Facoltà di Architettura
Scienze dell'Architettura

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

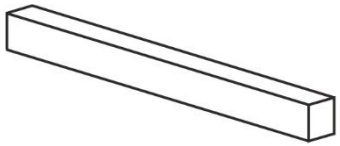
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

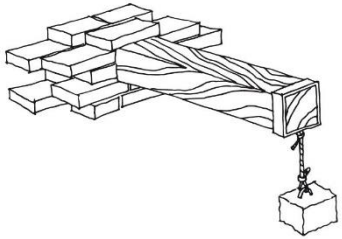
Lezione

Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

- Cinematica della trave
- Statica della trave
- **Materiale: legame costitutivo**
- Problema elastico



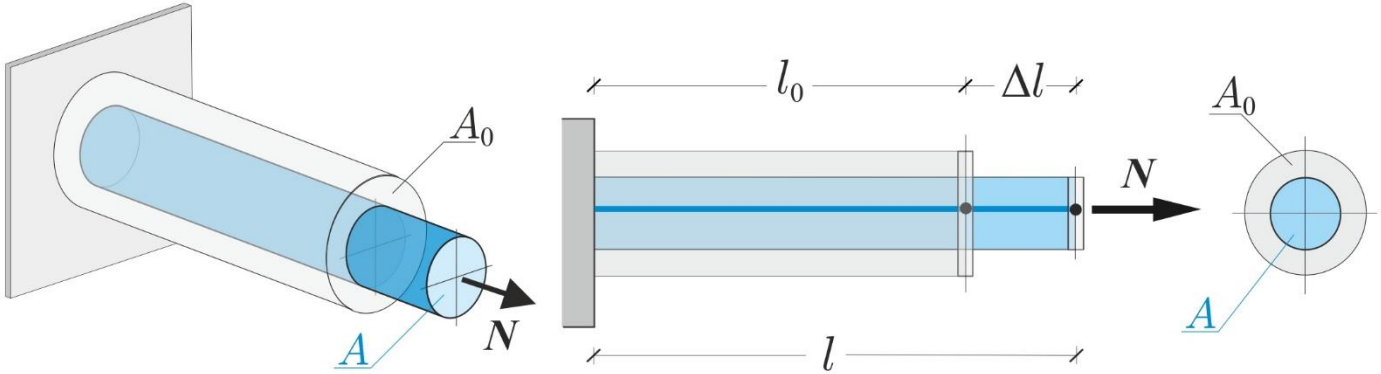


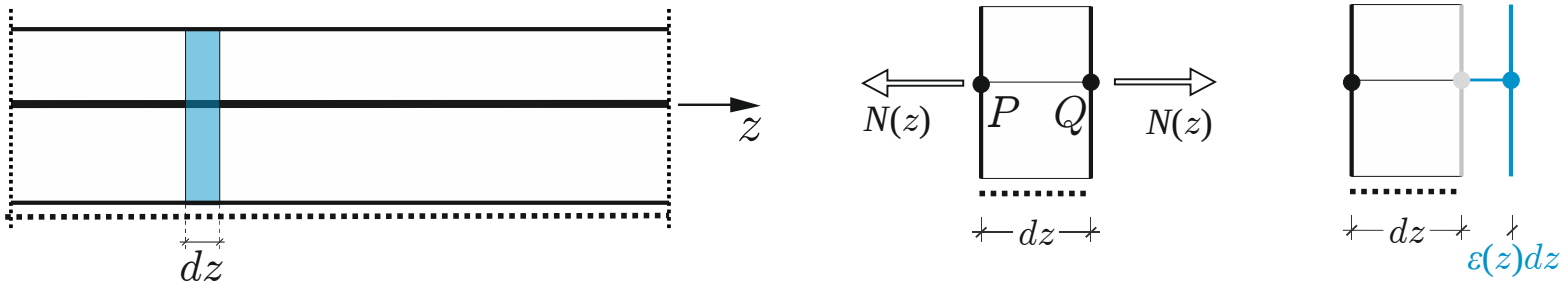
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

3. Legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
  - materiali duttili
  - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
  - Legge di Hooke
- **Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi**
- **Fenomenologia e caratterizzazione sperimentale 3D**
  - prova uniassiale
  - prova a torsione
- **Leggi di legame costitutivo per la trave**

3. Legame costitutivo: obiettivi





forza interna *deformazione*

$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z)$?

$T(z) \leftrightarrow \gamma(z)$?

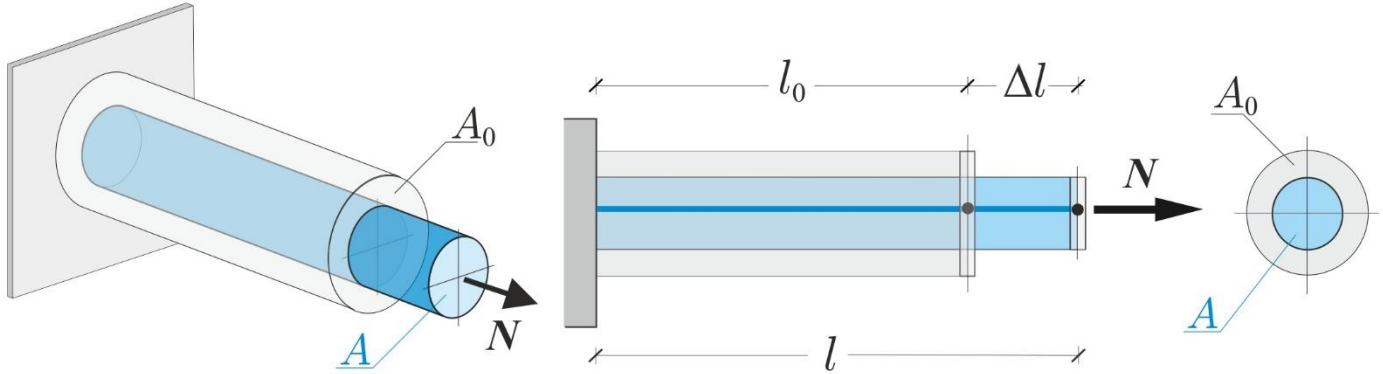
$M(z) \leftrightarrow \chi(z)$?

