

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

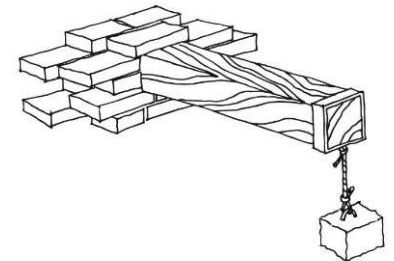
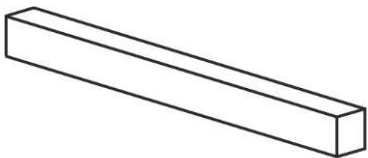




Lezione

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo**
- Problema elastico



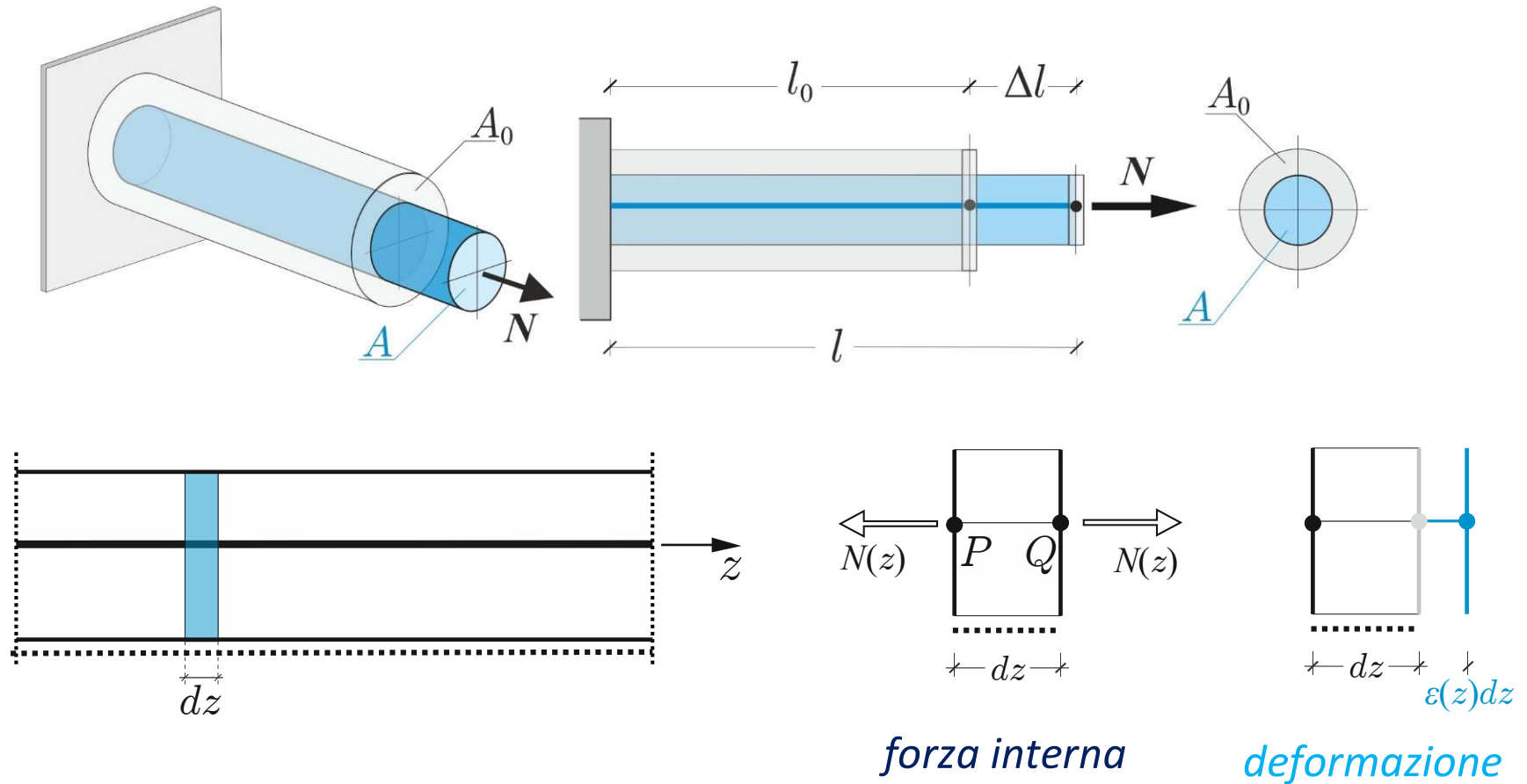


Parte II - Il modello di trave elastica 1D

3. Materiale: legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
 - materiali duttili
 - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
 - Legge di Hooke
- **Equazioni di legame costitutivo per la trave**

