

# Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/statica](http://www.pcasini.it/disg/statica)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



# Instabilità Strutturale: instabilità elastica

- **Descrizione del fenomeno**
- **Definizioni e criterio di Eulero**
- **Ipotesi del modello**
- **Asta di Eulero (asta caricata di punta)**
- **Snellezza  $\lambda$  di una trave trave**

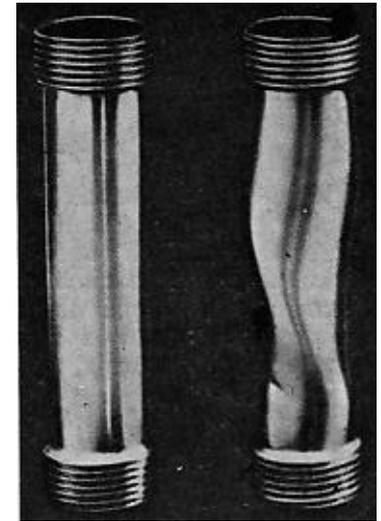
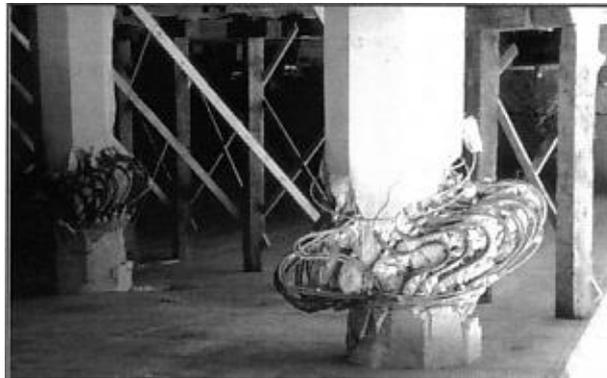


P Casini

*(Video)*

## Esempi di tipologie strutturali interessate dal fenomeno

- *Travi snelle soggette a compressione centrata o a pressoflessione*
- *Travi alte sezione sottile aperta soggette a flessione (instabilità flessio-torsionale)*
- *Lastre sottili (fenomeni locali di imbozzamento)*
- *Cilindri cavi sottili soggetti a pressione idrostatica esterna (ovalizzazione)*
- *Archi ribassati (fenomeni di snap-through)*



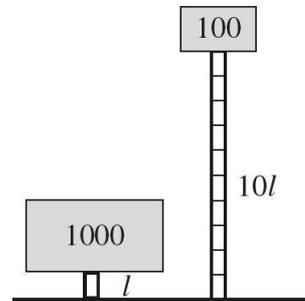
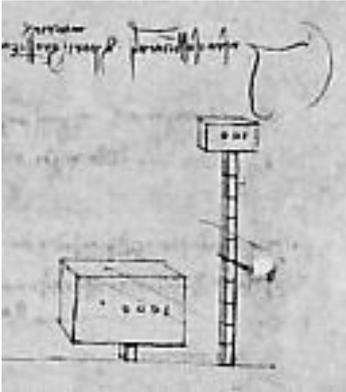
## Descrizione del fenomeno

- *Carichi critici*
- *Perdita di stabilità della configurazione di equilibrio*
- *Materiale in fase elastica quando il fenomeno inizia a manifestarsi*



(Video)

## Studi sperimentali di Leonardo (Cod. Atl. f. 410r)



*Infra i sostentacoli di pari materia e grossezza quello fia di maggiore forza del quale la sua lunghezza fia più breve. Se collocherai un sostentacolo di pari grossezza e materia il quale resista a 100 e che poi tu ne tolga via i nove decimi dell'altezza, tu troverai che il suo rimanente, essendo nelli estremi sostenuto, resisterà a 1000. (Cod. Atl. f. 410r)*

