

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

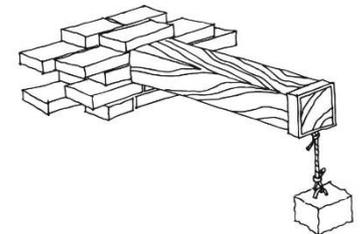
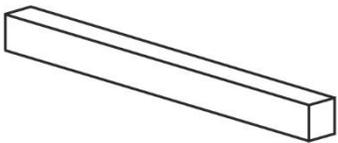
Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020





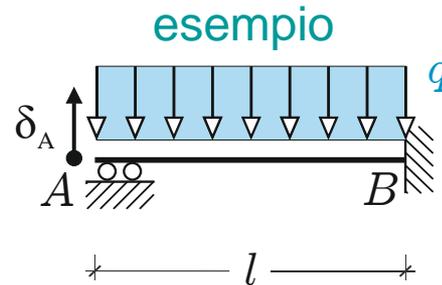
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



Trave elastica 1D: analisi strutturale

Obiettivi: Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato soggetto ad azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.



- forze esterne,
- variazioni termiche,
- cedimenti vincolari,
etc.

- geometria,
- materiali costitutivi,
- condizioni di vincolo,
etc.

INCOGNITE

- spostamenti,
deformazioni
- forze interne,
tensioni

4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

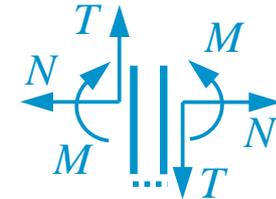
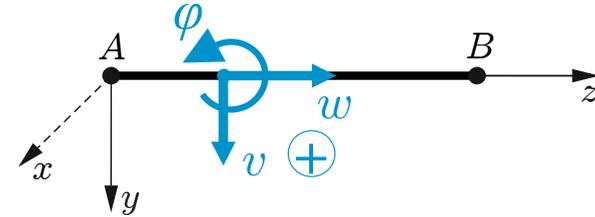
Cinematica

$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione

Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



4. Problema elastico: formulazione analitica

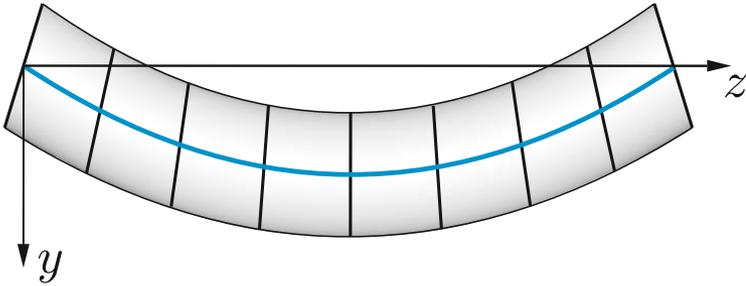
Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

??