3. Legame costitutivo: obiettivi



$$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z) \quad ?$$

$$T(z) \leftrightarrow \gamma(z) \quad ?$$

$$M(z) \leftrightarrow \chi(z) \quad ?$$

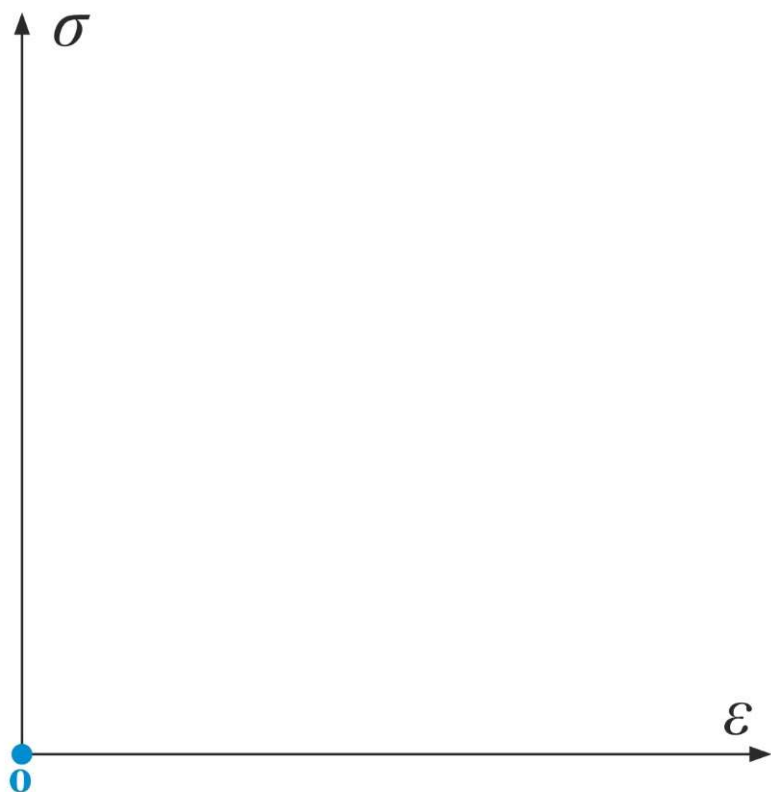
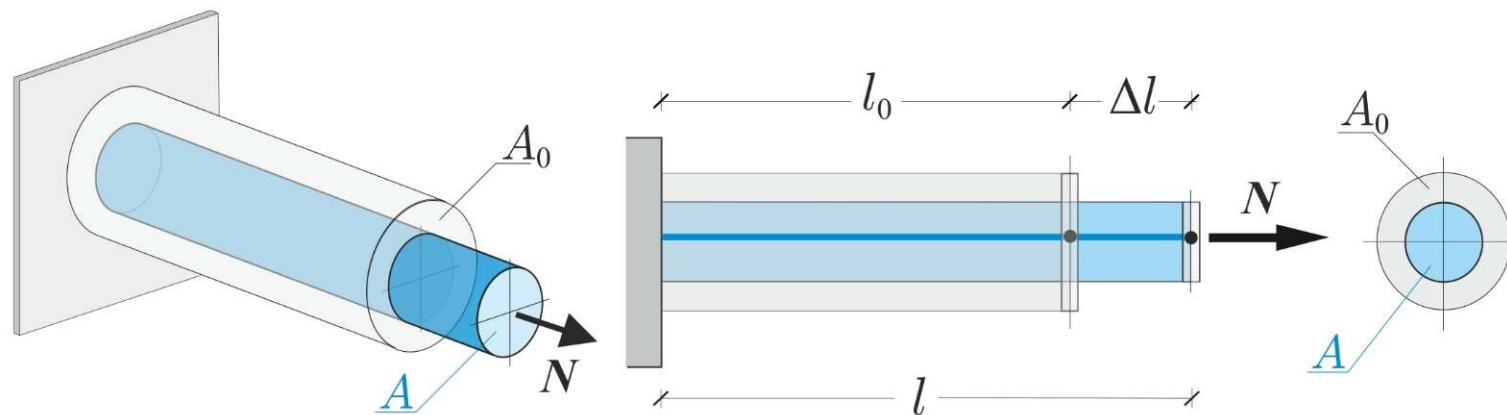
Materiale?

Indagini sperimentali:

- prova uniassiale
- prova a torsione



3. Legame costitutivo: prova uniassiale



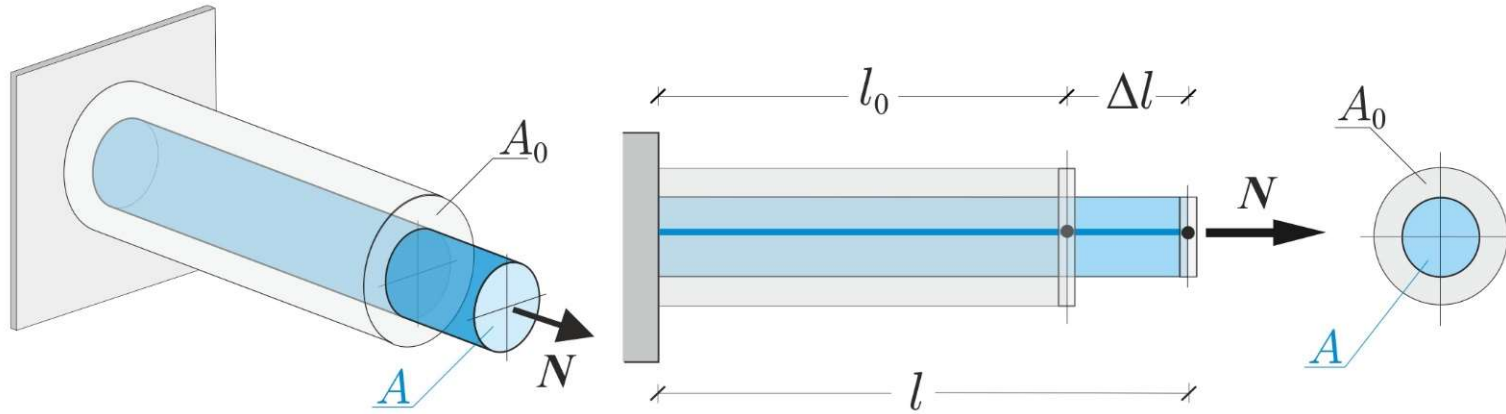
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

