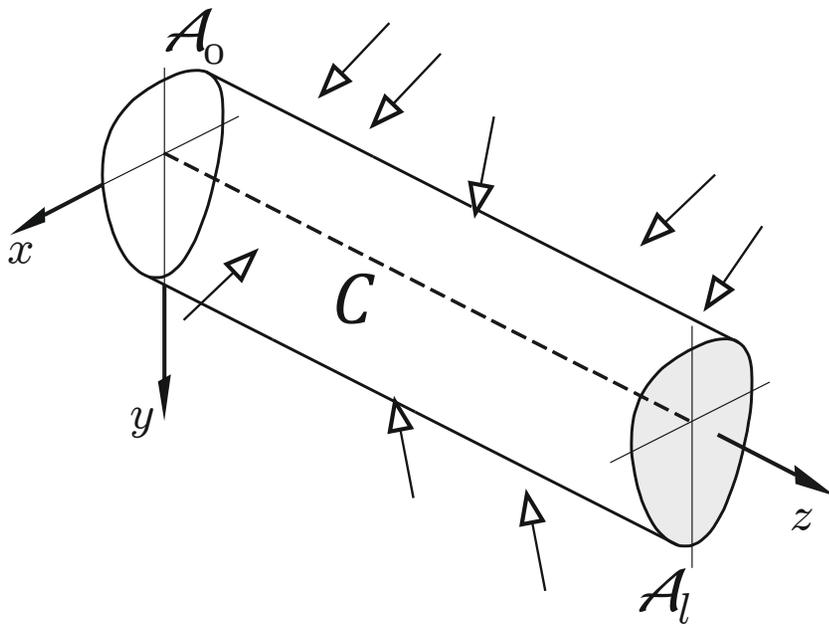


$$\begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \end{cases}$$

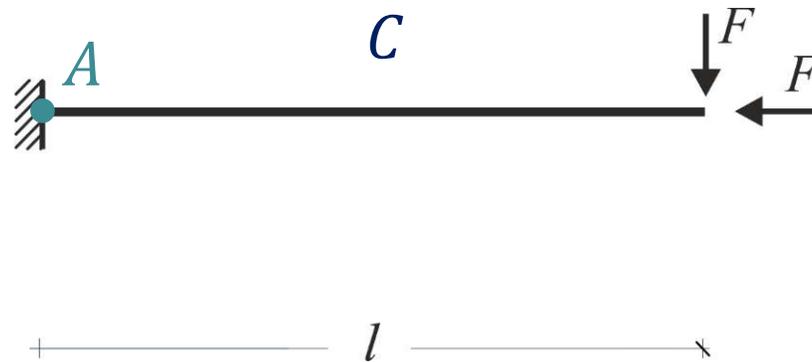
2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle azioni esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (**Postulato di Eulero**)

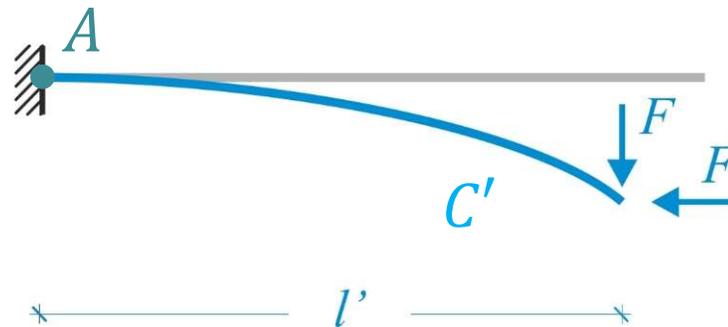




Osservazione

Se il corpo è deformabile le equazioni di equilibrio devono essere impostate con riferimento alla configurazione finale C' .

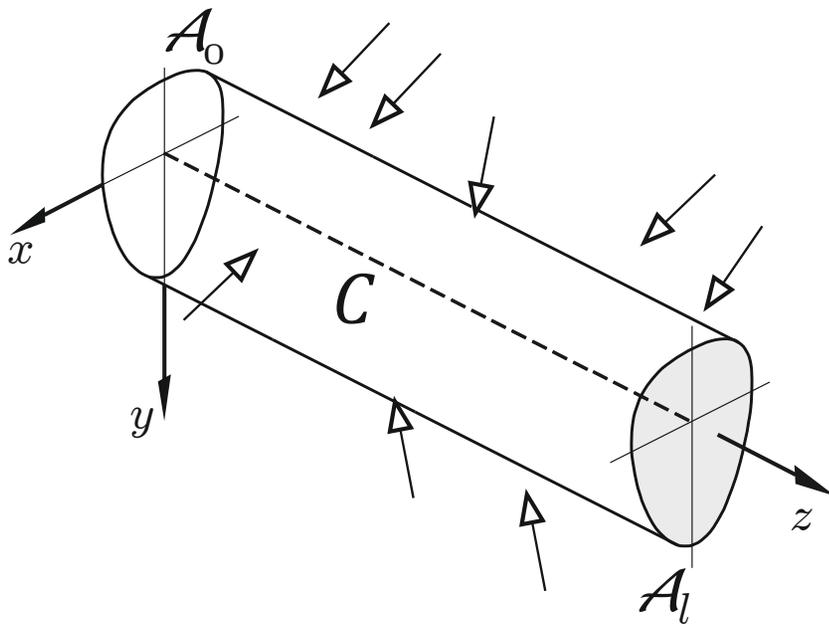
Nell'ipotesi dei piccoli spostamenti (cinematica) le configurazioni C e C' sono 'vicine': in numerose applicazioni strutturali, si possono impostare le equazioni di equilibrio con riferimento alla configurazione iniziale C , trascurando la deformabilità delle travi.



2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle azioni esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (**Postulato di Eulero**)

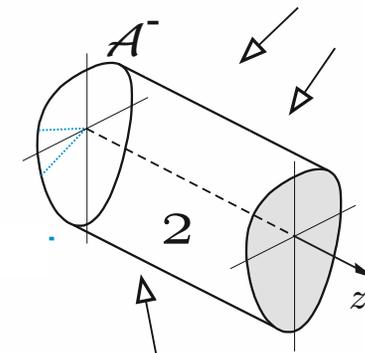
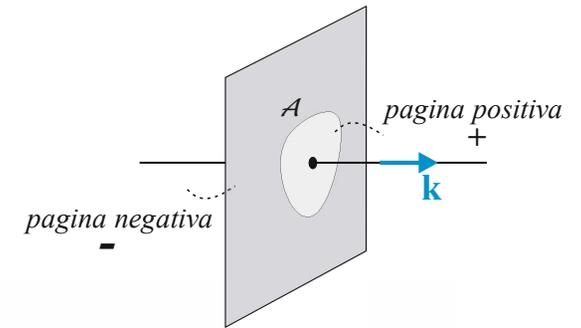
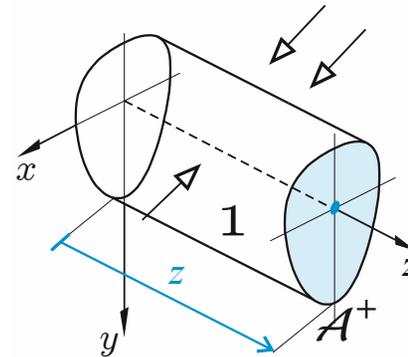
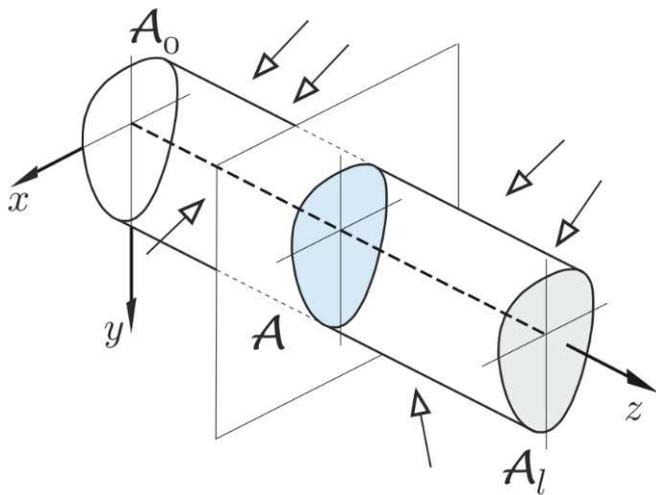
Ipotesi

Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata) C



3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Forze interne.