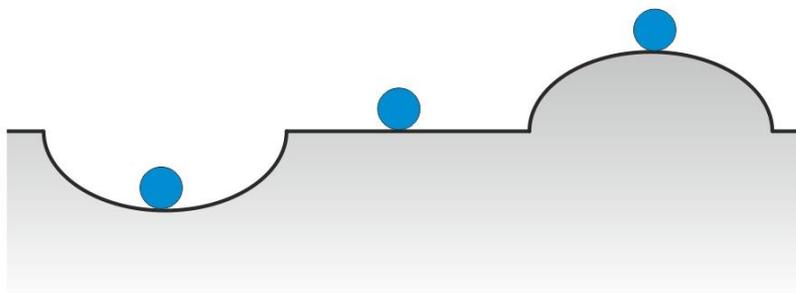
## Modello di Eulero (1707-1783)



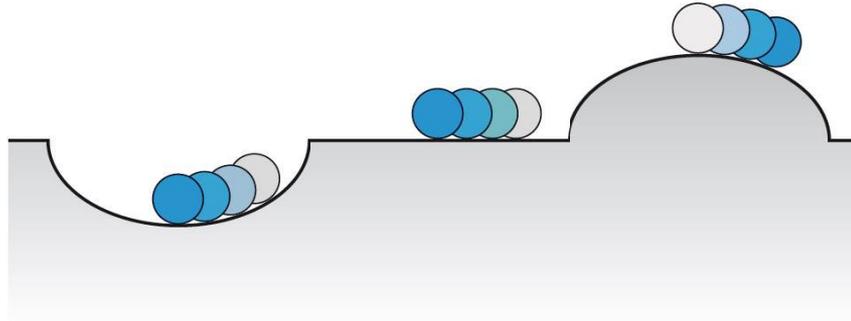
L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietati gaudentes*, 1744

L. Euler, *Sur la force des colonnes*, Hist. acad. sci, pp. 252-282, 1759.

## *Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio*



## *Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio*



- Posizione di **equilibrio stabile**
- Posizione di **equilibrio indifferente**: sono possibili più posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale
- Posizione di **equilibrio instabile**

## Carico critico

- *Valore della forza esterna in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere stabile*

## Sistema meccanico euleriano

- *Sistema meccanico soggetto a forze conservative e che esibisce un comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)*



## Criterio di Eulero (criterio statico)

- *I carichi critici esprimono i valori delle forze esterne in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere unica e diventano possibili (infinite) posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale*

## Ipotesi del modello.

**Ipotesi 1 (cinematica):** ‘piccoli spostamenti’, il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

**Ipotesi 2 (statica):** le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) del sistema.

**Ipotesi 3 (materiale):** si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

**Esistenza e Unicità della soluzione**

# Instabilità elastica: ipotesi

- **Ipotesi 0** Il sistema è Euleriano: è quindi soggetto a forze conservative e esibisce un comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)
- 

## Nuove ipotesi

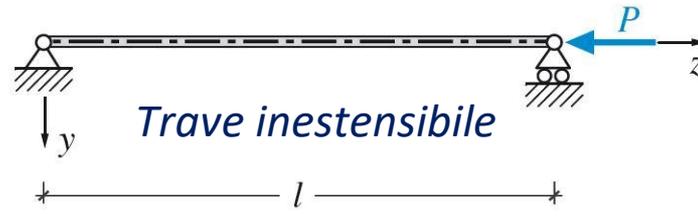
**Ipotesi 1 (cinematica):** ‘spostamenti finiti’, il campo di spostamento in uno o più punti può presentare modulo paragonabile alle dimensioni caratteristiche del sistema

**Ipotesi 2 (statica):** le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

**Ipotesi 3 (materiale):** si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

## Posizione del problema

- *Determinare il valore (i valori) della forza assiale  $P$  in corrispondenza del quale la configurazione di equilibrio diventa instabile. Si consideri per iniziare lo schema di **trave appoggiata** e la **sezione circolare** di raggio  $R$  ( $I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4$ )*