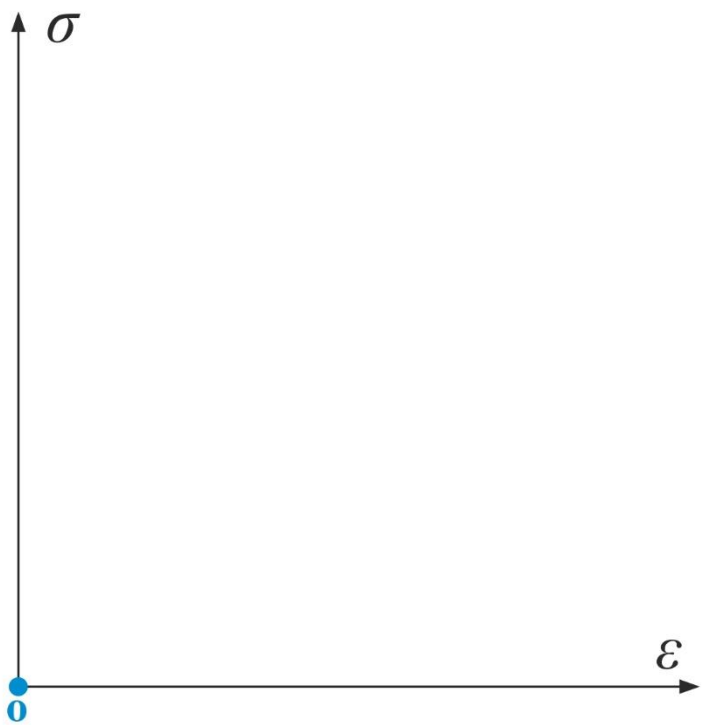
Materiale?

Indagini sperimentali:

- prova uniassiale
- prova a torsione

3. Legame costitutivo: prova uniassiale

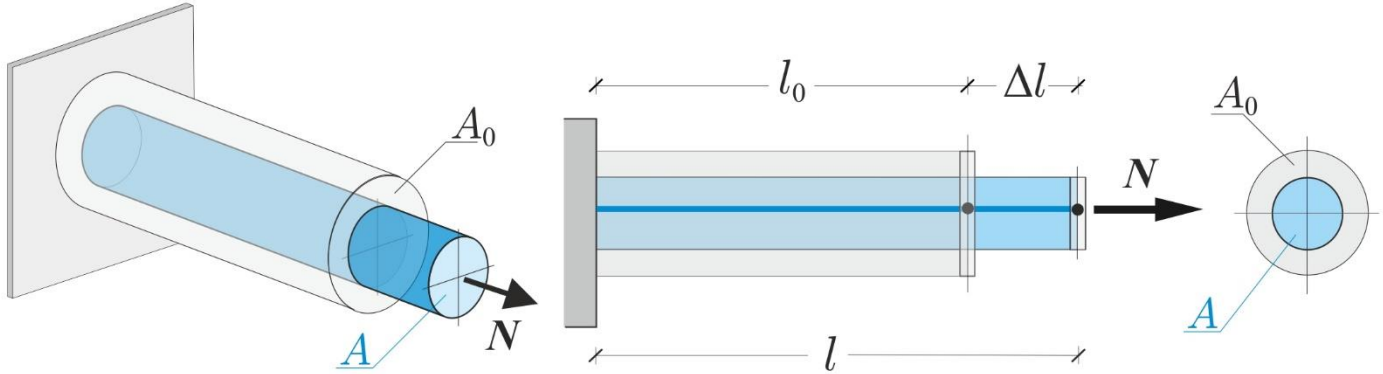


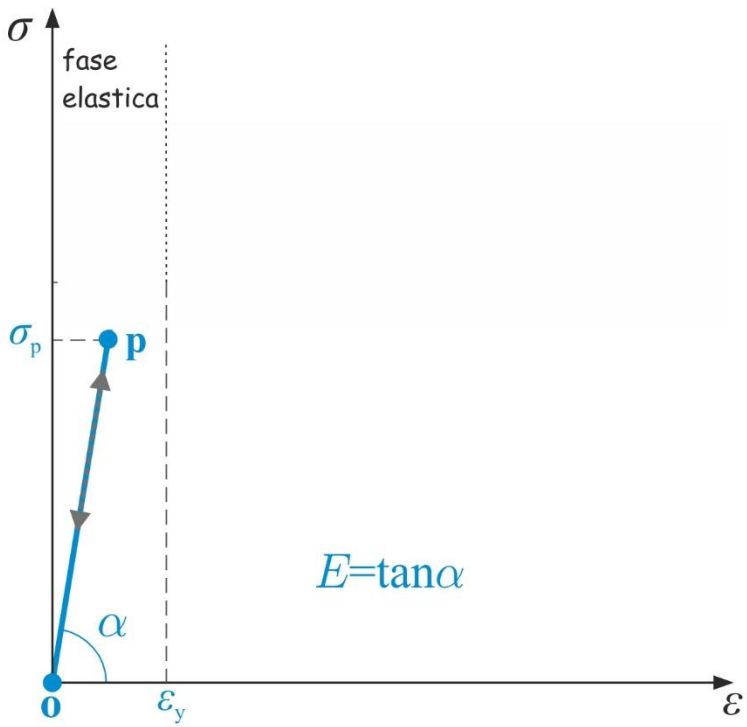


$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $\qquad$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili