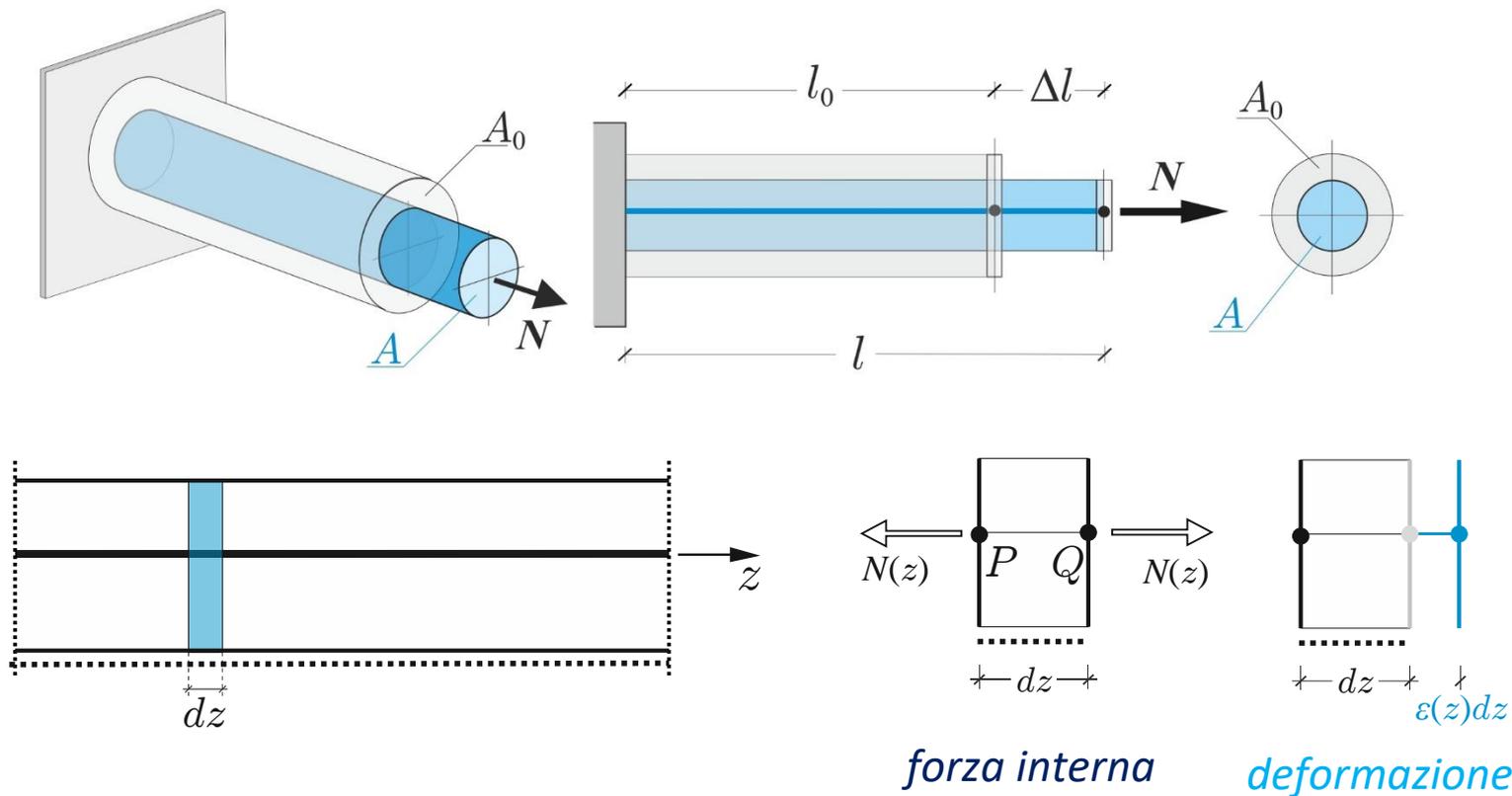


Parte III - Il modello di trave elastica 1D

3. Legame costitutivo

- **Obiettivi**
- **Prova uniassiale**
- **Fenomenologia**
 - materiali duttili
 - materiali fragili
- **Comportamento elastico lineare**
 - Legge di Hooke
- **Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi**
- **Fenomenologia e caratterizzazione sperimentale 3D**
 - prova uniassiale
 - prova a torsione
- **Leggi di legame costitutivo per la trave**

3. Legame costitutivo: obiettivi



$$N(z) \leftrightarrow \varepsilon(z) \quad ?$$

$$T(z) \leftrightarrow \gamma(z) \quad ?$$

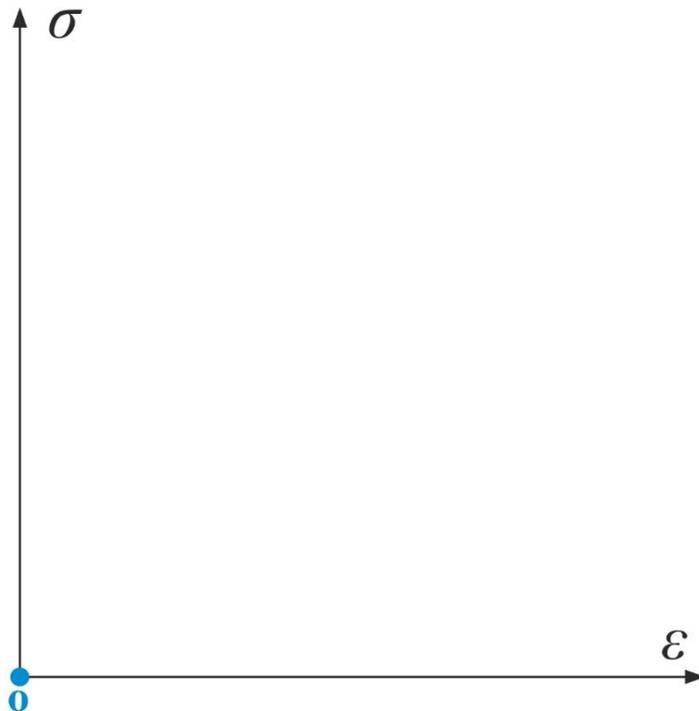
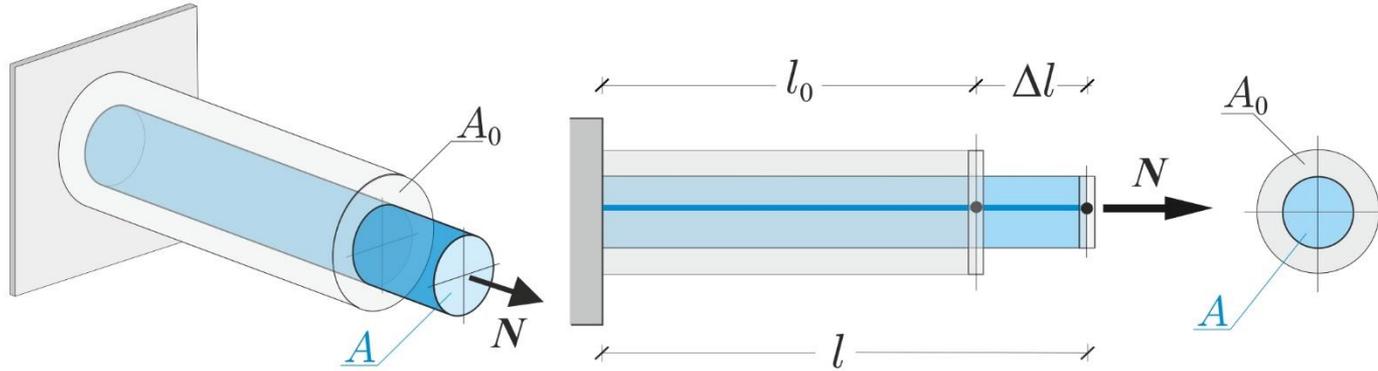
$$M(z) \leftrightarrow \chi(z) \quad ?$$

Materiale?