## Ipotesi

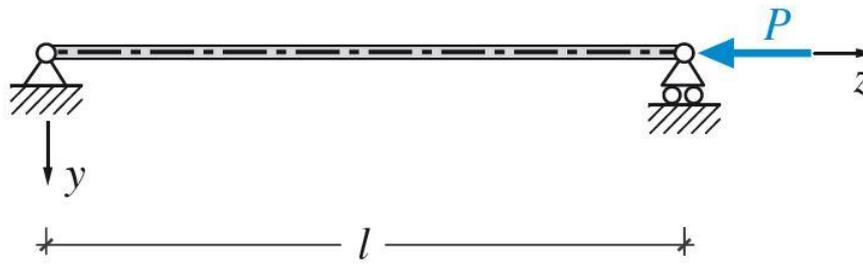
**Ipotesi 1 (cinematica):** ‘piccoli spostamenti’, il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

**Ipotesi 2 (statica):** le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

**Ipotesi 3 (materiale):** si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

## Soluzione banale

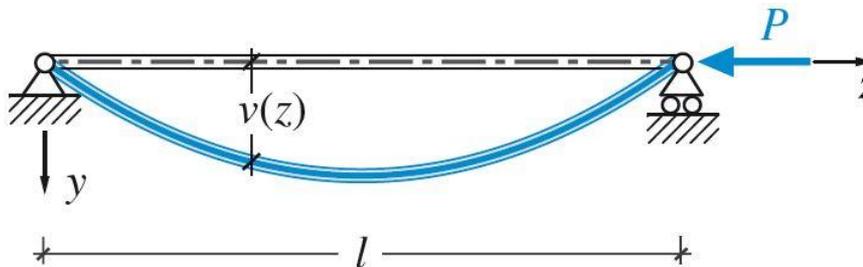
$$v(z) = 0, z \in [0, l]$$



$v(z)$ : spostamento trasversale [L] positivo se concorde all'asse locale  $y$

## Applicazione del criterio di Eulero

Determinare, se esistono, i valori del carico assiale  $P$  in corrispondenza dei quali divengano possibili soluzioni del problema elastico diverse da quella banale (cioè soluzioni con  $v(z) \neq 0$ ). Tali valori sono i carichi critici cercati.



## Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

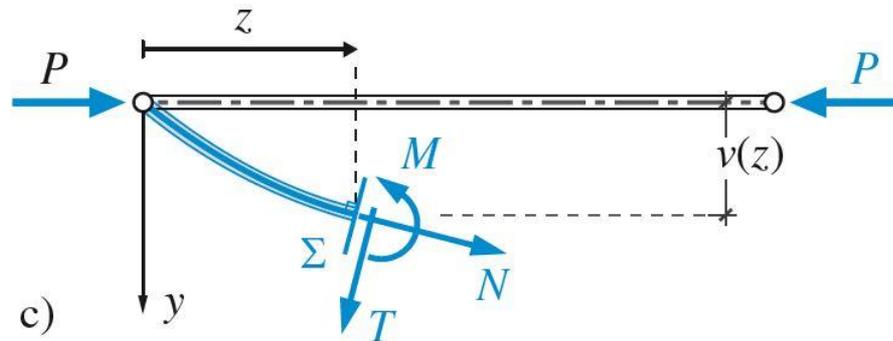
$$M_{\Sigma} = 0 \Rightarrow M(z) - Pv(z) = 0 \Rightarrow -EIv''(z) - Pv(z) = 0$$

$$v''(z) + \frac{P}{EI}v(z) = 0 \quad (I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4)$$

Poiché  $\frac{P}{EI} > 0$ , posto  $\frac{P}{EI} = \kappa^2$ , si ha la seguente equazione della linea elastica

$$v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0 \quad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

da integrare con le opportune condizioni al contorno



# Instabilità elastica: asta di Eulero

$$v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0 \quad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

## Soluzione generale

$$v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z) \quad \kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