FASE ELASTICA

o-p → ***comportamento elastico lineare***

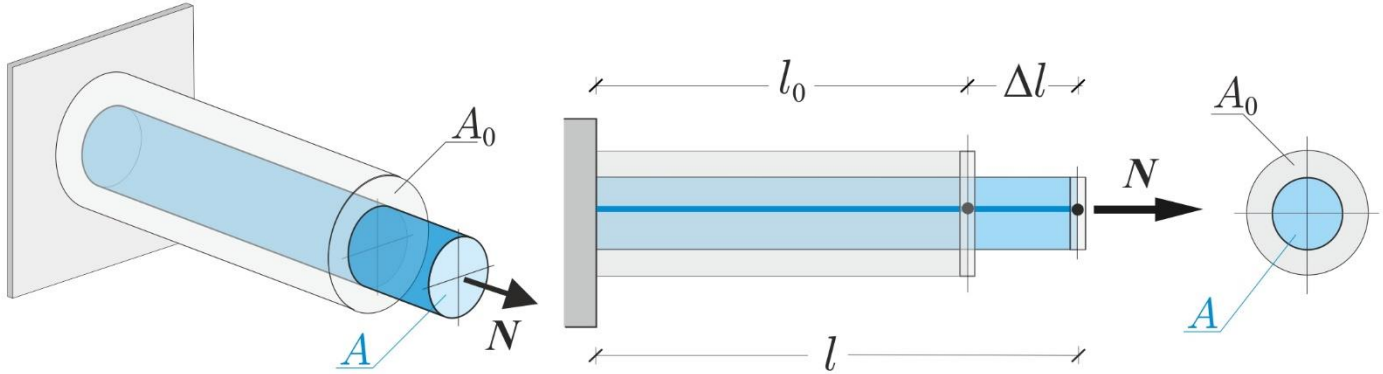
o *→ stato iniziale*

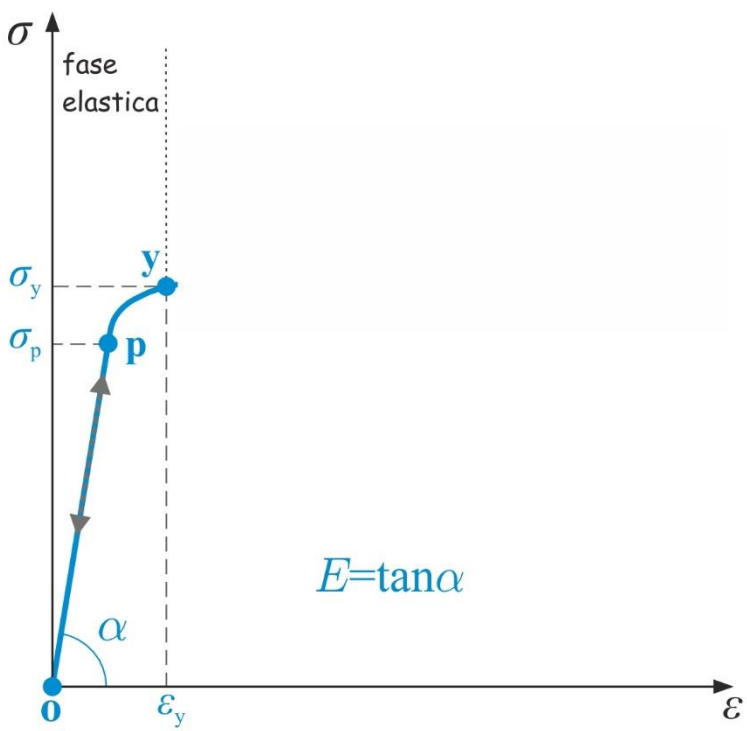
p *→ limite di proporzionalità*

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $\qquad$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili





FASE ELASTICA

o-p → ***comportamento elastico lineare***

o *→ stato iniziale*

p *→ limite di proporzionalità*

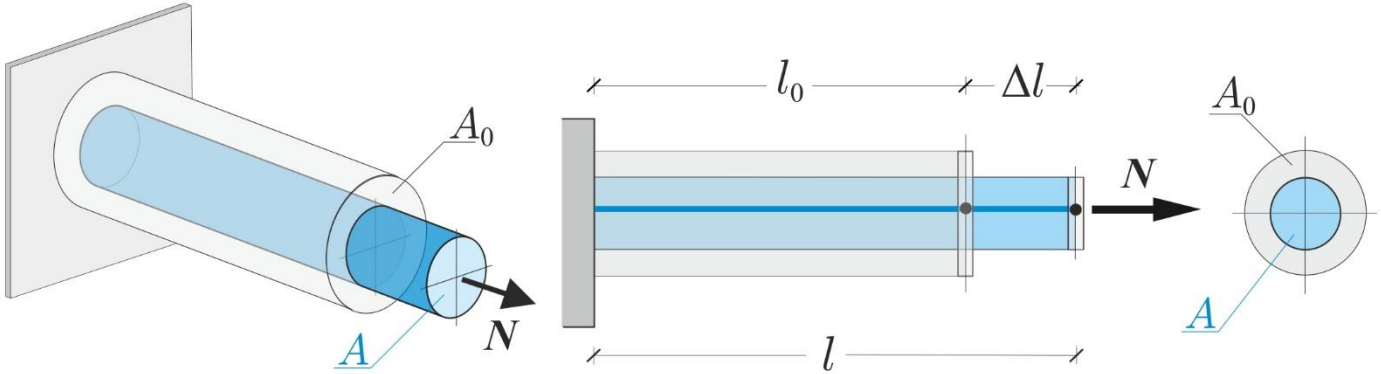
p-y → ***comportamento elast. non lineare***

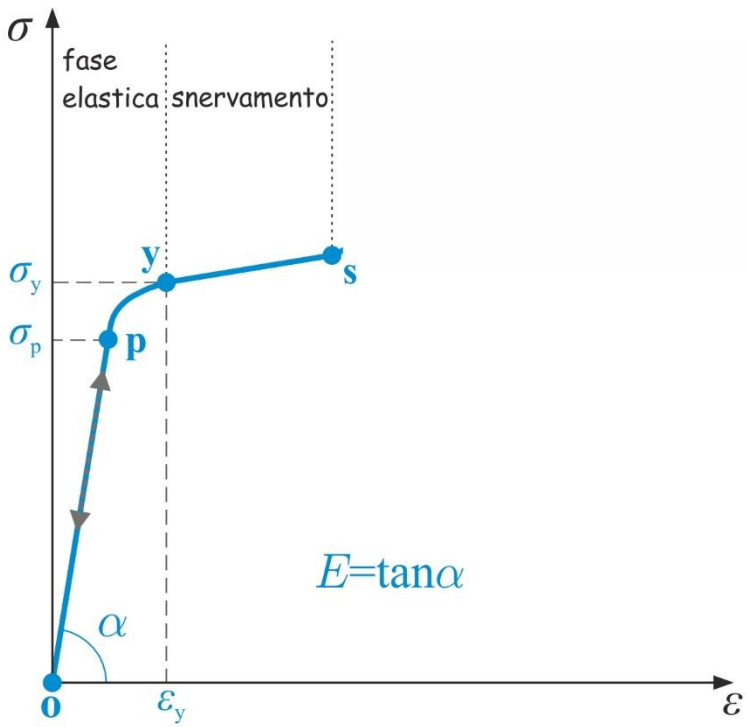
y *→ limite di elasticità*

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$[FL^{-2}] \qquad [0]$$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili





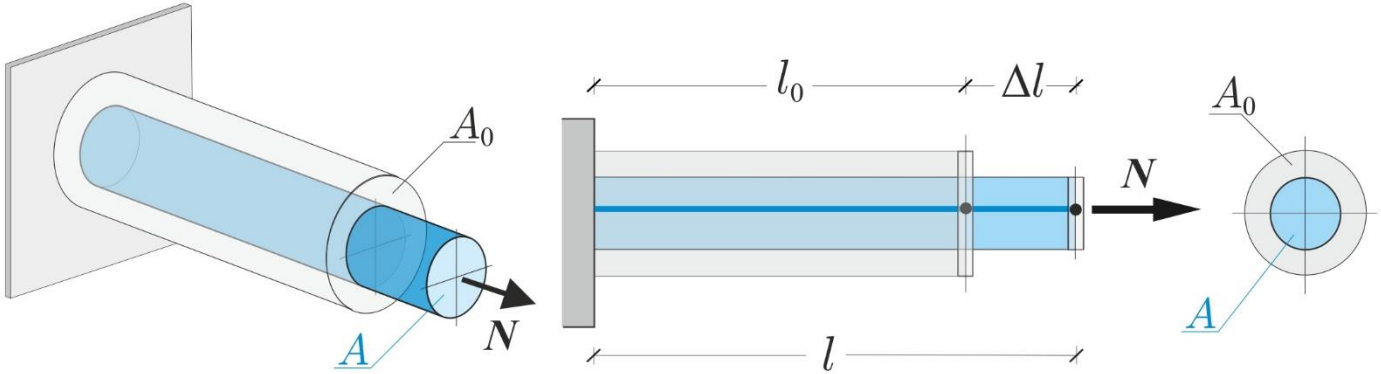
FASE PLASTICA

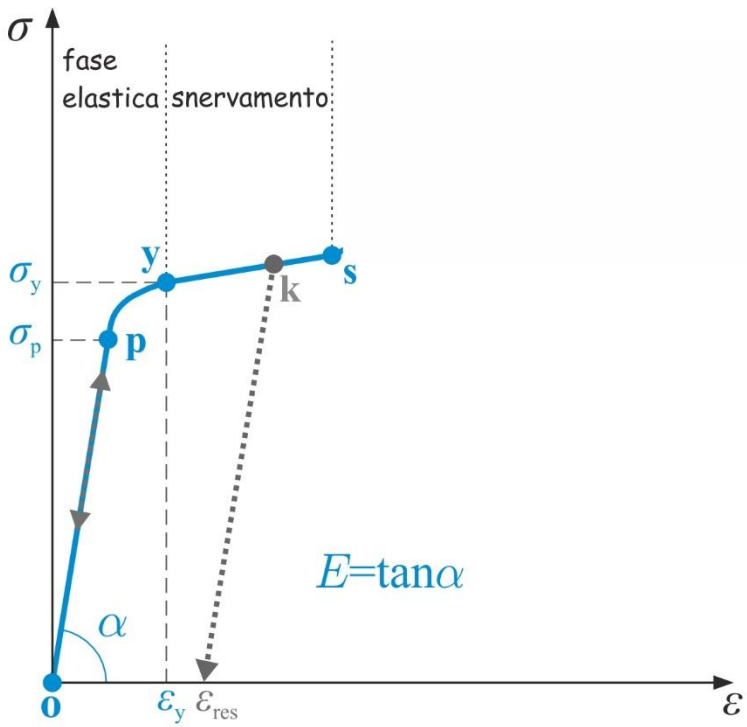
y-s → snervamento

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $\qquad$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili