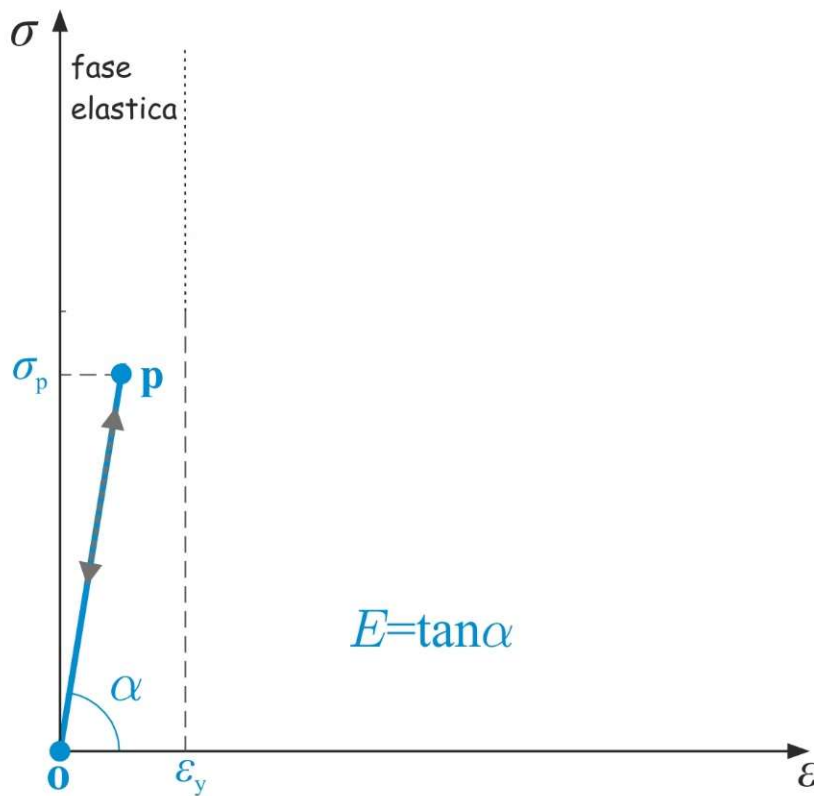


FASE ELASTICA

$o-p \rightarrow$ comportamento elastico lineare

$o \rightarrow$ stato iniziale

$p \rightarrow$ limite di proporzionalità



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

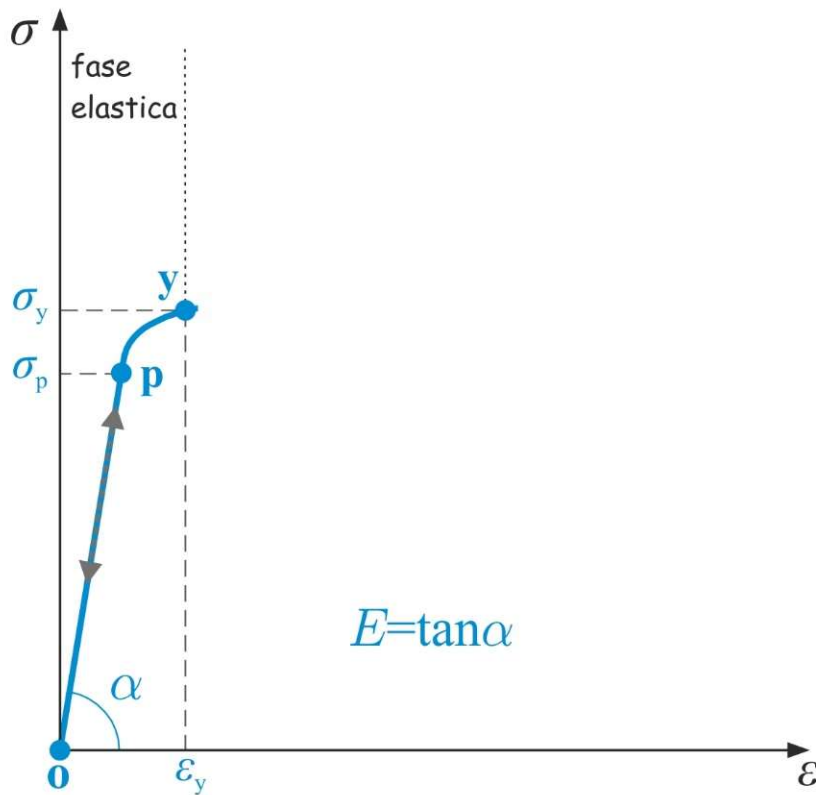
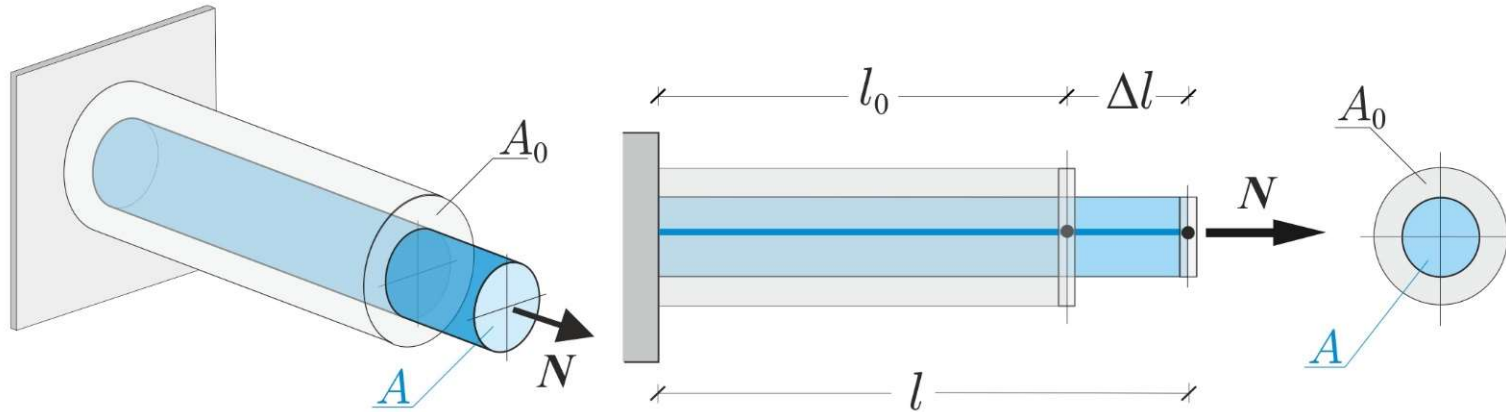
$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$