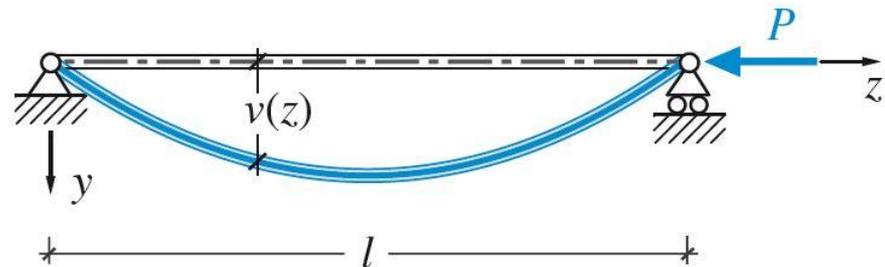
**Soluzione banale:**  $C_1 = 0, C_2 = 0$

A norma del criterio di Eulero si devono trovare eventuali valori del carico  $P = \kappa^2 EI$  in corrispondenza dei quali sono possibili **soluzioni non banali**:  $C_1 \neq 0$ , e/o  $C_2 \neq 0$

## Condizioni al contorno

$$v(0) = 0$$

$$v(l) = 0$$



**Condizioni al contorno**  $v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z)$

$$v(0) = 0$$

$$C_2 = 0$$

$$v(l) = 0$$

$$C_1 \sin(\kappa l) + C_2 \cos(\kappa l) = 0$$

Sistema di equazioni algebrico lineare omogeneo nelle incognite  $C_1$  e  $C_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, ammette soluzione diversa dalla banale solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} = -\sin(\kappa l) = 0$$

**Soluzioni non banali  $v(z) \neq 0$**

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \quad \& \quad \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 \neq 0 \end{array}$$

**Carichi critici (criterio di Eulero)**

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \Rightarrow \kappa = n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \kappa^2 = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$$

*Carichi critici:* 
$$\boxed{P_{cr,n} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots}$$

*Carico critico euleriano ( $n = 1$ ):*

$$\boxed{P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}}$$

**Soluzioni non banali  $v(z) \neq 0$**

$$\sin(\kappa l) = 0$$

$$\& \quad \begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

**Deformate critiche**

$$\sin(\kappa l) = 0 \Rightarrow \kappa = n \frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow$$

$$C_1 \neq 0, C_2 = 0 \Rightarrow v(z) = C_1 \sin(\kappa z)$$

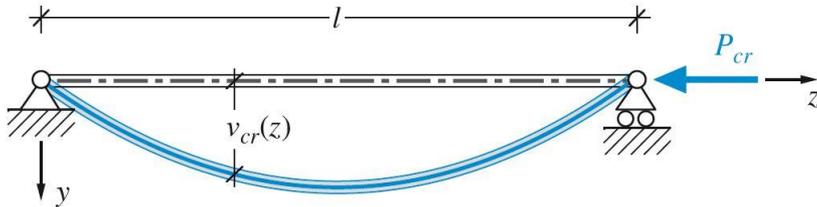
*Deformate critiche:* 
$$v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n \frac{\pi}{l} z\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*Deformata critica euleriana ( $n = 1$ ):*

$$v_{cr}(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right), \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

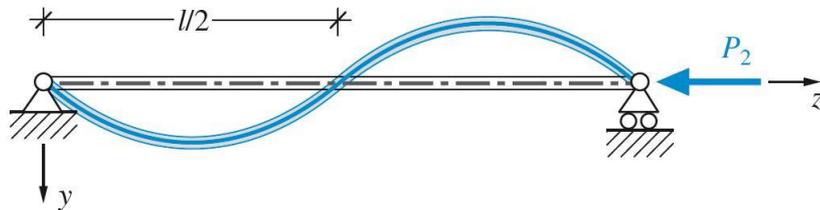
# Instabilità elastica: asta di Eulero

**Deformate critiche**  $v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right)$   $C_1 \neq 0$  ( $\infty^1$  soluzioni)