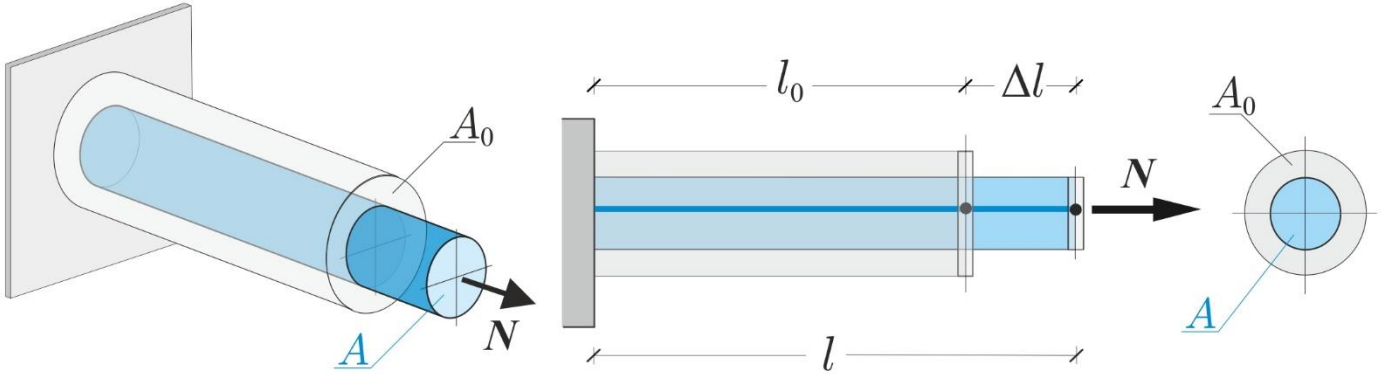
FASE PLASTICA

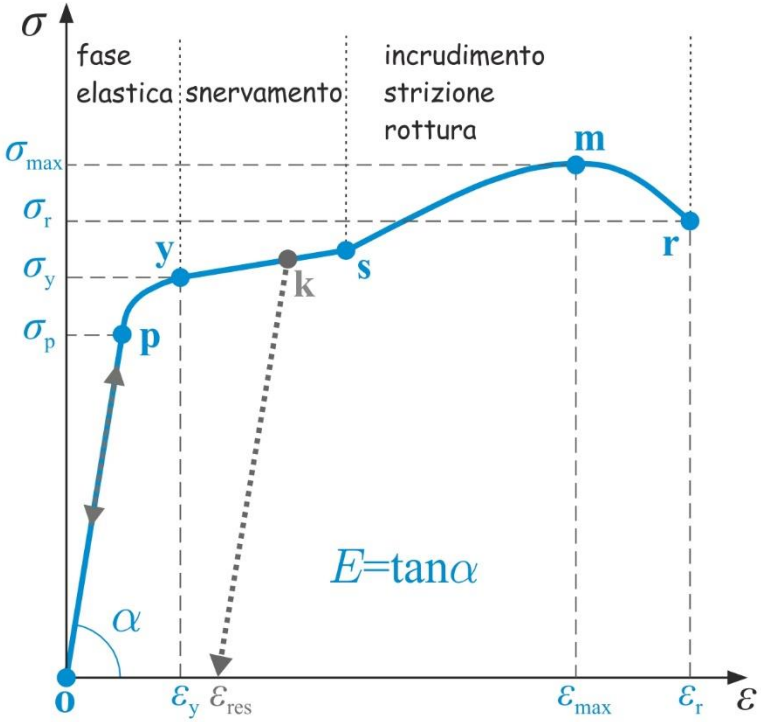
y-s → snervamento

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $\qquad$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

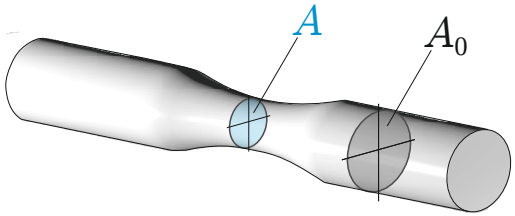




FASE PLASTICA

s-m → incrudimento

r → punto di rottura



$$A < A_0$$

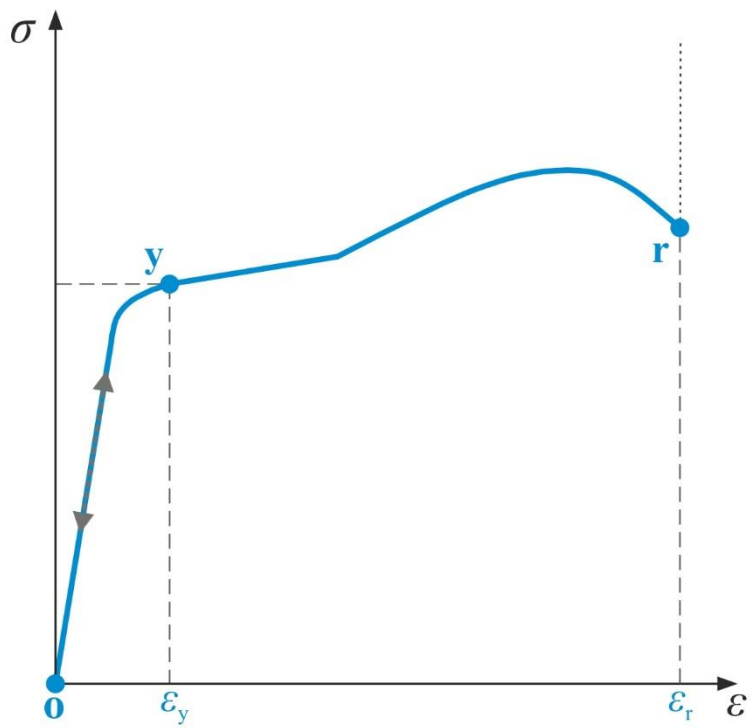
$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$$[FL^{-2}] \qquad [0]$$

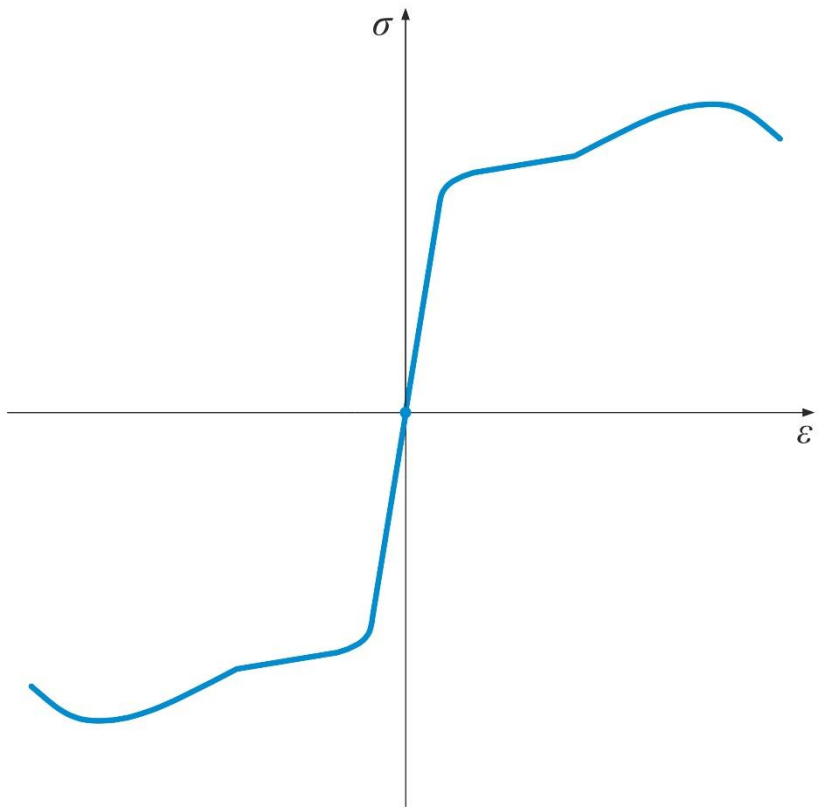
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