3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

o-p → comportamento elastico lineare

o → stato iniziale

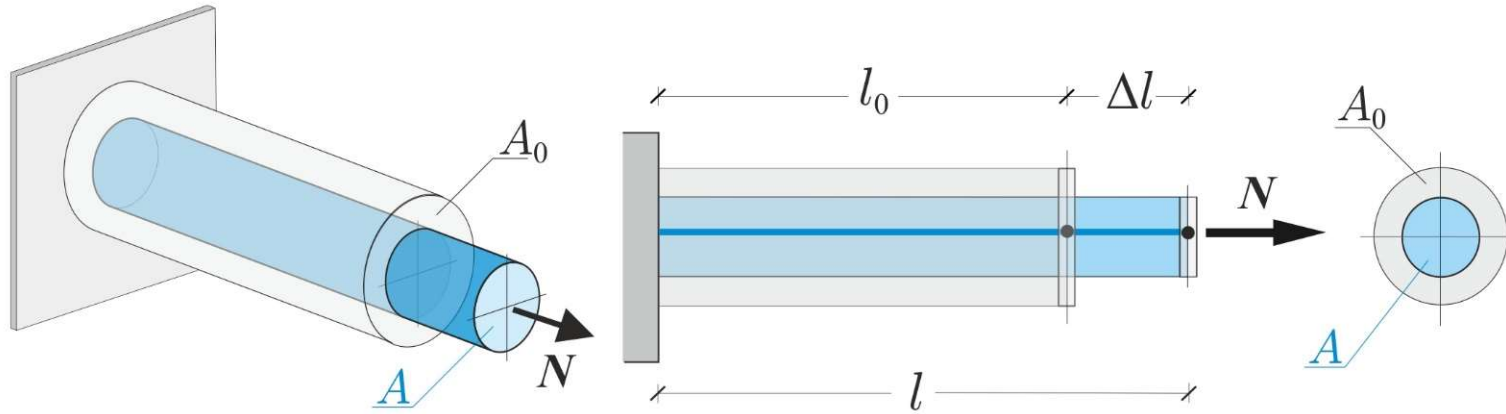
p → limite di proporzionalità

p-y → comportamento elast. non lineare

y → limite di elasticità

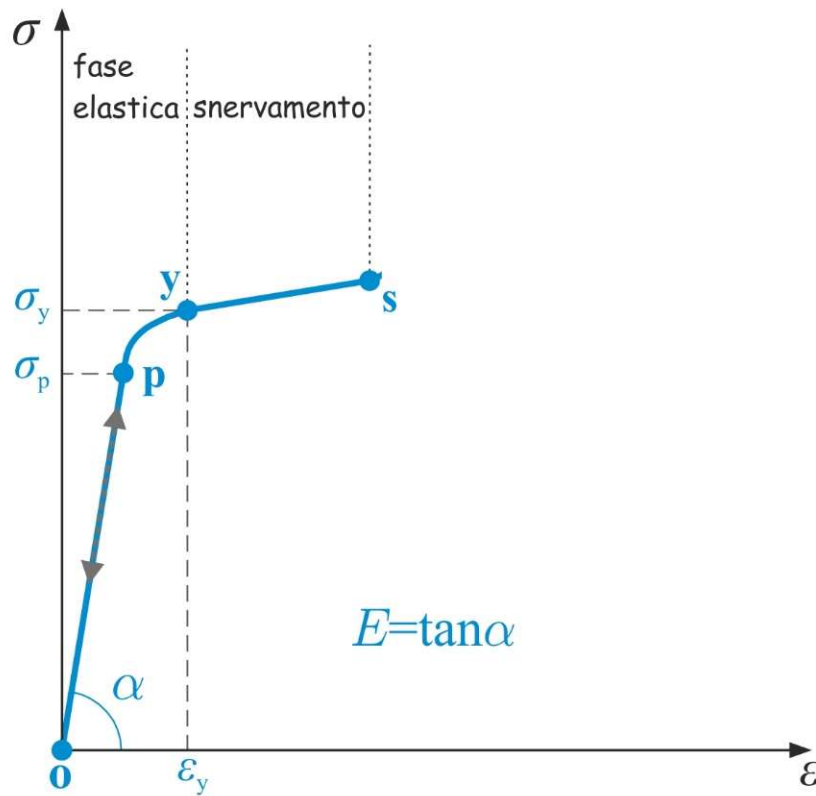
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad [FL^{-2}]$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad [0]$$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