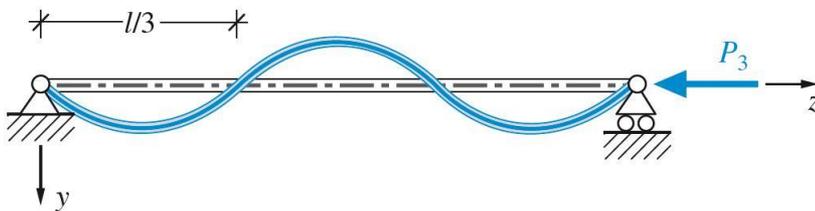
**Carico critico euleriano  $n = 1$ :**

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



**Carico critico  $n = 2$ :**

$$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_{cr}$$



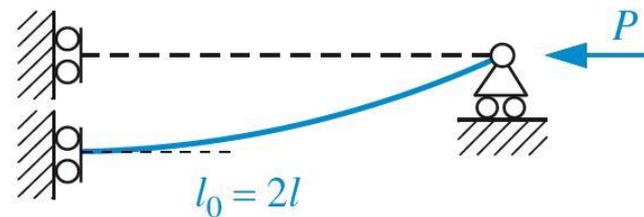
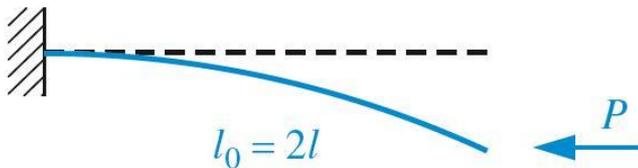
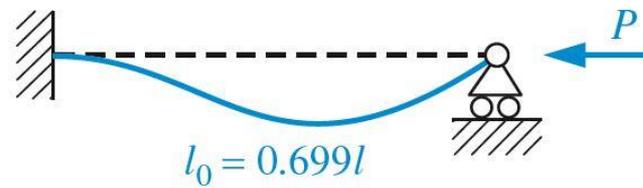
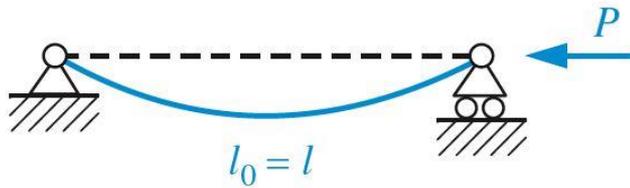
**Carico critico  $n = 3$ :**

$$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_2 > P_{cr}$$

## Condizioni di vincolo diverse

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$l_0$ : lunghezza libera di inflessione  
(dipende dalla lunghezza  $l$  e dalle condizioni di vincolo)



## Sezioni diverse dalla sezione circolare

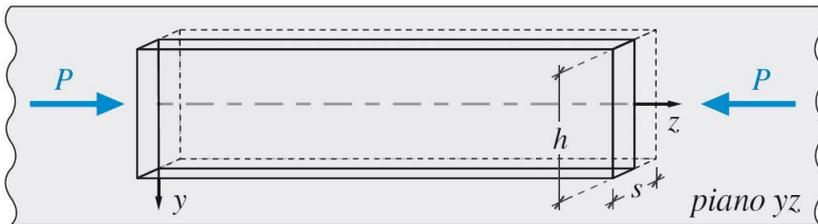
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$l_0$ : lunghezza libera di inflessione

Se la sezione non è circolare e risulta  $I_x \neq I_y$ , il carico critico più pericoloso è quello più piccolo: si continua quindi a utilizzare la formula precedente ponendo:

$$I = \min(I_x, I_y)$$

### Esempio: asta a sezione rettangolare sottile



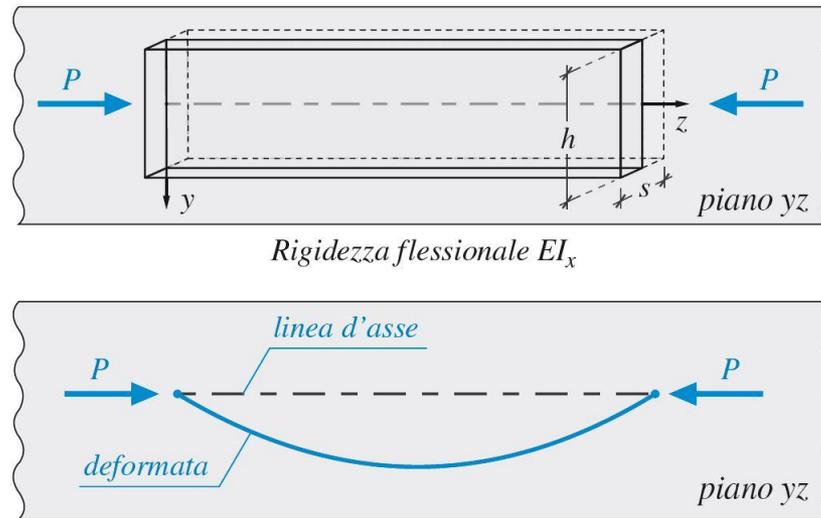
$$I_x = \frac{1}{12} sh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} hs^3$$