DUTTILITA'

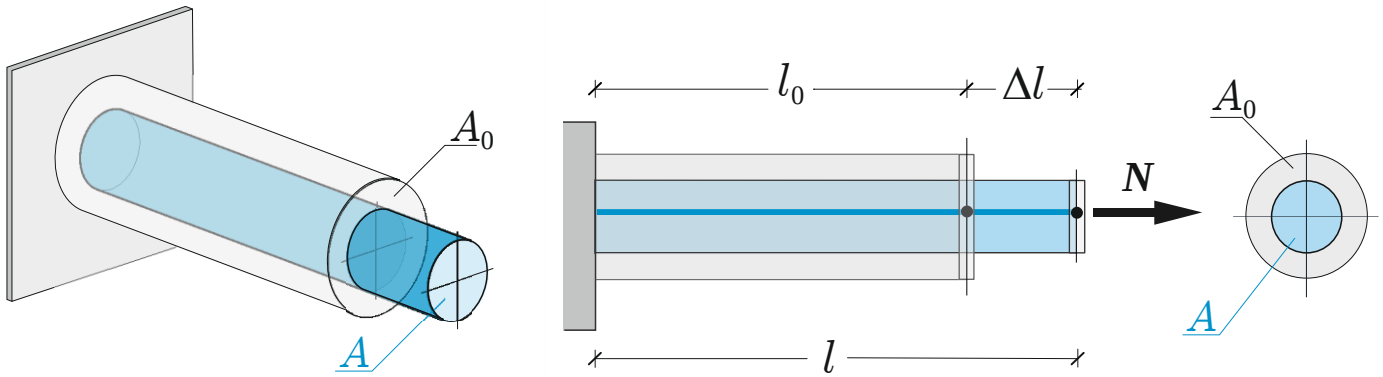
$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$

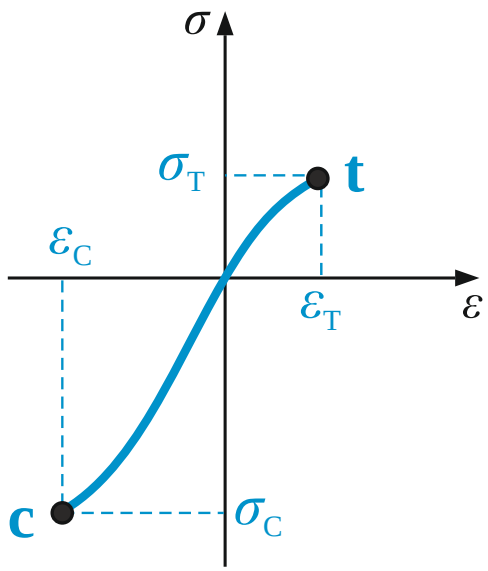


SIMMETRIA



3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili

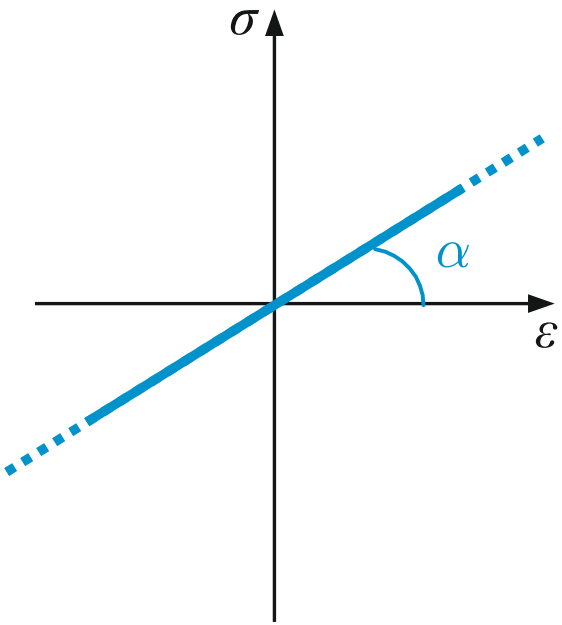




t → *punto di rottura a trazione*

c → *punto di rottura a compressione*

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



$$E = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad \text{Modulo di Young } [FL^{-2}]$$

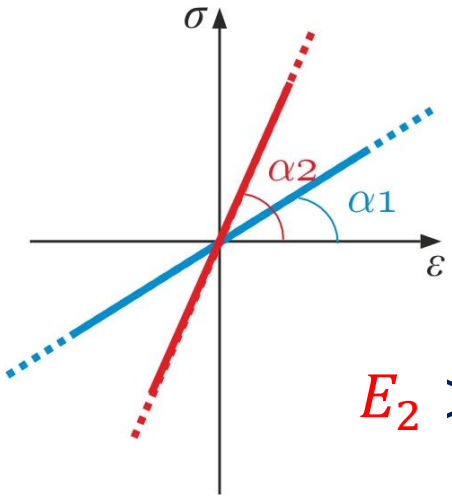
$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$\rightarrow$ Legge di Hooke

$$\sigma = m\,\varepsilon = \tan\alpha\,\varepsilon$$

(equazione cartesiana della retta passante per l'origine di coefficiente angolare m)



$$E_2 > E_1$$

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

Materiale	ϱ [kg/m^3]	E [GPa]	ν	α [°C^{-1}]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

provino

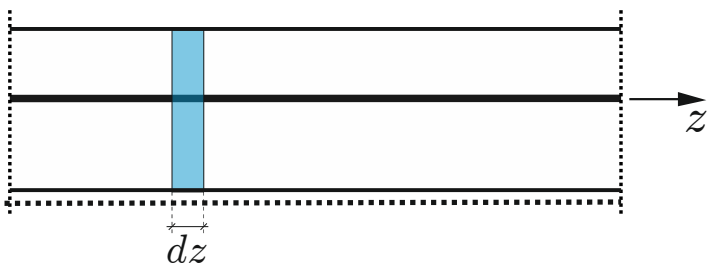
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