Indagini sperimentali



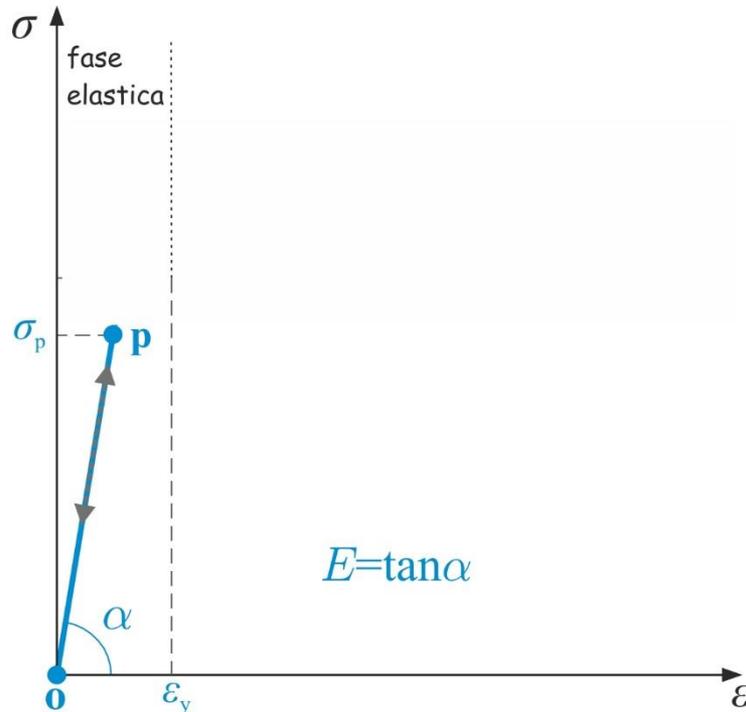
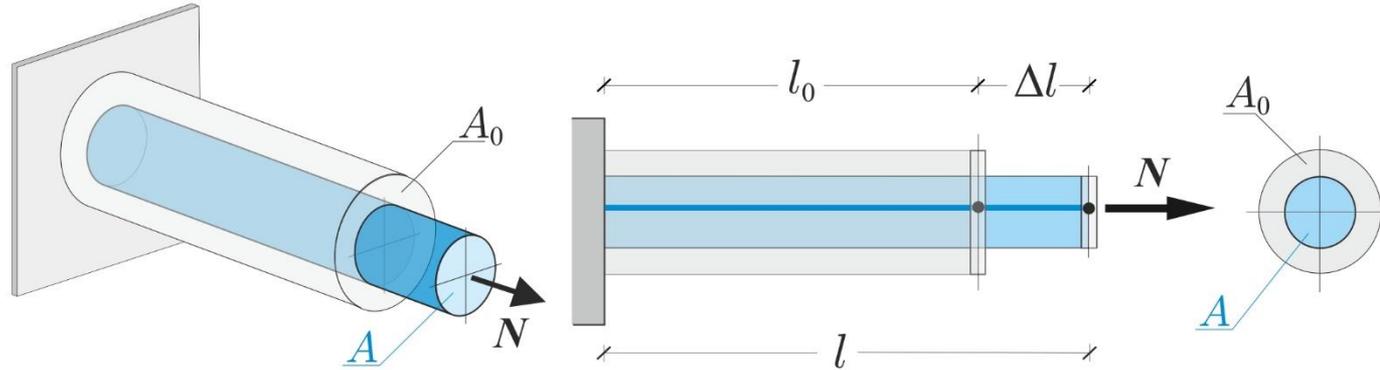
3. Legge costitutiva: prova uniassiale



$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

o-p → comportamento elastico lineare

o → stato iniziale

p → limite di proporzionalità

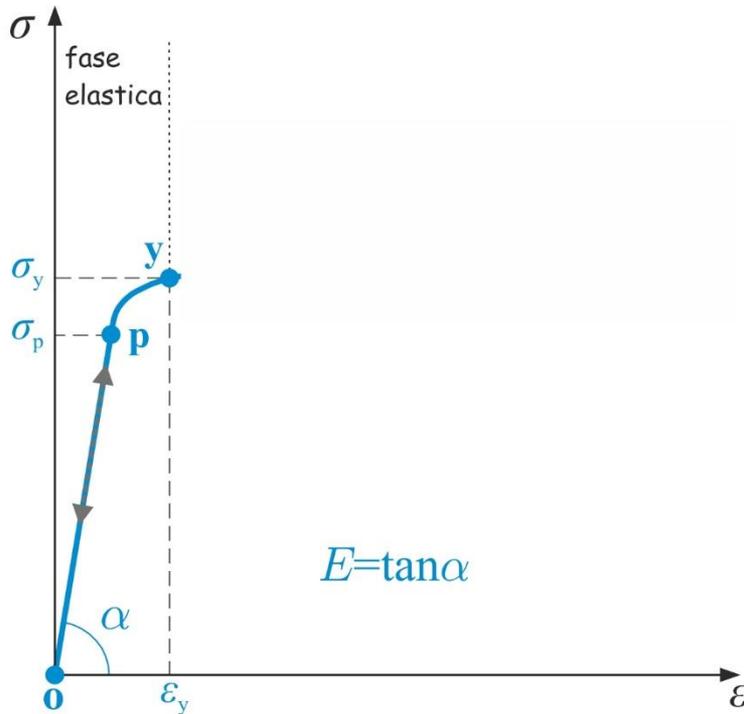
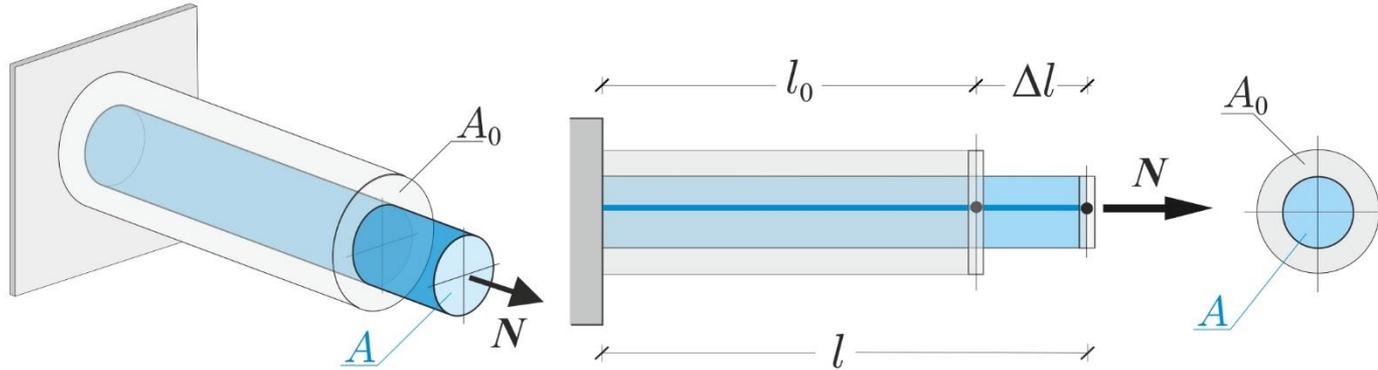
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE ELASTICA