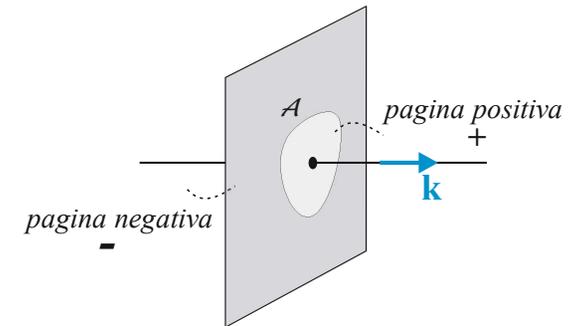
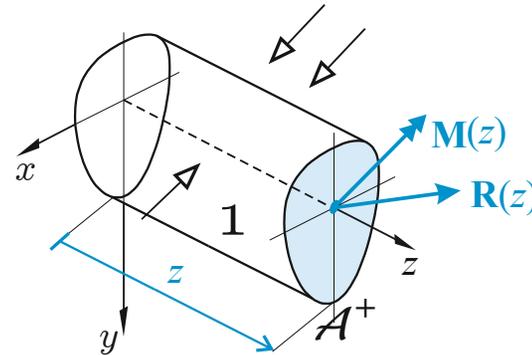
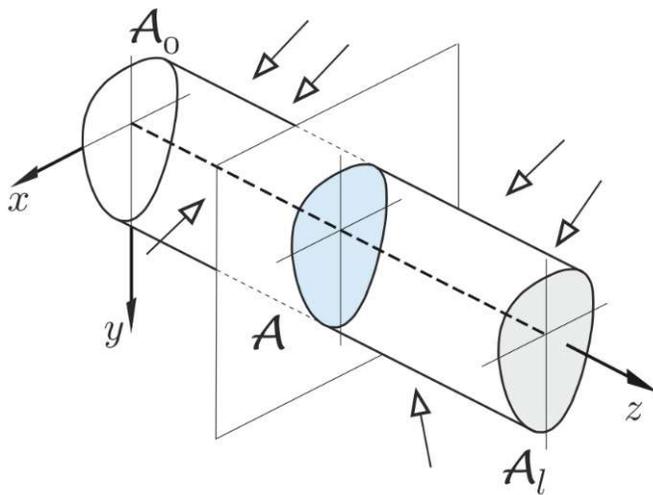
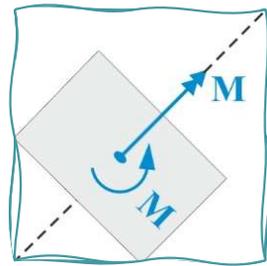


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Forze interne.

$\mathbf{R}(z)$ → Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z)$ → Momento risultante delle forze interne $[FL]$



3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Forze interne: lemma di Cauchy

$\mathbf{R}(z) \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$$0 \leq z \leq l$$

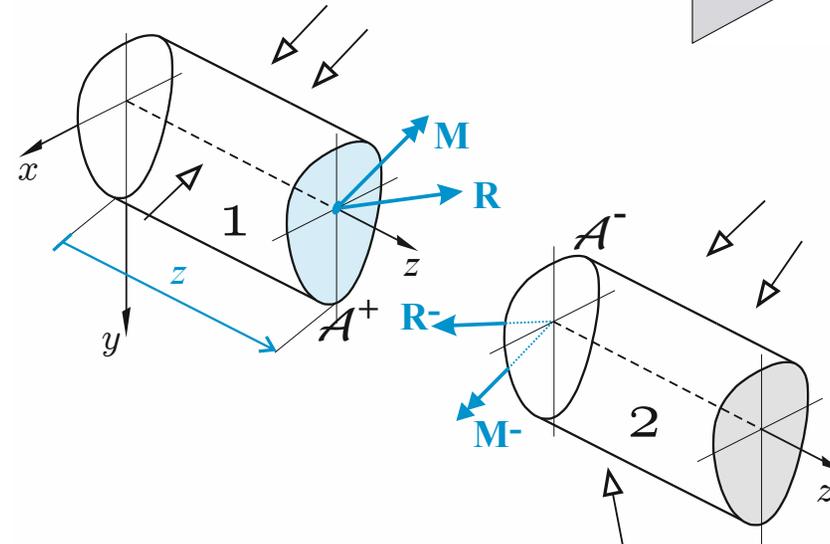
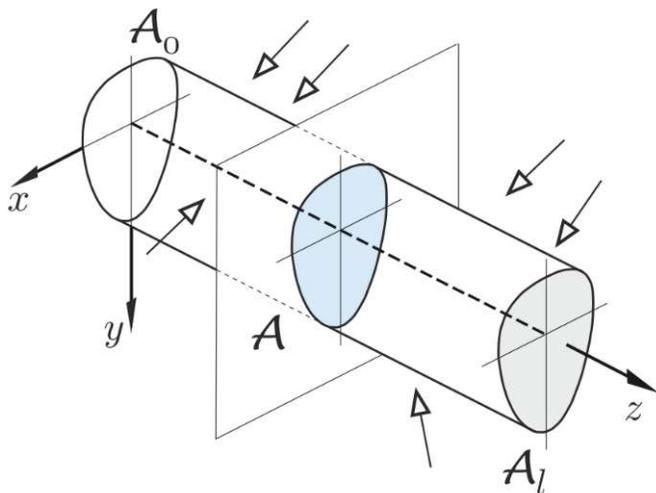
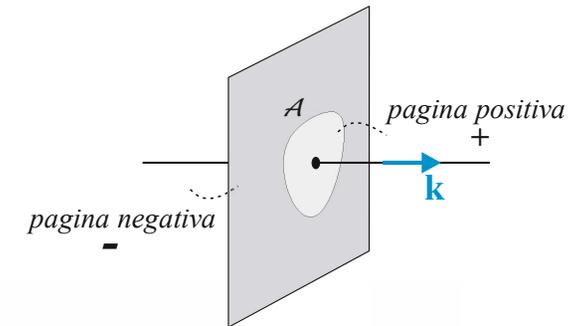
$$z = 0 \Rightarrow \mathcal{A}_0^-, \mathbf{R}^-(0) \quad \mathbf{M}^-(0)$$

$$z = l \Rightarrow \mathcal{A}_l^+, \mathbf{R}(l) \quad \mathbf{M}(l)$$

Lemma di Cauchy

$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$





3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione. Le CdS sono le componenti scalari dei vettori \mathbf{R} e \mathbf{M} rispetto al sistema di riferimento locale

$$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T_x(z)\mathbf{i} + T_y(z)\mathbf{j} \rightarrow \text{Risultante delle forze interne [F]}$$

$N(z) \rightarrow$ Forza normale [F] (agisce perpendicolarmente alla sezione)

$T_x(z) \rightarrow$ Forza di taglio x [F] (agisce parallelamente alla sezione)

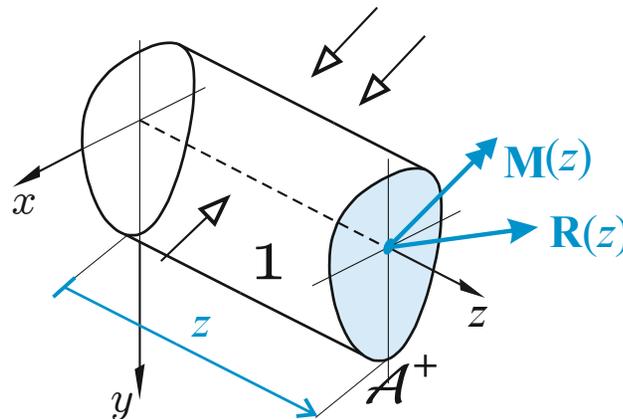
$T_y(z) \rightarrow$ Forza di taglio y [F] (agisce parallelamente alla sezione)

$$\mathbf{M}(z) = M_t(z)\mathbf{k} + M_x(z)\mathbf{i} + M_y(z)\mathbf{j} \rightarrow \text{Momento risultante delle forze interne [FL]}$$