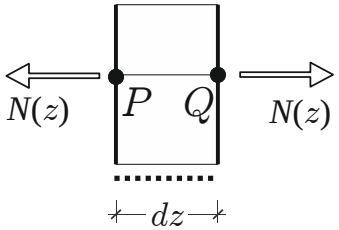
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

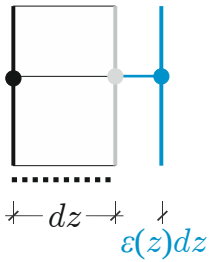
Elemento infinitesimo

$$\boxed{\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}}$$





forza interna



deformazione

3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young $[FL^{-2}]$

G → Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

Caratteristiche della sezione retta

A → Area $[L^2]$

A_t → Area di taglio $[L^2]$

$I = I_x$ → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x $[L^4]$

Rigidezze della trave

EA → Rigidezza assiale $[F]$

GA_t → Rigidezza di taglio $[F]$

EI → Rigidezza flessionale $[FL^2]$

$EA \to \infty$ Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \to \infty$ Trave indeformabile a taglio (Eulero-Bernouilli)

3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} + \varepsilon_t(z)$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t} + \gamma_t(z)$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI} + \chi_t(z)$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha \Delta T$$
$$\gamma_t(z) = 0$$
$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young $[FL^{-2}]$

α → coeff. di diltazione termica $[T^{-1}]$

3. Legame costitutivo: equazioni costitutive in presenza di deformazioni anelastiche $\varepsilon_t, \gamma_t, \chi_t$

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA} \quad +\alpha\Delta T$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Esempio: variazione di temperatura uniforme

$$\varepsilon_t(z) = \alpha\Delta T$$
$$\gamma_t(z) = 0$$
$$\chi_t(z) = 0$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young $[FL^{-2}]$

α → coeff. di diltazione termica $[T^{-1}]$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Comportamento elastico: *il materiale ritorna allo stato originale una volta rimossa la causa che provoca la deformazione: non rimane memoria del processo deformativo.*

Comportamento elastico lineare: *proporzionalità fra deformazioni e tensioni*

Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: sono sufficienti due soli moduli elastici (da ricavare sperimentalmente) per caratterizzare il materiale*

Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

3. Legame costitutivo: materiali isotropi e anisotropi

Materiali isotropi: acciaio, leghe metalliche etc.

Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: dei 21 moduli elastici* ***solo due*** *sono indipendenti.*

Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

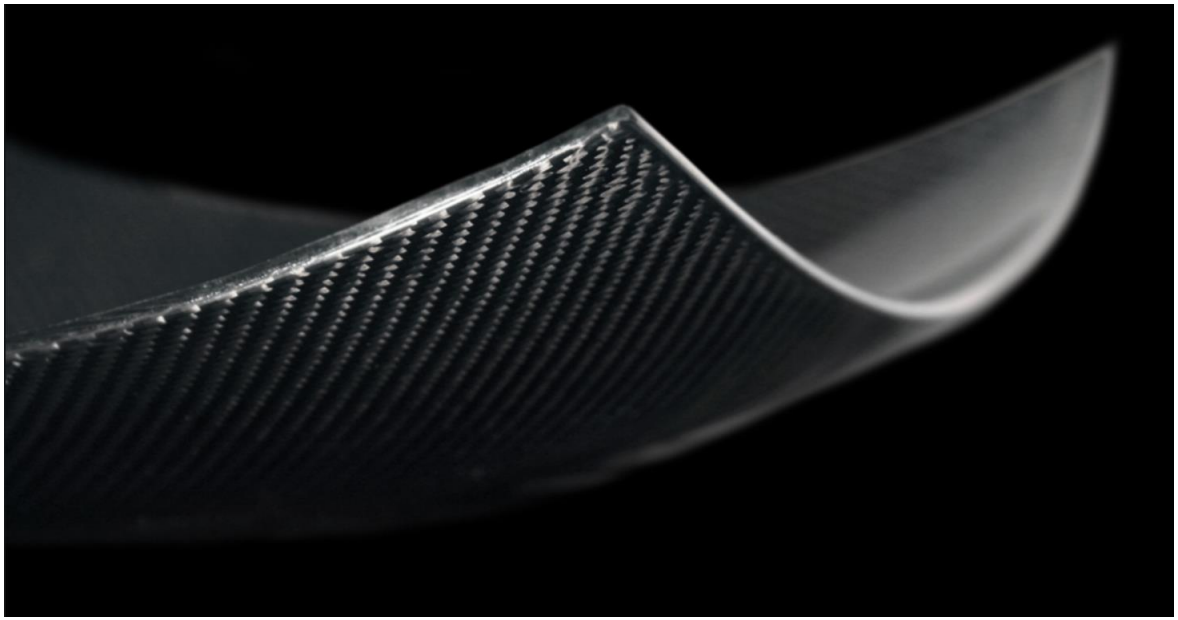
Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi: definizioni e esempi

Legno (fibre naturali)

Compositi in fibra di carbonio, compositi fibrorinforzati

I compositi sono così chiamati in quanto sono costituiti da due o più materiali: ad esempio le fibre di carbonio e una matrice, in genere di resina, la cui funzione è quella di tenere in posa le fibre.