o-p → *comportamento elastico lineare*

o → *stato iniziale*

p → *limite di proporzionalità*

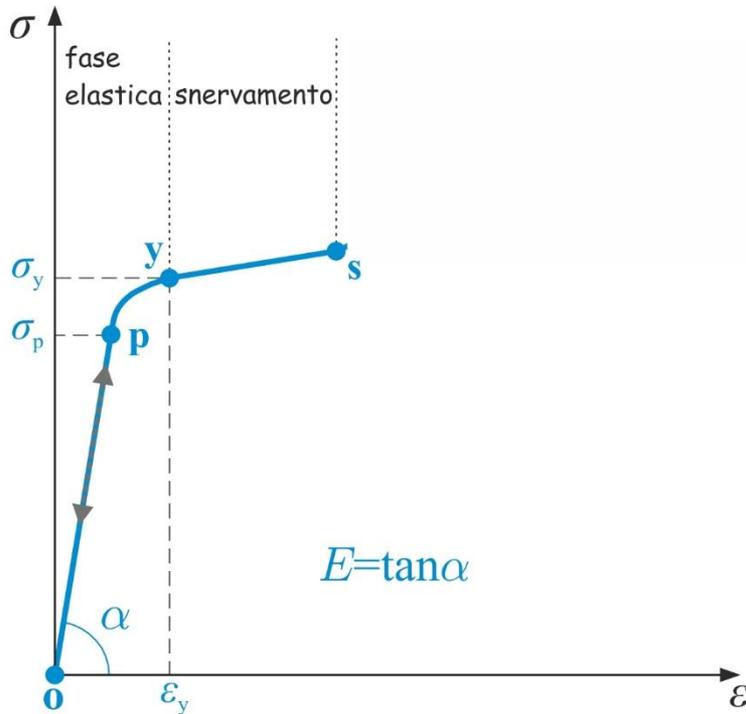
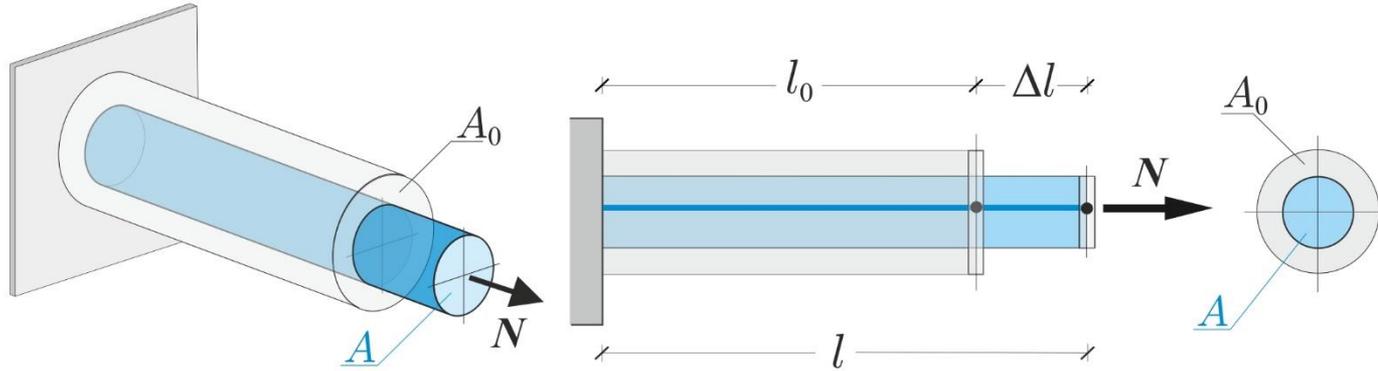
p-y → *comportamento elast. non lineare*

y → *limite di elasticità*

$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[FL^{-2}]$ $[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

y-s → *snervamento*

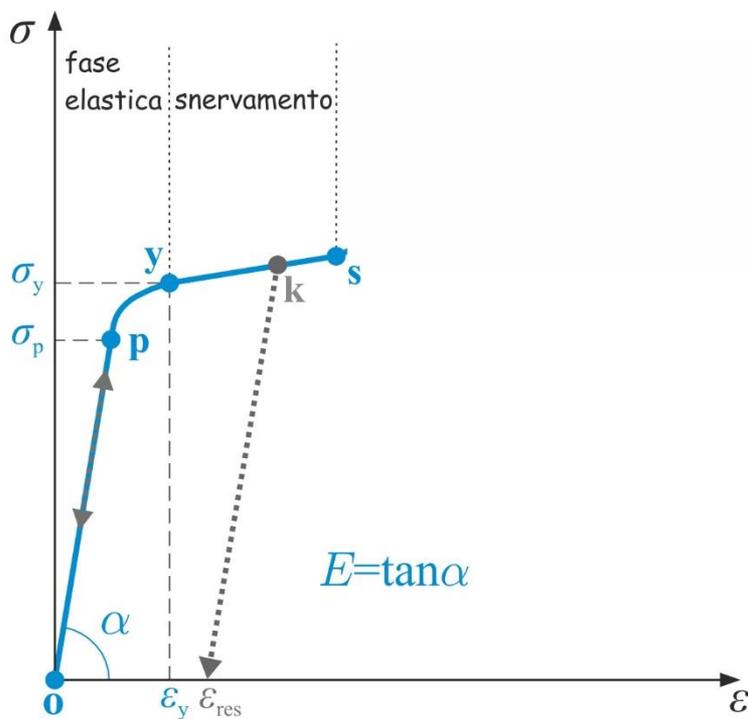
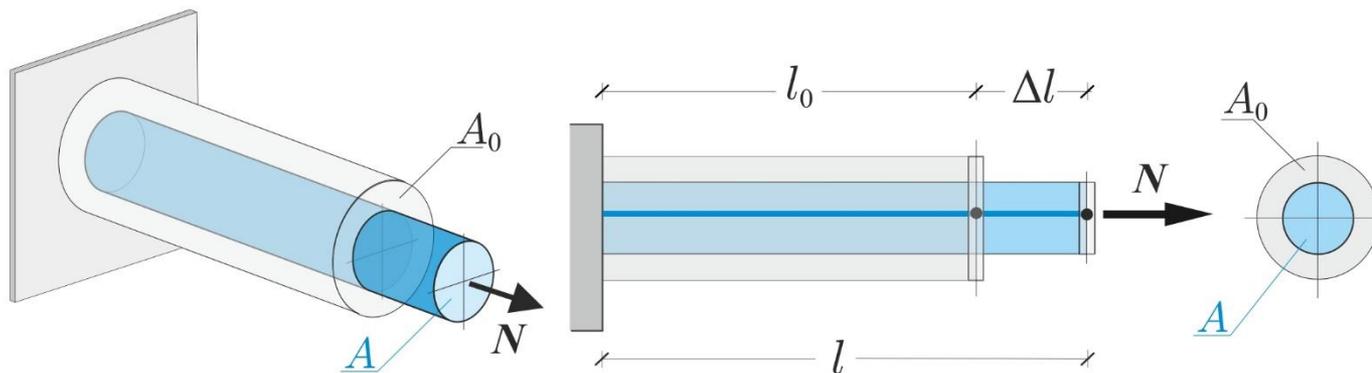
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