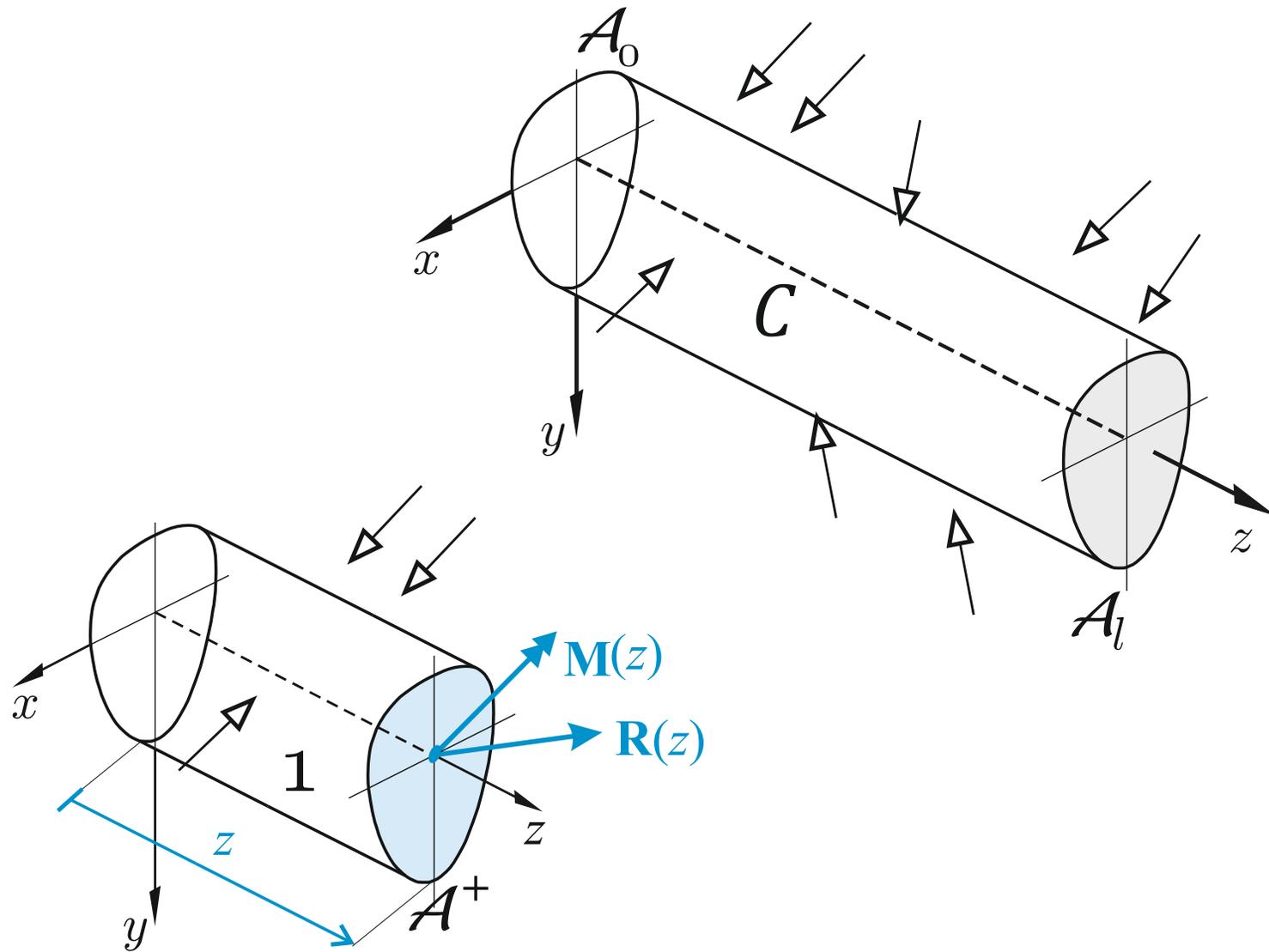
$M_t(z) \rightarrow$ Momento torcente [Fl] (la coppia agisce sul piano della sezione)

$M_x(z) \rightarrow$ Momento flettente x [Fl] (la coppia agisce sul piano verticale zy)

$M_y(z) \rightarrow$ Momento flettente y [Fl] (la coppia agisce sul piano orizzontale zx)

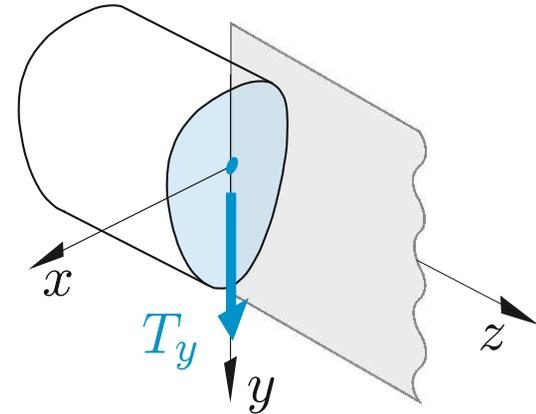
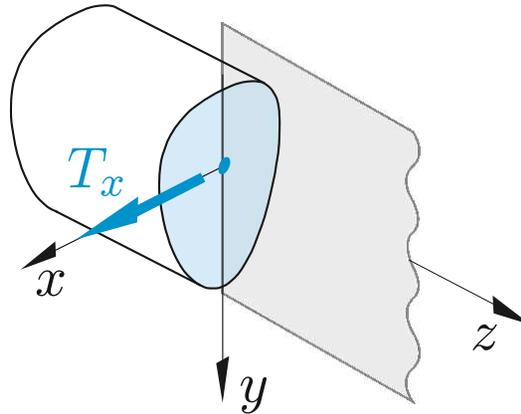
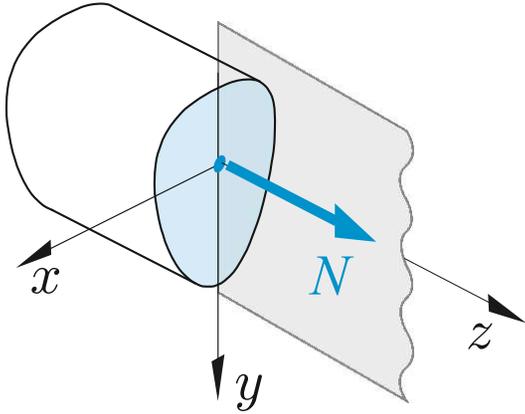


2. Statica della trave

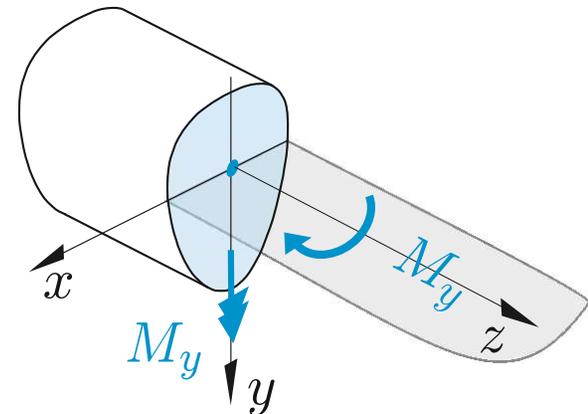
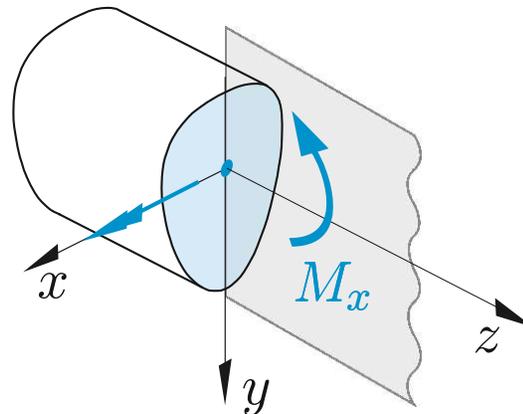
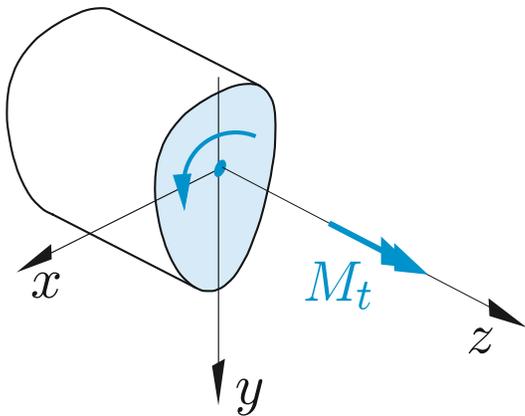