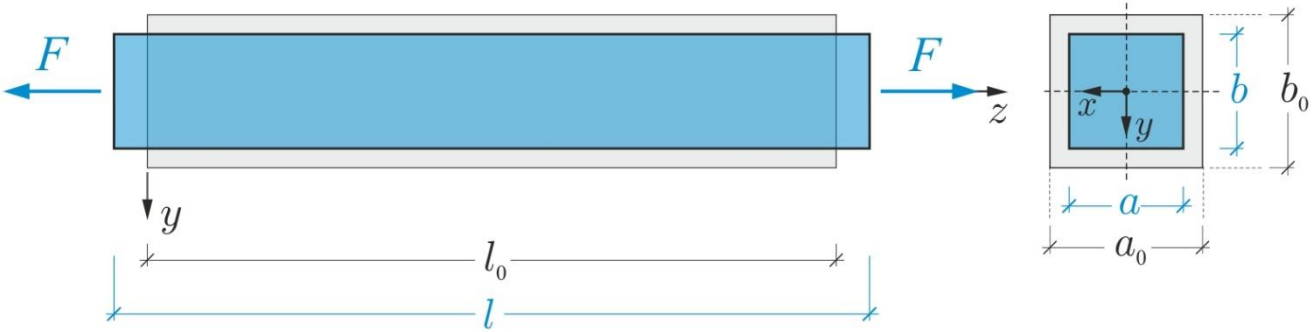
Il materiale composito in fibre di carbonio risulta non omogeneo e presenta spesso una spiccata *anisotropia*: le sue caratteristiche meccaniche presentano direzioni privilegiate.



3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

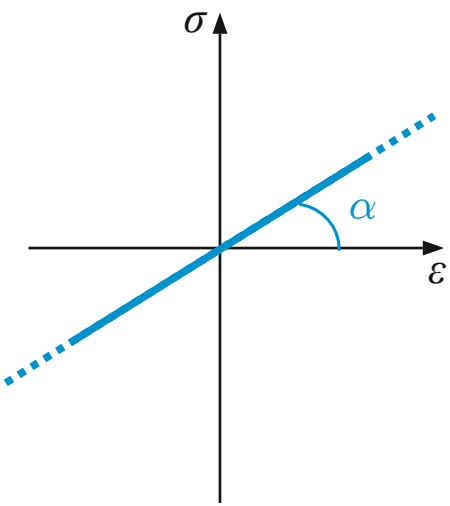
Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \qquad \sigma_z = \frac{F}{A}$$



$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \qquad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

$E = \tan\alpha \quad \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$\nu \quad \rightarrow$ Modulo di Poisson $[0]$ $\qquad 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici (αὔξησις : aumento)

$\nu \rightarrow$ Modulo di Poisson [0] $\boxed{\nu < 0}$

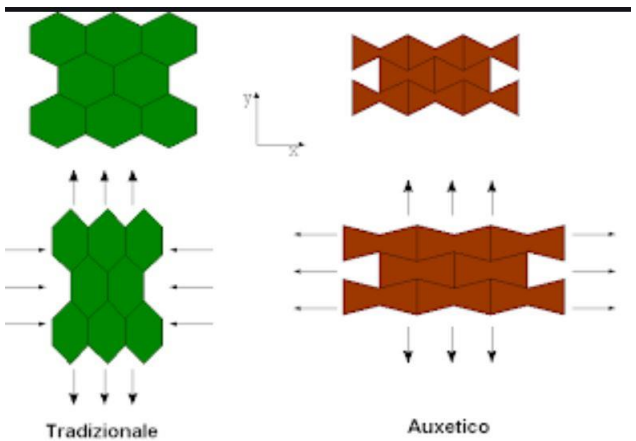
$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \qquad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

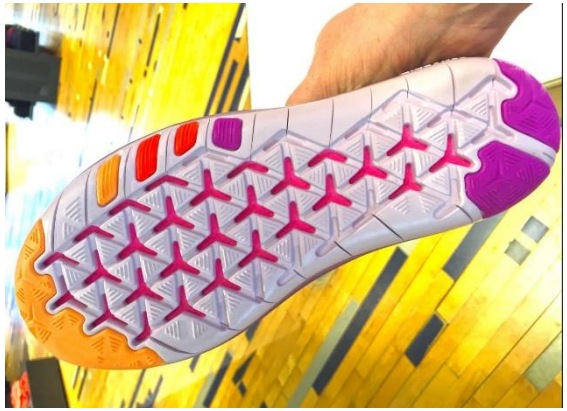
3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici (αὔξησις : aumento)

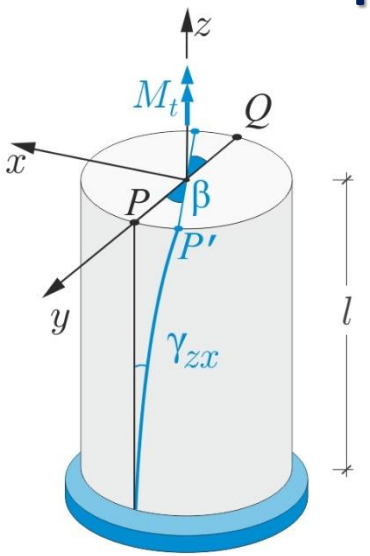
$$\nu < 0$$

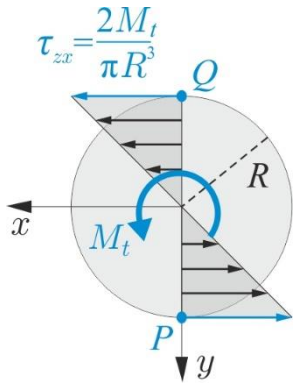


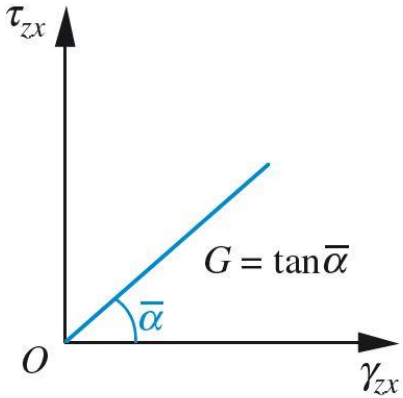


3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

Schema della prova sperimentale a torsione







$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \qquad \gamma_{zy} = \frac{1}{G}\tau_{zy} \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$G = \tan\bar{\alpha}$ → Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: parametri sperimentali

Parametri sperimentali caratteristici (2 soli indipendenti)

$E = \tan\alpha \quad \rightarrow$ Modulo di Young $[FL^{-2}]$

$G = \tan\bar{\alpha} \quad \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale $[FL^{-2}]$

$\nu \quad \rightarrow$ Modulo di Poisson $[0]$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: parametri sperimentali

Materiale	ϱ [kg/m^3]	E [GPa]	ν	α [°C^{-1}]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$