y-s → snervamento



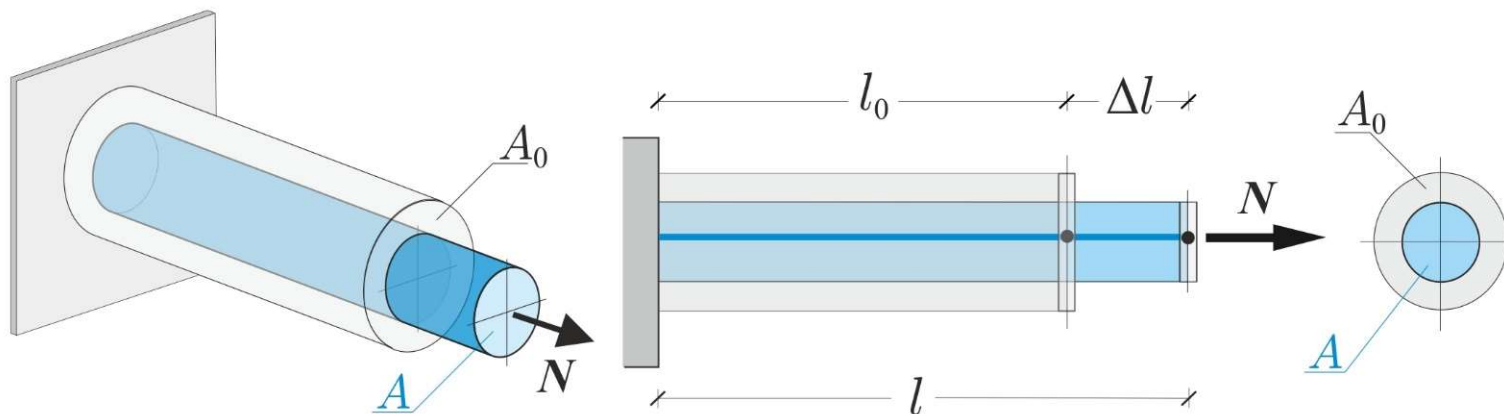
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

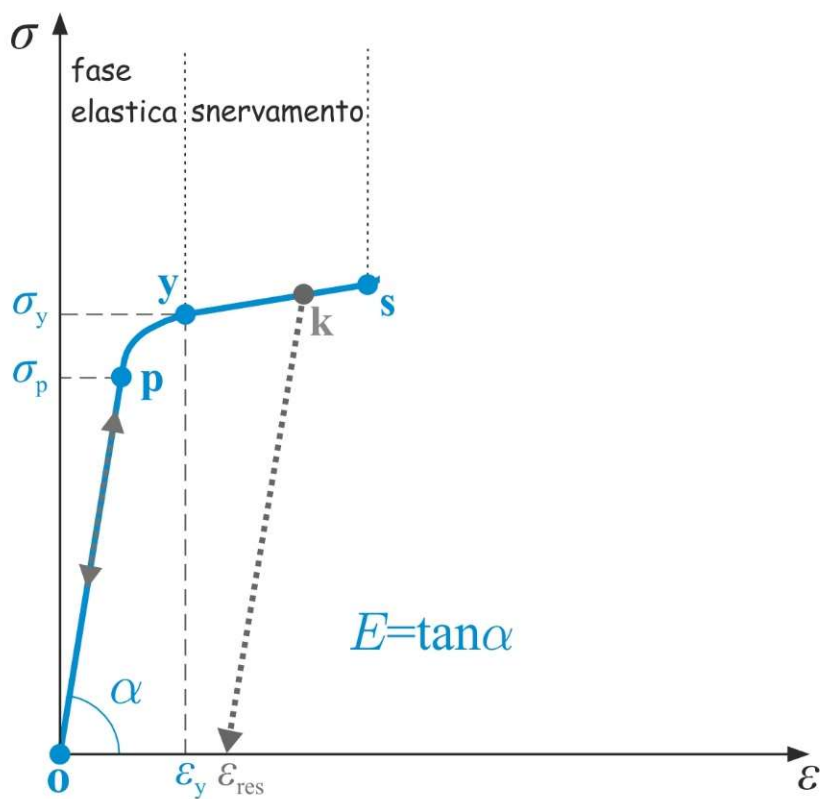
$[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