y-s → *snervamento*

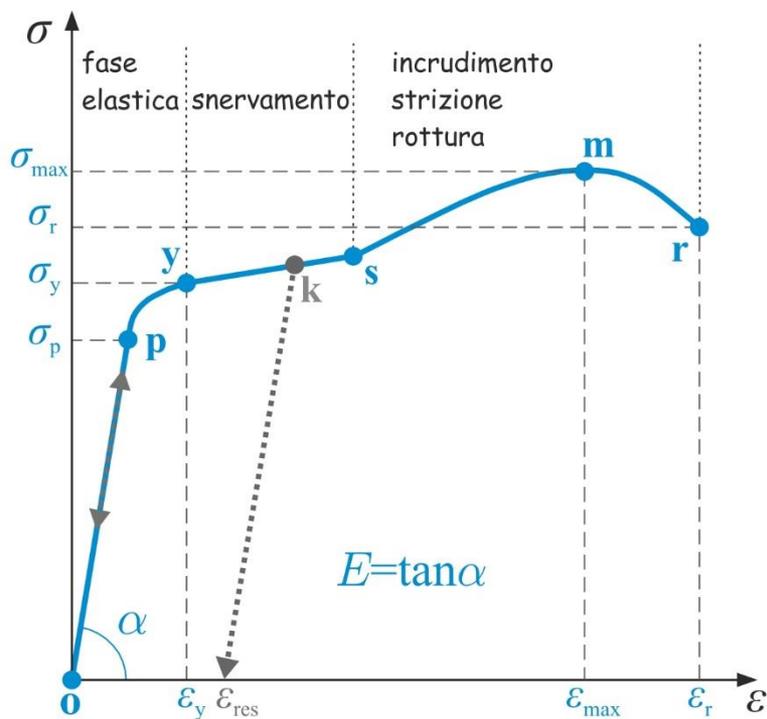
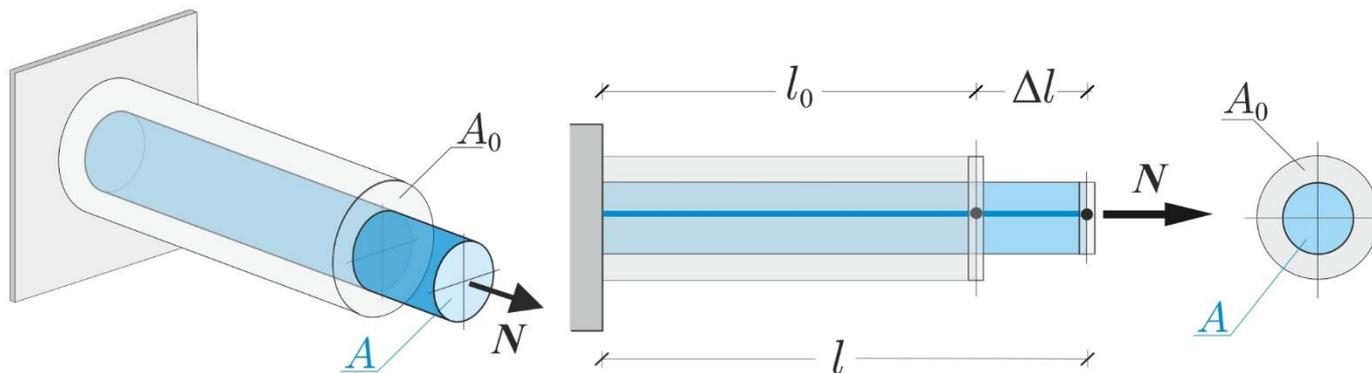
$$\sigma = \frac{N}{A_0} \cong \frac{N}{A}$$

$[FL^{-2}]$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$[0]$

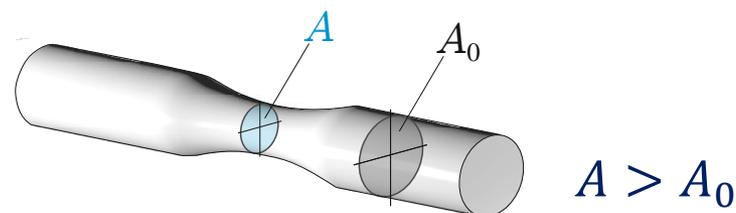
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili



FASE PLASTICA

s-m → *incrudimento*

r → *punto di rottura*



$$\sigma = \frac{N}{A_0} < \frac{N}{A} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