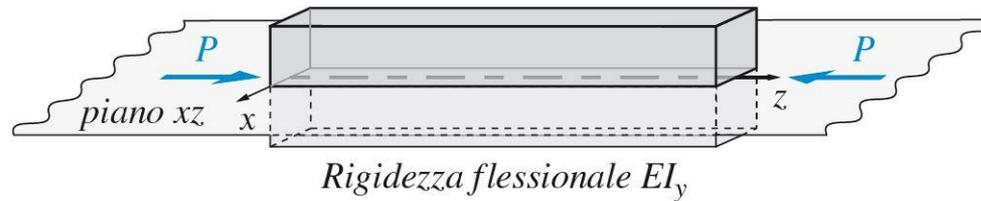
$$I = \min(I_x, I_y) = I_y = \frac{1}{12} hs^3$$

## Piano 'forte' di inflessione

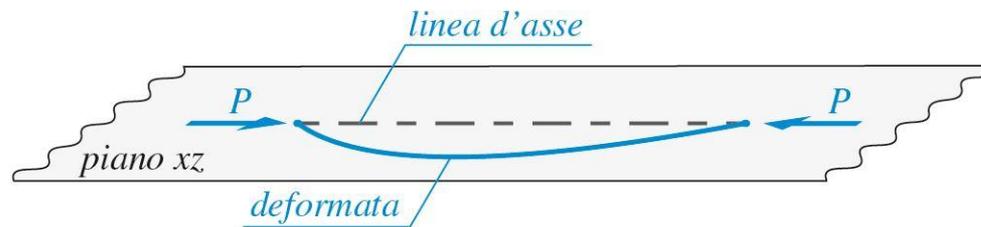
$$I_x = \frac{1}{12} sh^3$$



## Piano 'debole' di inflessione



$$I_y = \frac{1}{12} h s^3$$



# Instabilità elastica: asta di Eulero

## Snellezza di una trave

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2 A} = \pi^2 \frac{E}{l_0^2} \rho^2 = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l_0^2}{\rho^2}\right)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \min(\rho_x, \rho_y)$$

## Snellezza $\lambda$

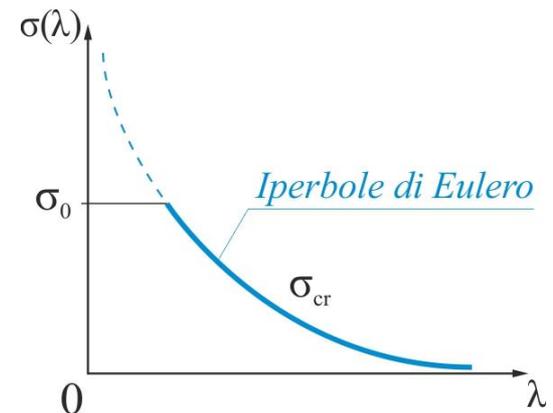
$$\lambda = \frac{l_0}{\rho}$$

## Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

## Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se  $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_0$  allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica



## Iperbole di Eulero

$$\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

## Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se  $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$  allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica

## Snellezza limite $\lambda_0$

$$\sigma_{cr}(\lambda_0) = \sigma_o = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

$$\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o \quad \Rightarrow \quad \lambda > \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

**Travi snelle:**  $\lambda > \lambda_0$     **Travi tozze:**  $\lambda < \lambda_0$