$y-s \rightarrow$ snervamento



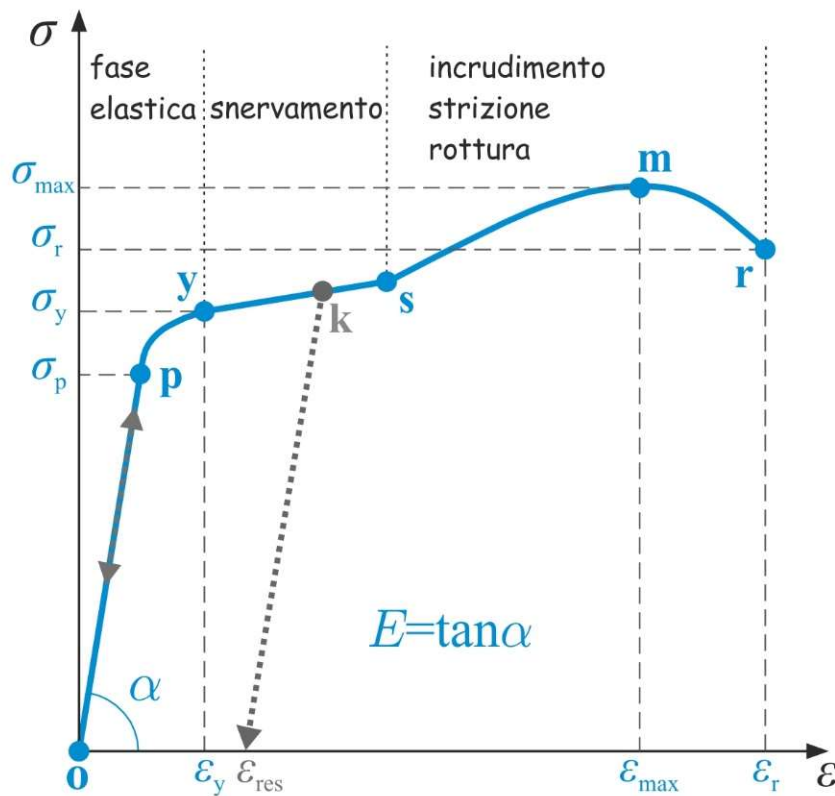
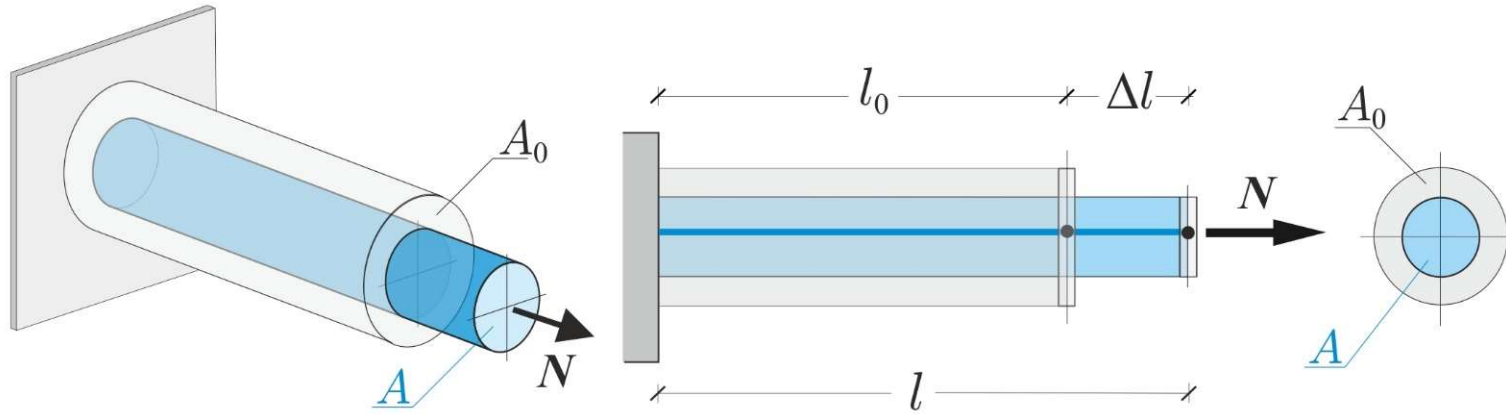
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

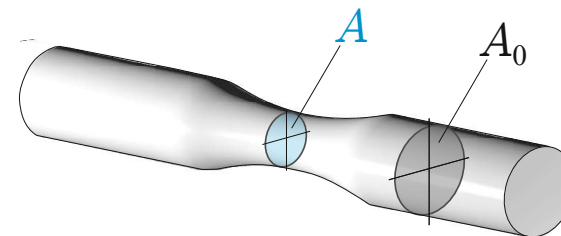
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