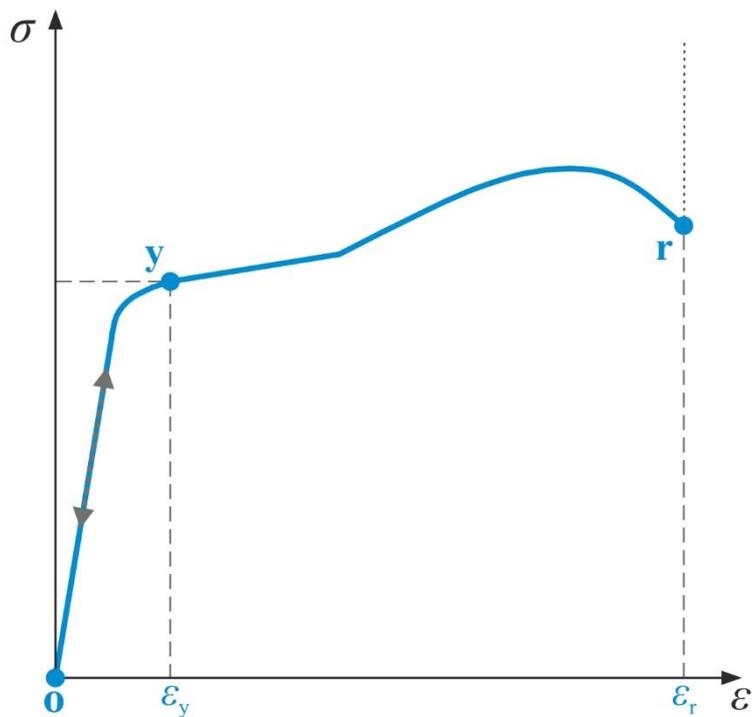
$[FL^{-2}]$ $[0]$



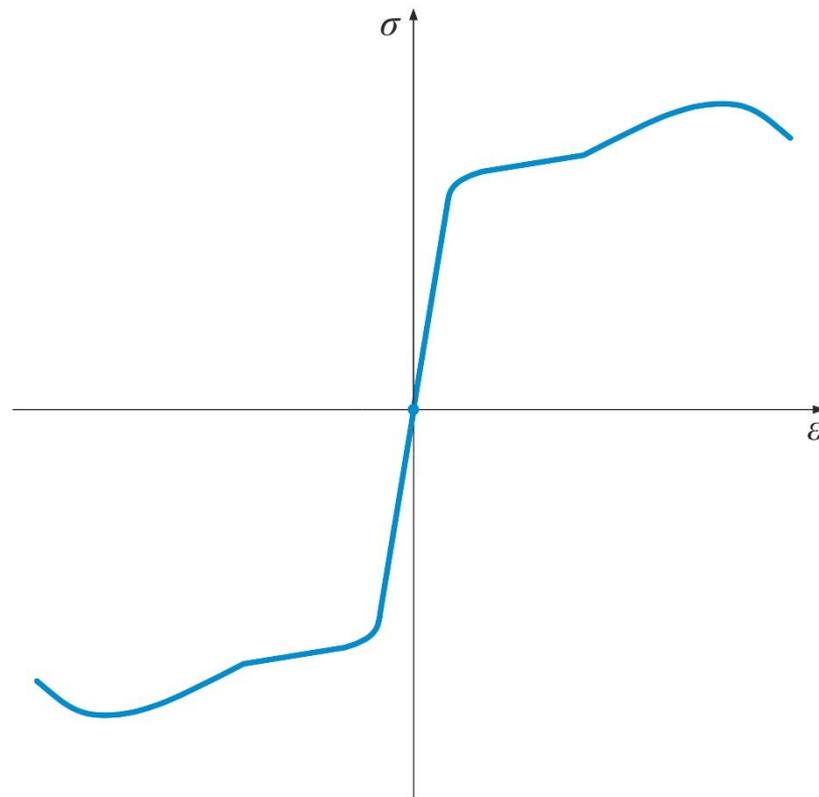
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali duttili

DUTTILITA'

$$\mu = \varepsilon_r - \varepsilon_y$$

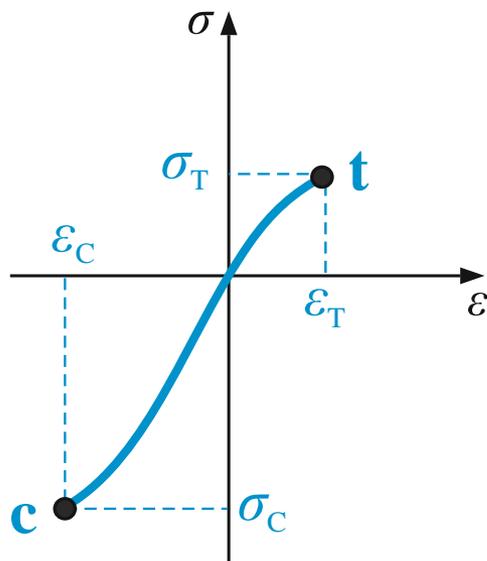
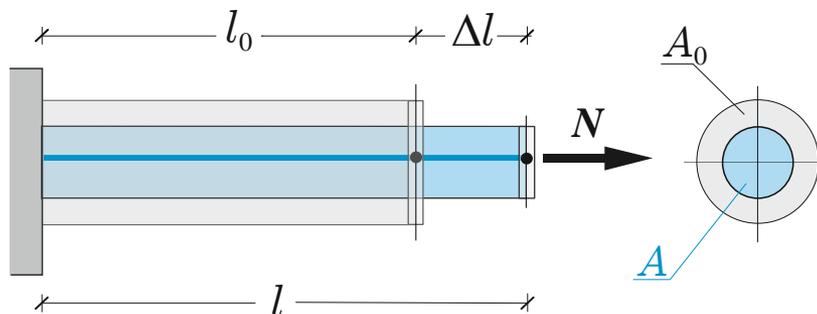
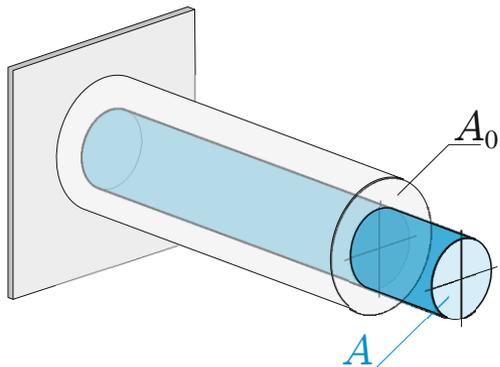