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $R(z)$ [F]

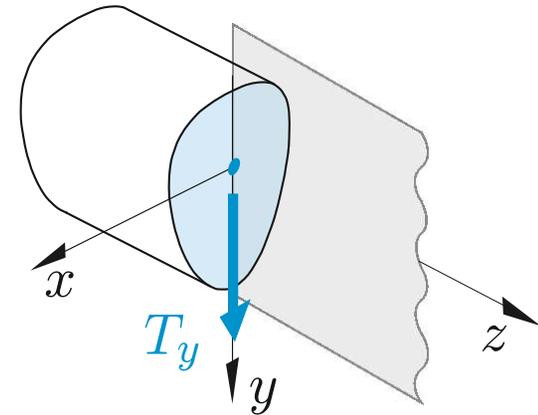
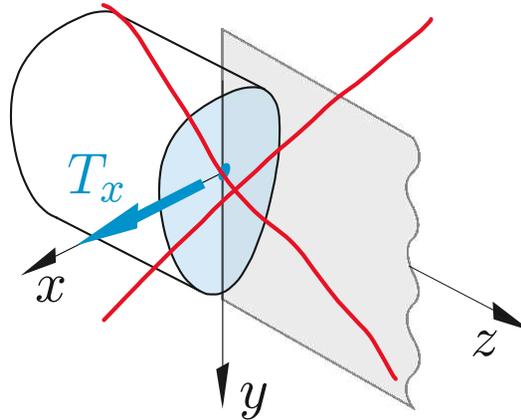
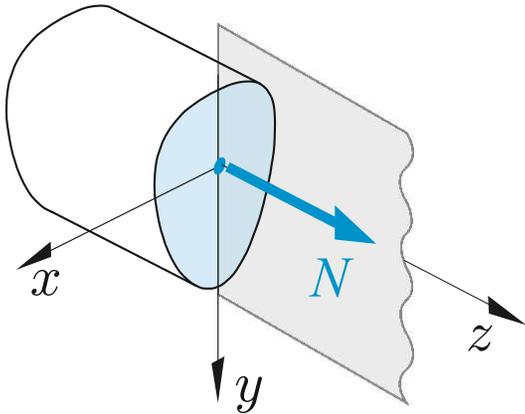


Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $M(z)$ [FL]

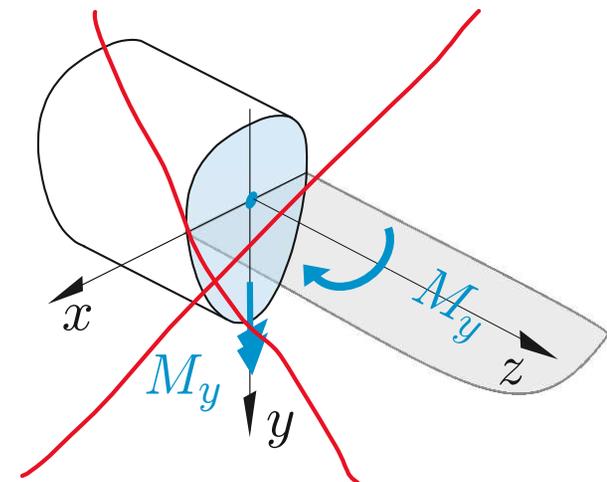
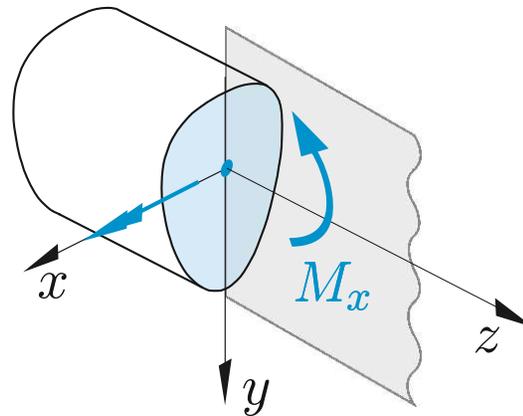
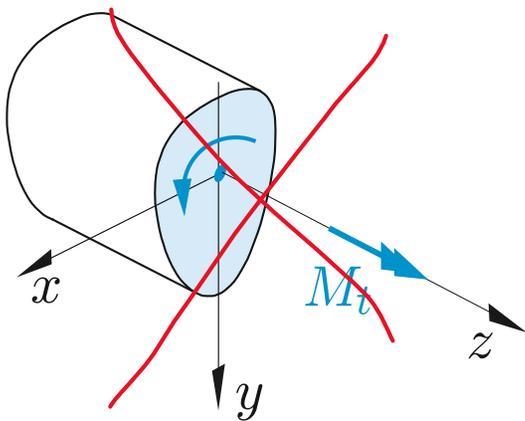


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione, caso piano (zy): componenti di $R(z)$ [F]



Caratteristiche della sollecitazione, caso piano (zy): componenti di $M(z)$ [FL]





3. Statica della trave: le forze interne in sezione

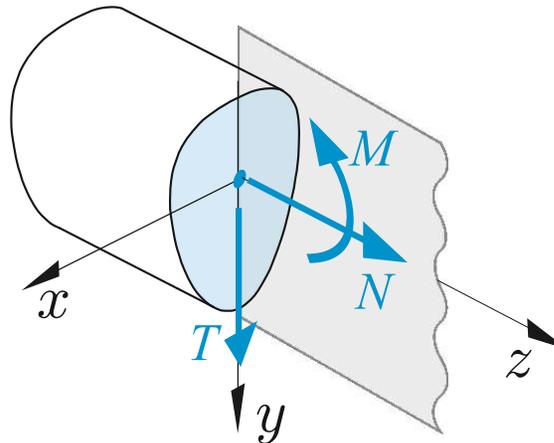
Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$$T_x(z) = 0, M_y(z) = 0, M_t(z) = 0 \quad T_y(z) = T(z), \quad M_x(z) = M(z)$$

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione

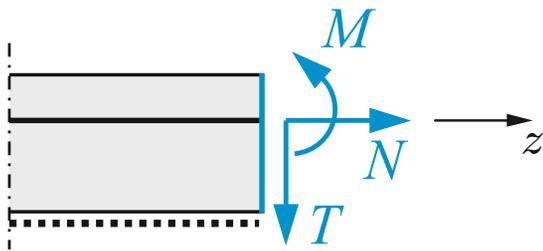


Faccia di normale positiva

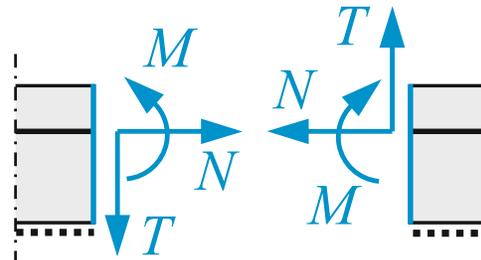


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

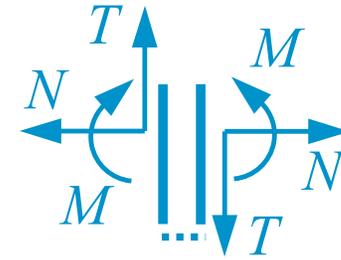
Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni



*Faccia di normale positiva
azioni interne positive*

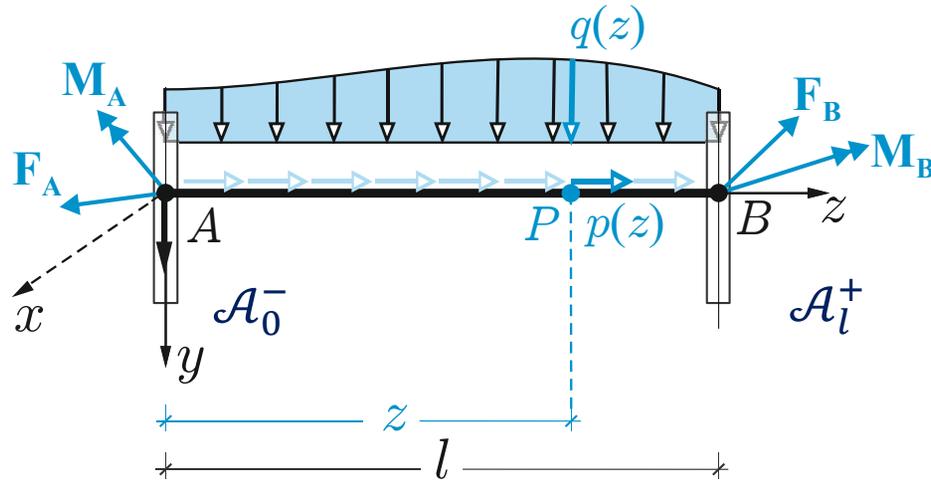


*Azioni interne
sulle due facce*

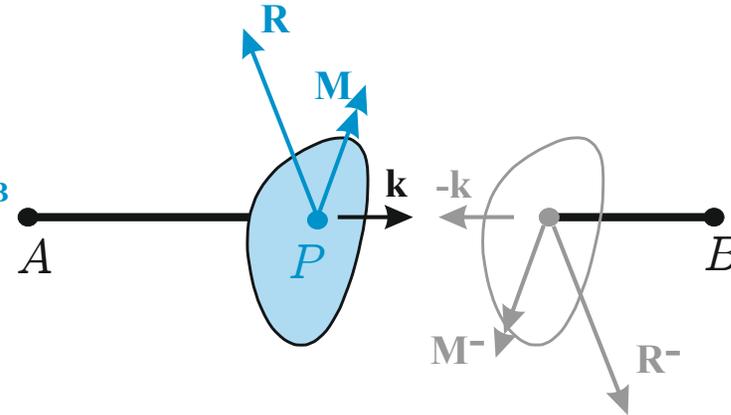


*Caratteristiche della sollecitazione:
convenzioni*

Equazioni indefinite di equilibrio



Forze esterne



Forze interne

$$\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j} \quad [F/L]$$

$p(z) \rightarrow$ Carico distribuito assiale $[F/L]$

$q(z) \rightarrow$ Carico distribuito trasversale $[F/L]$

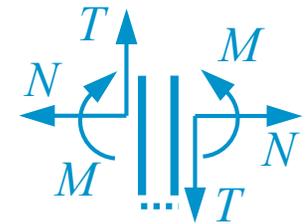
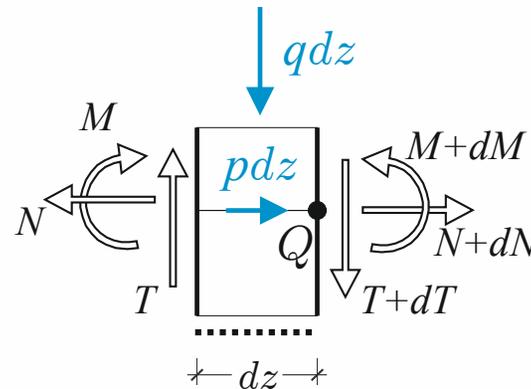
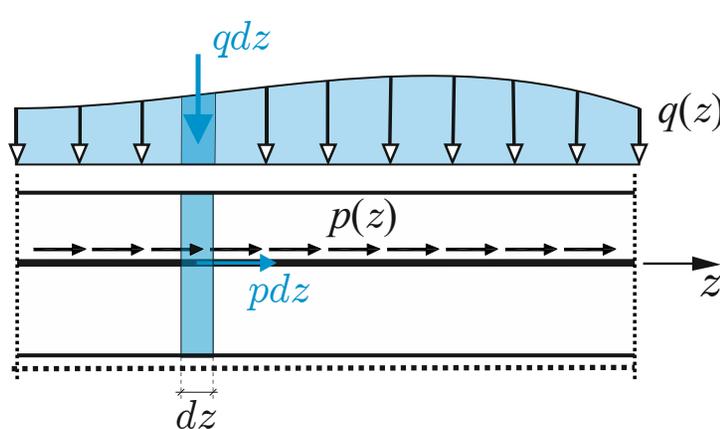
$\mathbf{F}_A, \mathbf{M}_A \rightarrow$ forze e coppie concentrate esterne agenti su \mathcal{A}_0^-

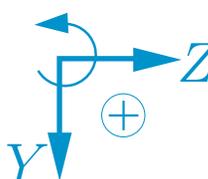
$\mathbf{F}_B, \mathbf{M}_B \rightarrow$ forze e coppie concentrate esterne agenti su \mathcal{A}_l^+

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^-(0) &= \mathbf{F}_A & \mathbf{R}(l) &= \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}^-(0) &= \mathbf{M}_A & \mathbf{M}(l) &= \mathbf{M}_B \end{aligned}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*





$$\begin{cases} \sum Z = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_Q = 0 \end{cases}$$

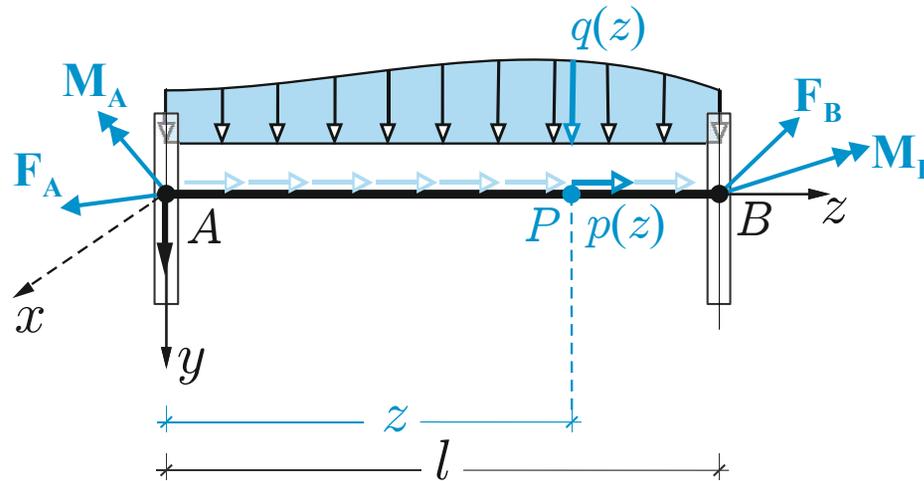
~~$$-N + (N + dN) + pdz = 0$$

$$-T + (T + dT) + qdz = 0$$

$$-M + (M + dM) - Tdz + qdz \frac{dz}{2} = 0$$~~

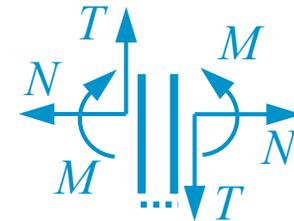
$$\rightarrow \begin{cases} \frac{dN}{dz} + p(z) = 0 \\ \frac{dT}{dz} + q(z) = 0 \\ \frac{dM}{dz} - T = 0 \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare



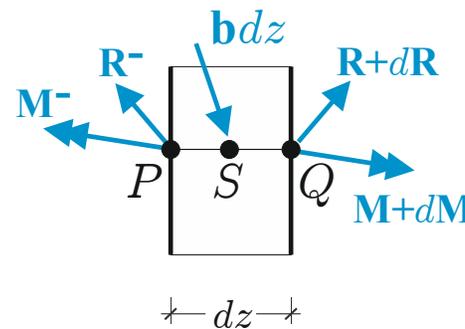
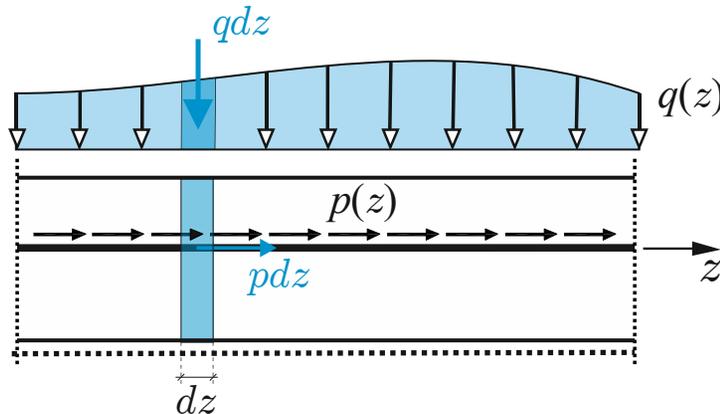
$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \quad + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*



Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*



$$\mathbf{PQ} = dz\mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2}\mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

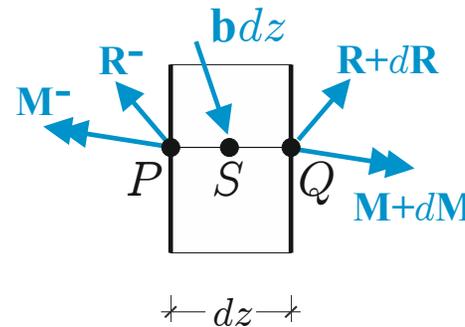
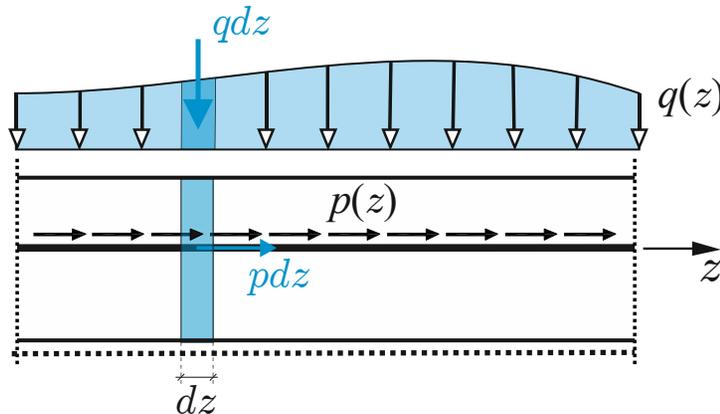
$$\mathbf{R}^- + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}^- + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*



$$\mathbf{PQ} = dz \mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2} \mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

~~$$\mathbf{R} + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$~~

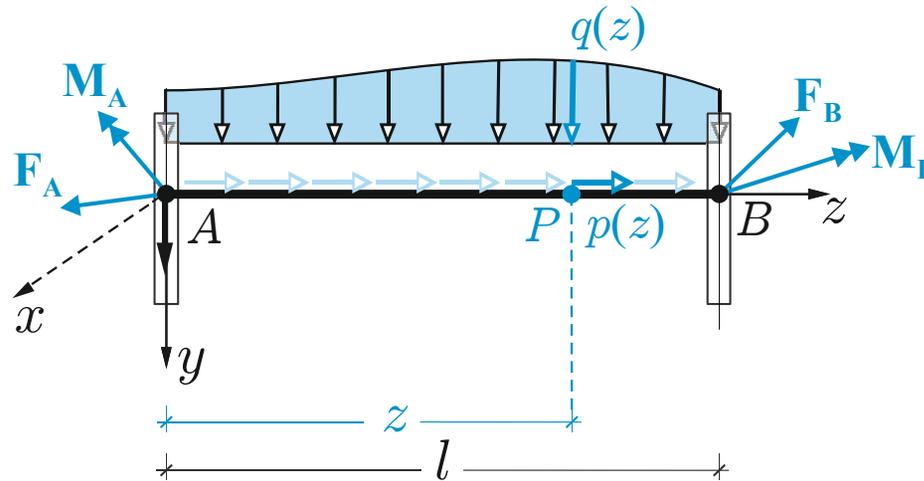
~~$$\mathbf{M} + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$~~

Lemma di Cauchy

$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

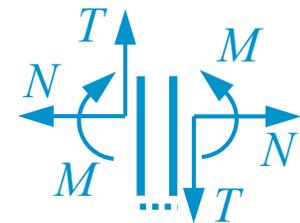


$$\begin{cases} \mathbf{R}'(z) + \mathbf{b}(z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}'(z) + \mathbf{k} \times \mathbf{R}(z) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{R}^-(0) = \mathbf{F}_A & \mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}^-(0) = \mathbf{M}_A & \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B \end{matrix}$$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione

$$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i}$$



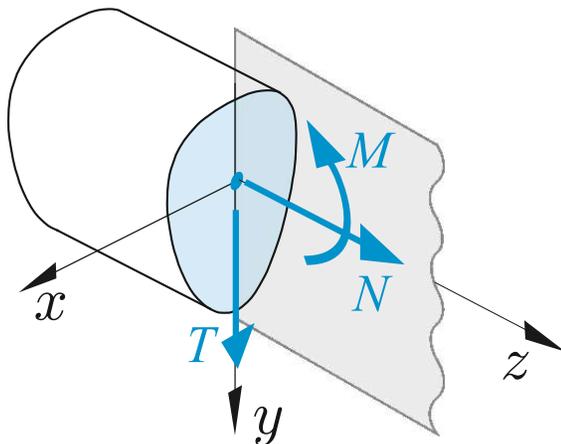
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne $[F]$

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne $[FL]$

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

(obiettivo 2)



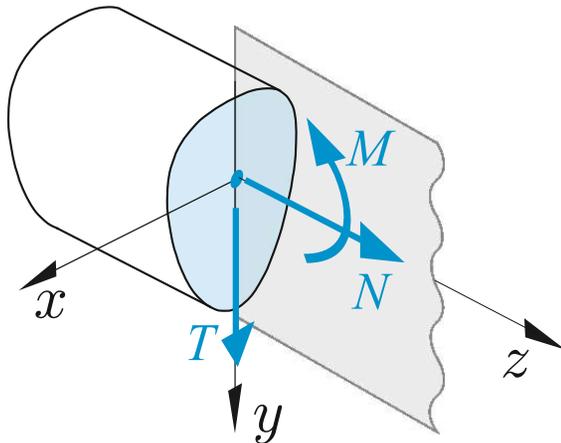
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \rightarrow$ Risultante delle forze interne [F]

$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ Momento risultante delle forze interne [FL]

$N(z), T(z), M(z) \rightarrow$ Caratteristiche della sollecitazione (obiettivo 1)



Faccia di normale positiva

Equazioni indefinite di equilibrio

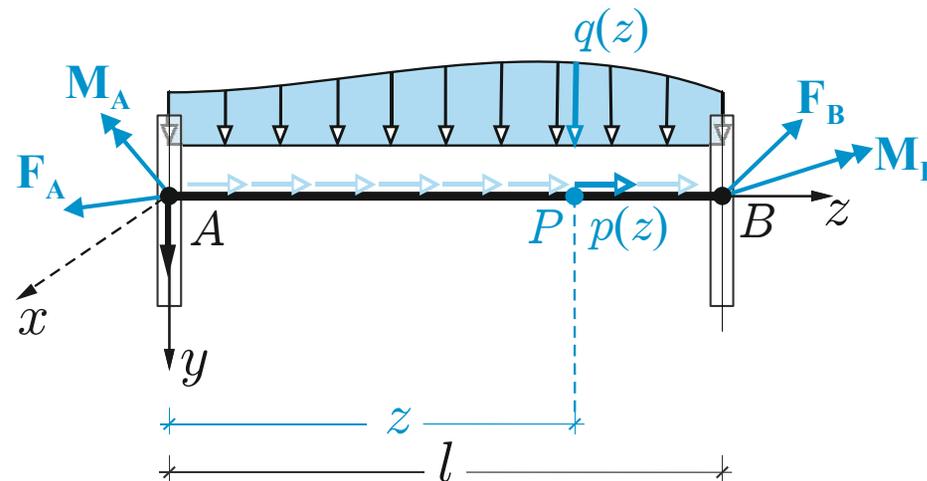
$$\begin{cases} \mathbf{R}'(z) + \mathbf{b}(z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}'(z) + \mathbf{k} \times \mathbf{R}(z) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^-(0) &= \mathbf{F}_A & \mathbf{R}(l) &= \mathbf{F}_B \\ \mathbf{M}^-(0) &= \mathbf{M}_A & \mathbf{M}(l) &= \mathbf{M}_B \end{aligned}$$

(obiettivo 2)

3. Statica della trave: problema statico

Posizione del problema



Assegnate su una trave vincolata le forze esterne (distribuite e/o concentrate), determinare le forze interne (caratteristiche della sollecitazione) con esse equilibrate.