s-m → *incrudimento*

r → *punto di rottura*



$$A < A_0$$

$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

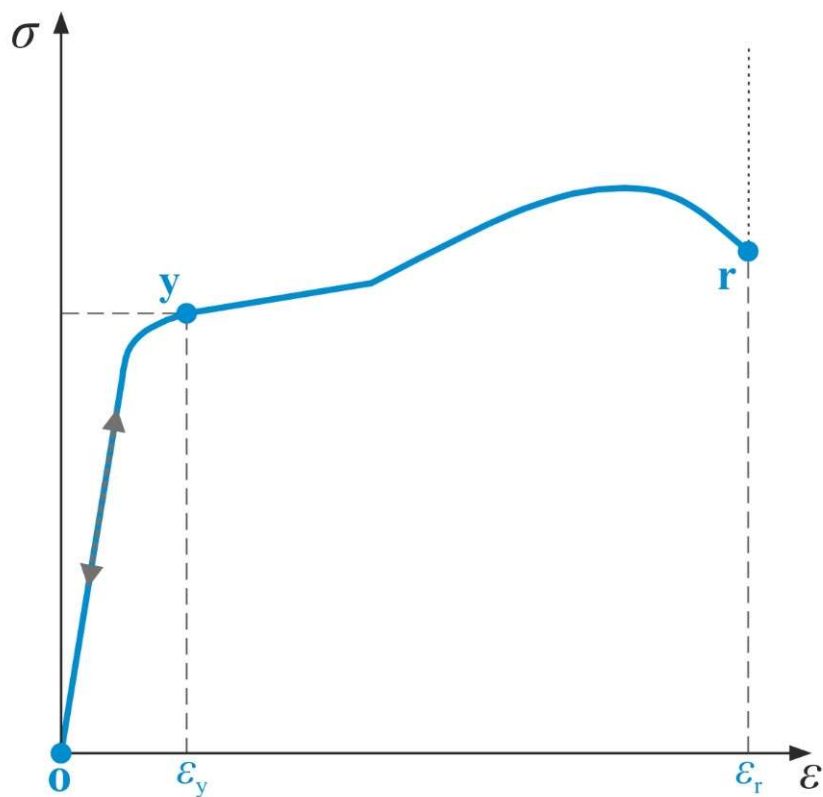
$[0]$



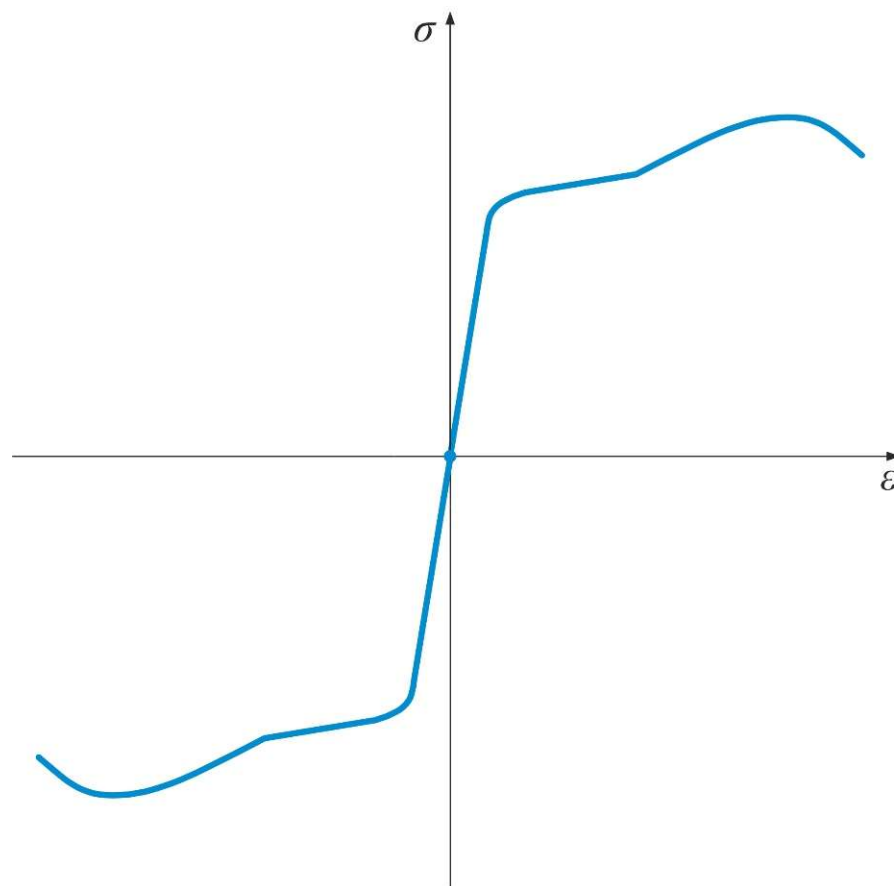
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

DUTTILITA'

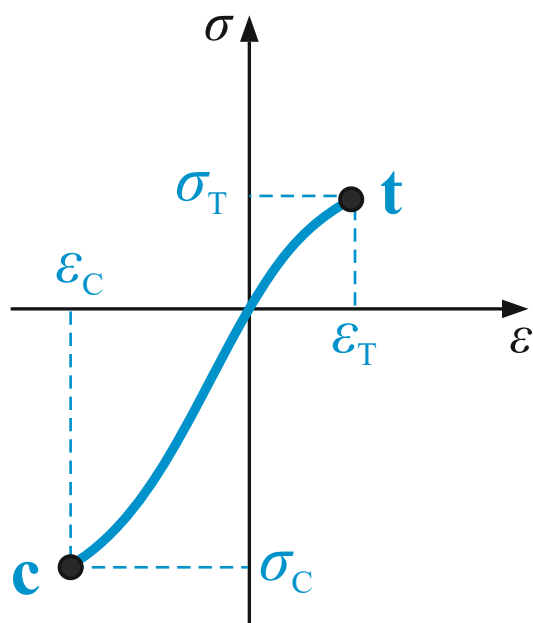
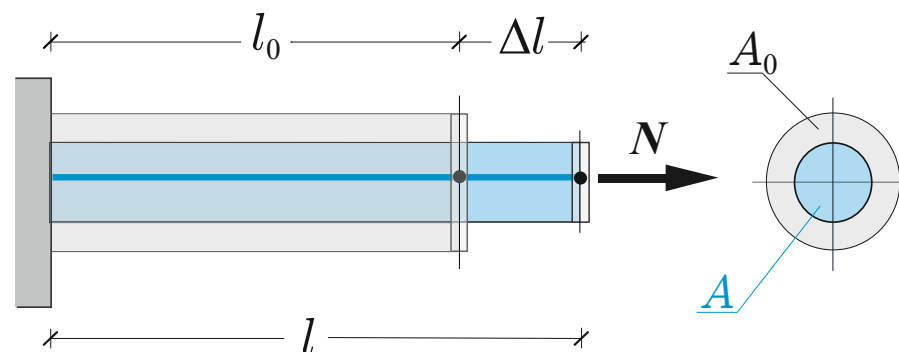
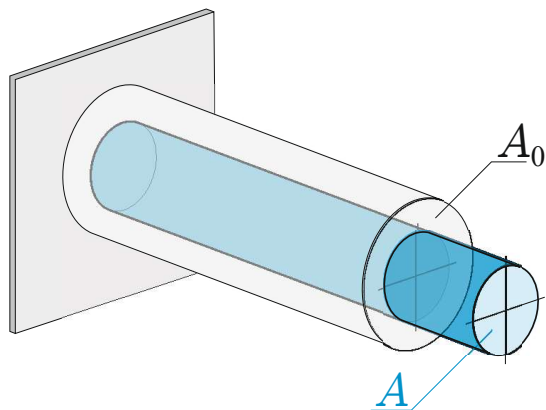
$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$