SIMMETRIA





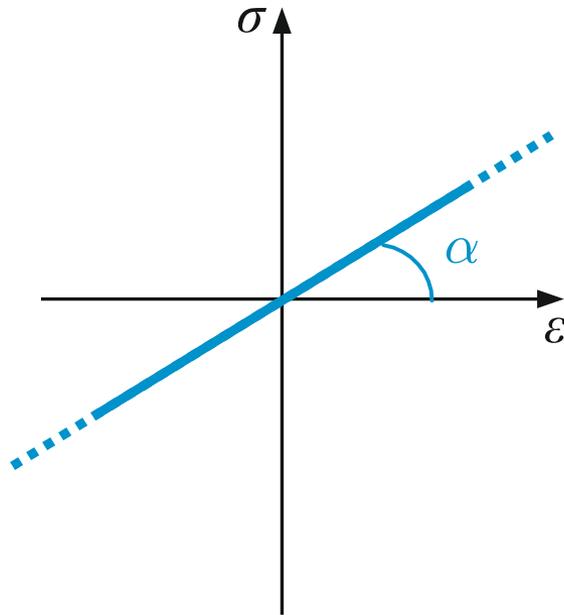
3. Legame costitutivo: fenomenologia materiali fragili



t → punto di rottura a trazione

c → punto di rottura a compressione

3. Legame costitutivo: legame elastico lineare



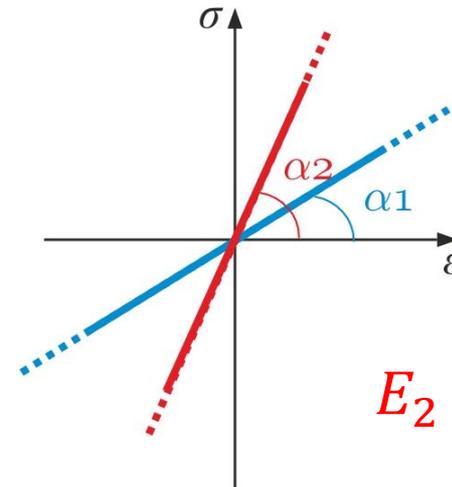
$$E = \tan \alpha \rightarrow \text{Modulo di Young } [FL^{-2}]$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

→ Legge di Hooke

$\sigma = m \varepsilon = \tan \alpha \varepsilon$
(equazione cartesiana della retta passante per l'origine di coefficiente angolare m)



$$E_2 > E_1$$

Materiali elastici lineari anisotropi e isotropi: definizioni e esempi

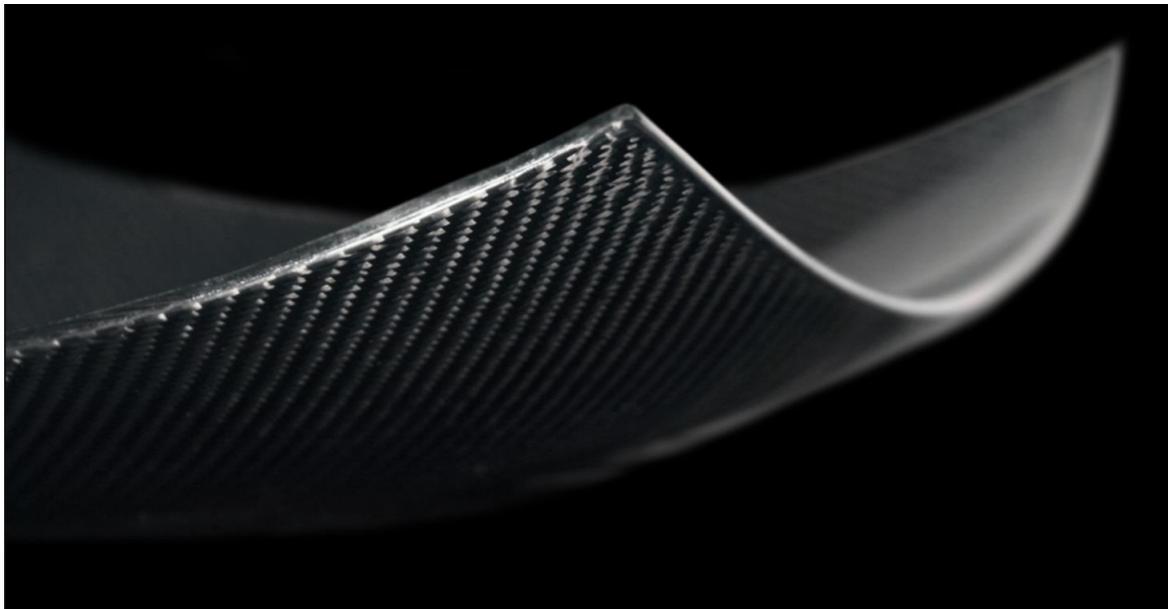
Legno (fibre naturali)



Compositi in fibra di carbonio, compositi fibrorinforzati

I compositi sono così chiamati in quanto sono costituiti da due o più materiali: ad esempio le fibre di carbonio e una matrice, in genere di resina, la cui funzione è quella di tenere in posa le fibre.

Il materiale composito in fibre di carbonio risulta non omogeneo e presenta spesso una spiccata *anisotropia*: le sue caratteristiche meccaniche presentano direzioni privilegiate.