Formulazione analitica

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

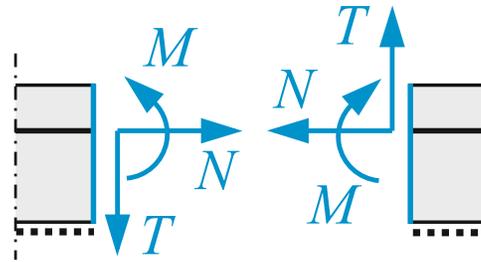
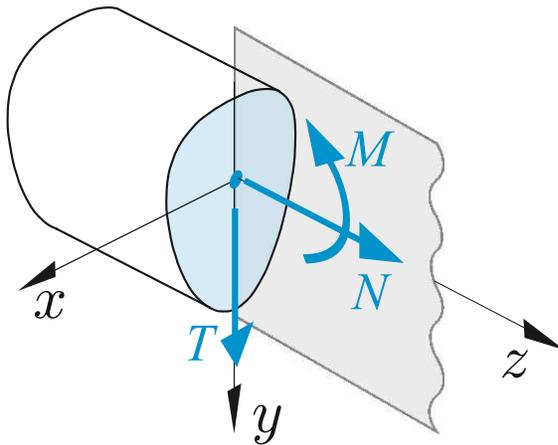
Relazioni analitiche fra forze esterne e interne in una trave in equilibrio (obiettivo 2)

Esistenza della soluzione

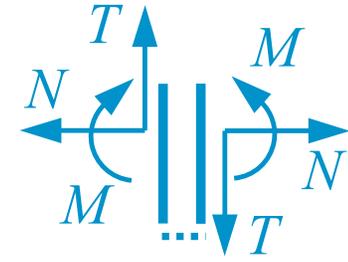
$$N(z), T(z), M(z) \rightarrow \text{Incognite}$$

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z : $N(z), T(z), M(z)$



Azioni interne sulle due facce



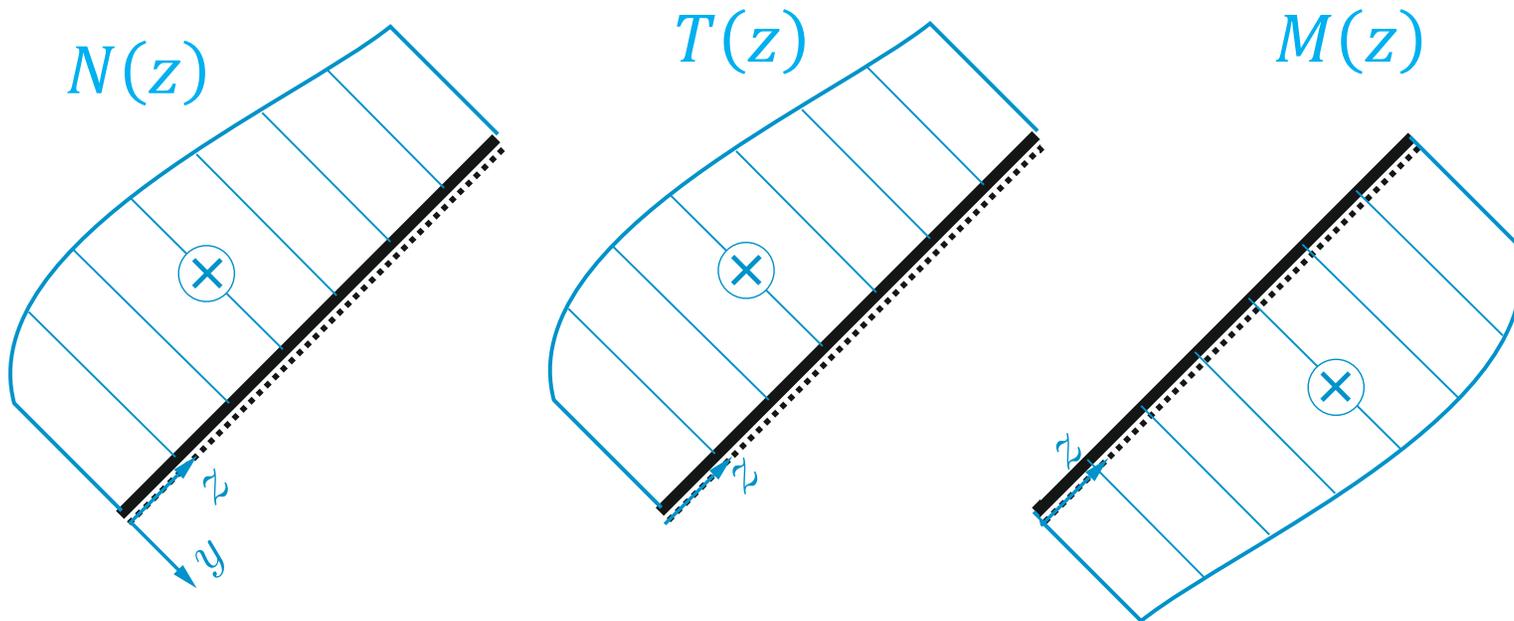
Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni



3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

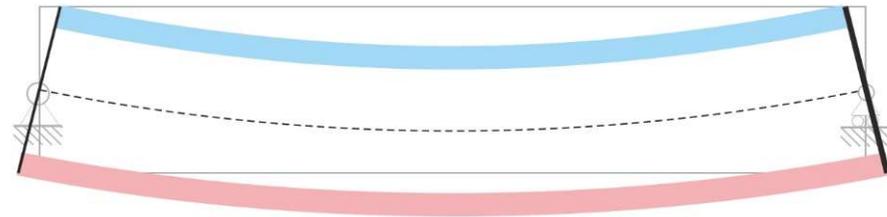
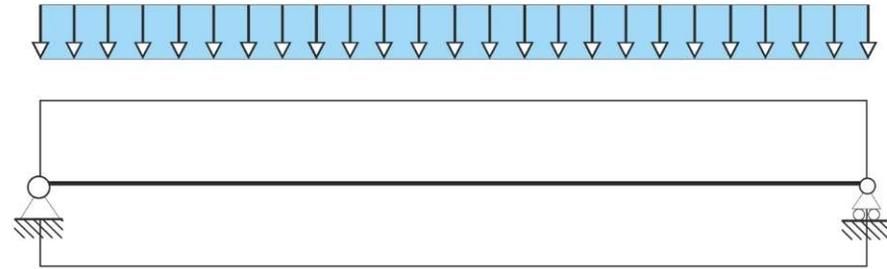
Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z : $N(z)$, $T(z)$, $M(z)$

Diagrammi delle CdS: grafici delle funzioni definite al punto precedente, rappresentate nel sistema di riferimento della trave secondo prefissate convenzioni.