SIMMETRIA



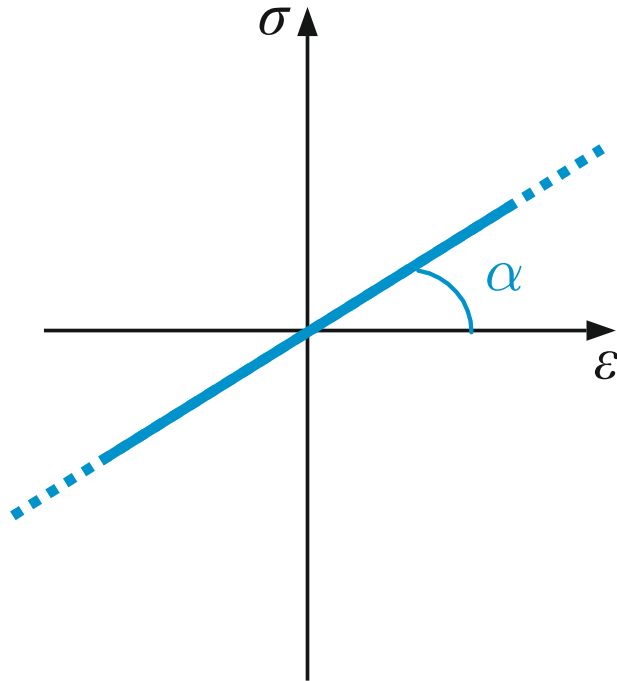
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili



t → punto di rottura a trazione

c → punto di rottura a compressione

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



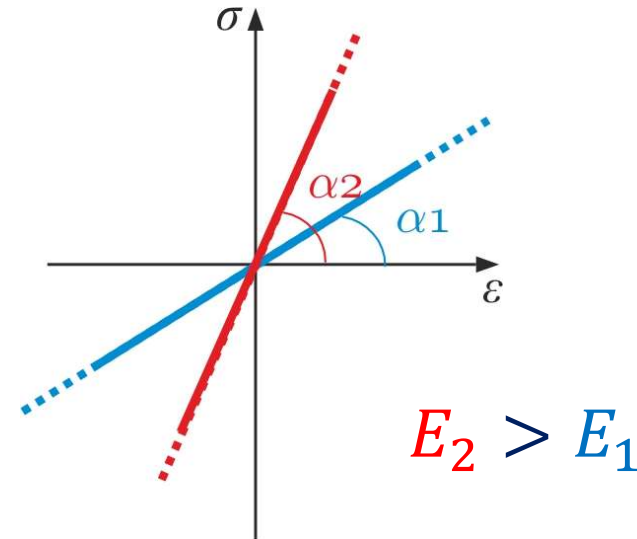
$\sigma = m \varepsilon = \tan \alpha \varepsilon$
(equazione cartesiana della retta
passante per l'origine di coefficiente
angolare m)

$E = \tan \alpha \rightarrow$ Modulo di Young [FL^{-2}]

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$\rightarrow$ Legge di Hooke





3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

Materiale	ρ [kg/m³]	E [GPa]	ν	α [°C⁻¹]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

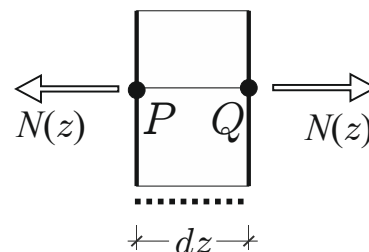
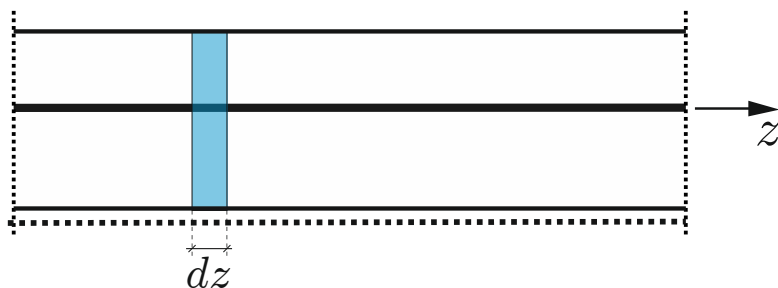
provino

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

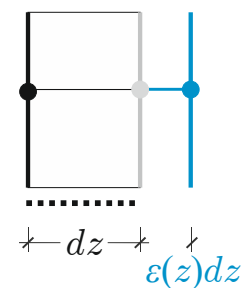
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Elemento infinitesimo

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$



forza interna



deformazione



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Caratteristiche del materiale

$E \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$G \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

Caratteristiche della sezione retta

$A \rightarrow$ Area $[L^2]$

$A_t \rightarrow$ Area di taglio $[L^2]$

$I = I_x \rightarrow$ Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x $[L^4]$

Rigidezze della trave

$EA \rightarrow$ Rigidezza assiale $[F]$

$GA_t \rightarrow$ Rigidezza di taglio $[F]$

$EI \rightarrow$ Rigidezza flessionale $[FL^2]$

$EA \rightarrow \infty$ Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \rightarrow \infty$ Trave indeformabile a taglio
(Eulero-Bernouilli)



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

$E \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$\alpha \rightarrow$ coeff. di dilatazione termica $[T^{-1}]$



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \alpha \Delta T$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

$E \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$\alpha \rightarrow$ coeff. di dilatazione termica $[T^{-1}]$



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza h della sezione da T_1 a $T_2 > T_1$

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\begin{aligned}\varepsilon(z) &= \frac{N(z)}{EA} + \alpha \frac{T_2 + T_1}{2} \\ \gamma(z) &= \frac{T(z)}{GA_t} \\ \chi(z) &= \frac{M(z)}{EI} + 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}\end{aligned}$$

Esempio: temperatura variabile linearmente lungo l'altezza h della sezione da T_1 a $T_2 > T_1$

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \frac{T_2 + T_1}{2}$$

$$\gamma_t(z) = 0$$

$$\chi_t(z) = 2\alpha \frac{T_2 - T_1}{h}$$