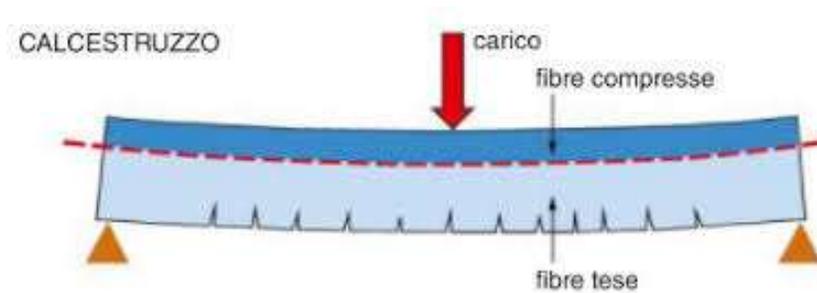


3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

FIBRE TESE

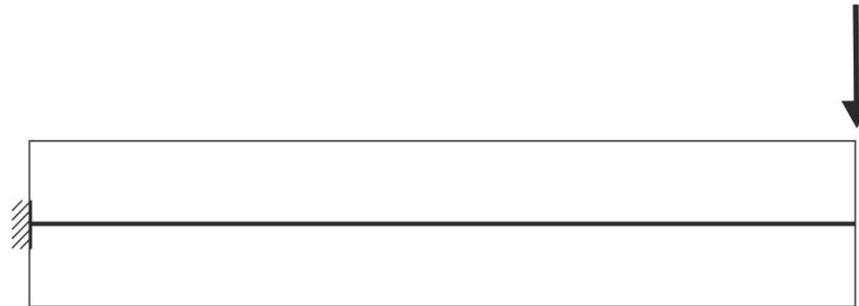


— *fibres tese*
— *fibres compresse*



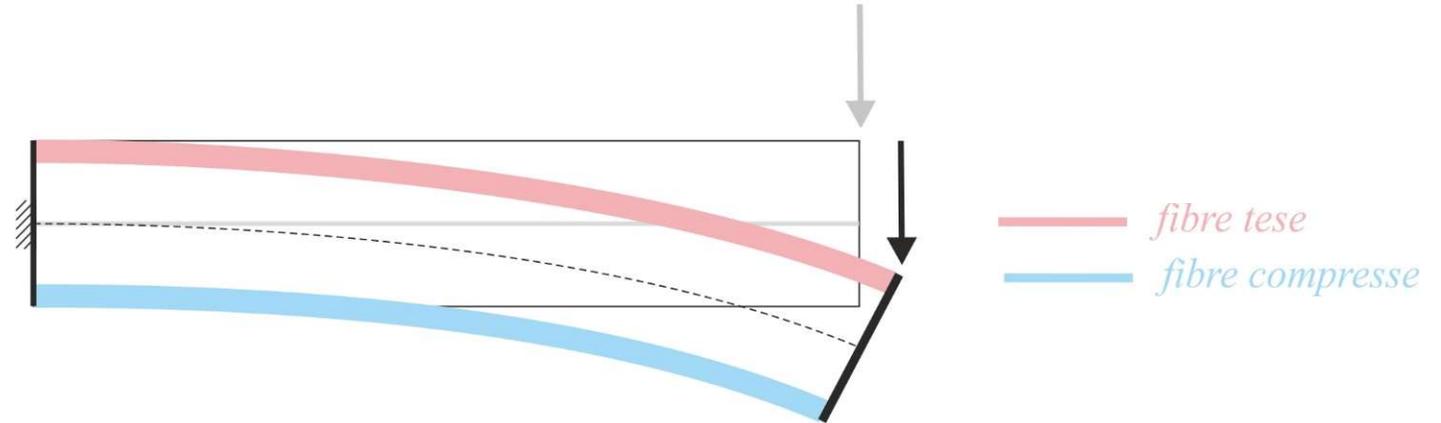
3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

FIBRE TESE



3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

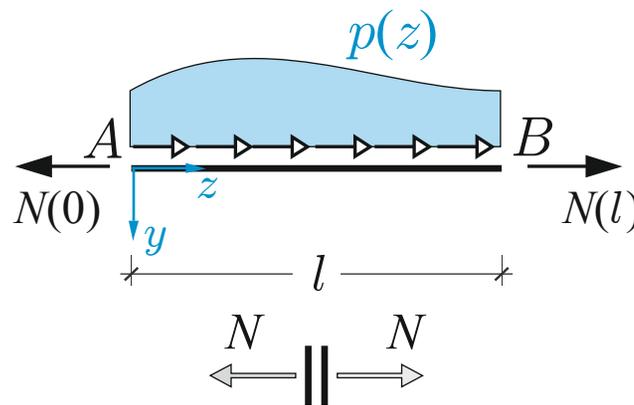
FIBRE TESE



3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito assiale ovunque nullo	carico distribuito assiale legge uniforme	carico distribuito assiale legge lineare
$p(z) = 0$	$p(z) = \bar{p}$	$p(z) = p_1 z + p_2$
$N(z)$ legge uniforme	$N(z)$ legge lineare	$N(z)$ legge quadratica



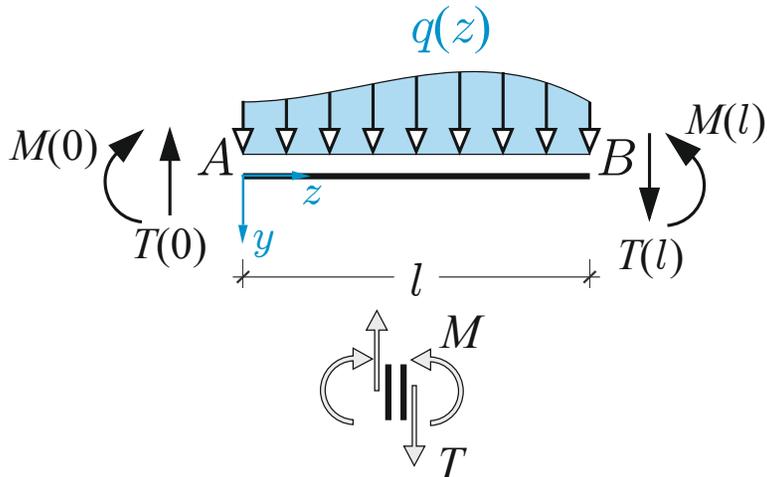
$$N'(z) = -p(z)$$

$$N(z) = - \int p(z) dz$$

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito trasversale ovunque nullo	carico distribuito trasversale legge uniforme	carico distribuito trasversale legge lineare	
$q(z) = 0$	$q(z) = \bar{p}$	$q(z) = q_1 z + q_2$	
$T(z)$ legge uniforme	$T(z)$ legge lineare	$T(z)$ legge quadratica	
Taglio ovunque nullo	Taglio uniforme	Taglio lineare	Taglio quadratico
$M(z)$ legge uniforme	$M(z)$ legge lineare	$M(z)$ legge quadratica	$M(z)$ legge cubica



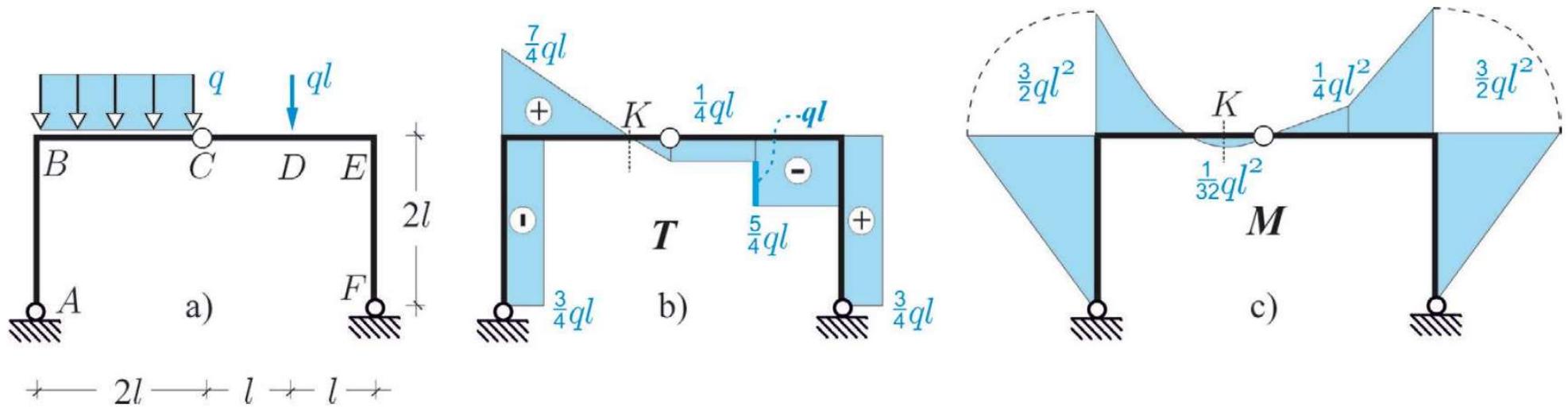
$$T'(z) = -q(z)$$

$$M'(z) = T(z)$$

$$T(z) = - \int q(z) dz \quad M(z) = \int T(z) dz$$

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico



3. Statica della trave: esercizi (lavagna)

Esercizi Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l'isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera; c) determinare le leggi di variazione delle CdS disegnando i relativi diagrammi.