Materiali isotropi: acciaio, leghe metalliche etc.

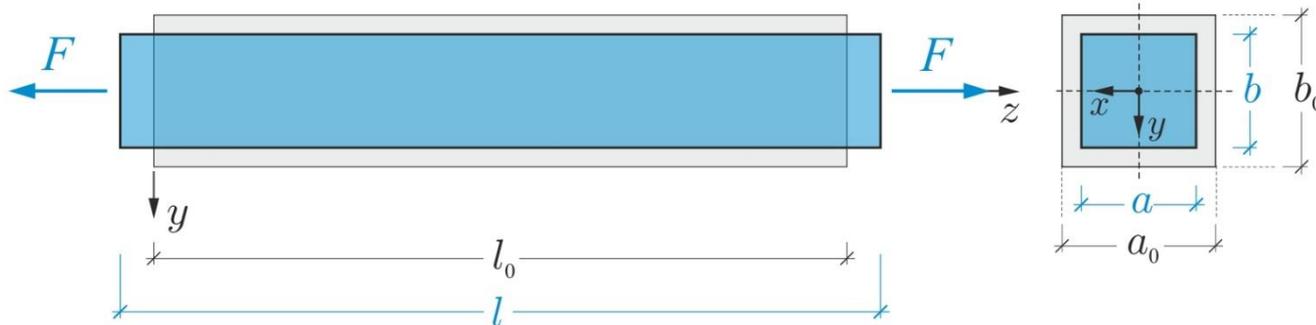


Materiale isotropo: *il materiale presenta lo stesso comportamento meccanico indipendentemente dalla direzione: dei 21 moduli elastici **solo due** sono indipendenti.*

Materiale omogeneo: *i moduli elastici sono uguali in ogni punto del continuo*

3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: fenomenologia

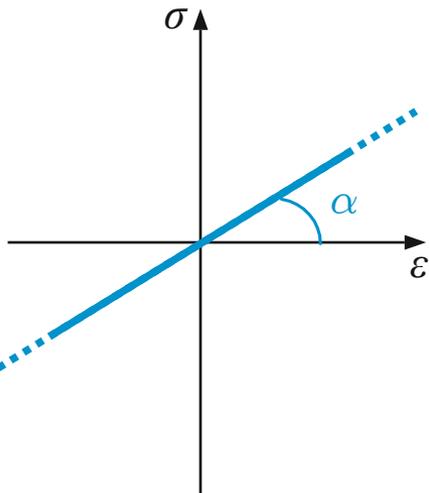
Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)



$$\varepsilon_z = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \sigma_z = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{a - a_0}{a_0}$$

$$\varepsilon_y = \frac{b - b_0}{b_0}$$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z \quad \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z$$

$E = \tan \alpha \rightarrow$ Modulo di Young [FL^{-2}]

$\nu \rightarrow$ Modulo di Poisson [0]

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare** **Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici ($\alpha\upsilon\acute{\xi}\eta\sigma\iota\varsigma$: aumento)



ν \rightarrow Modulo di Poisson [0] $\nu < 0$

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare** **Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

Materiali auxetici (αὔξεις : aumento)



$\nu \rightarrow$ Modulo di Poisson [0] $\nu < 0$

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

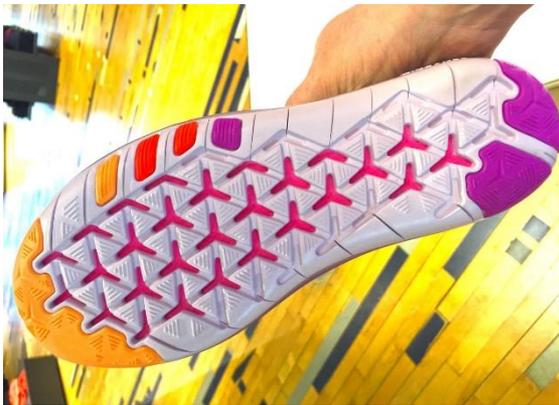
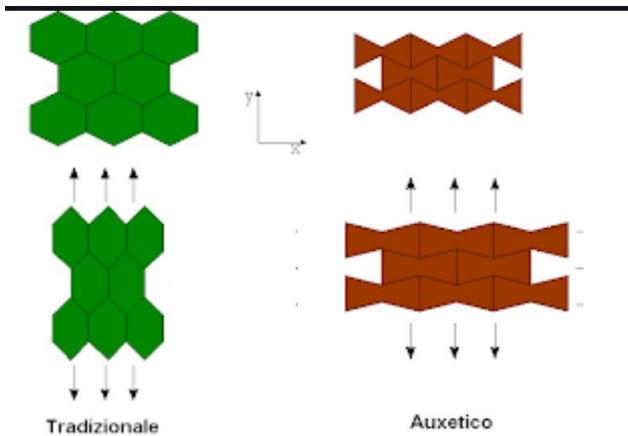


3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare** **Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale uniassiale (asse z)

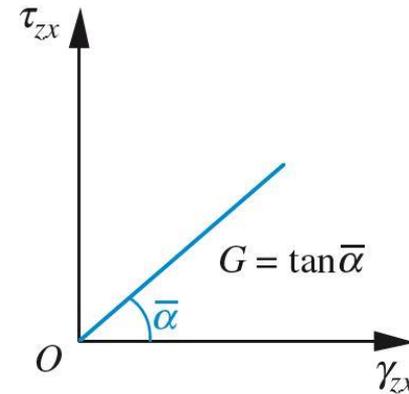
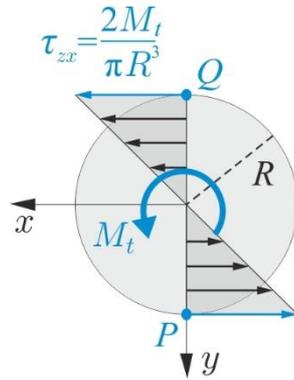
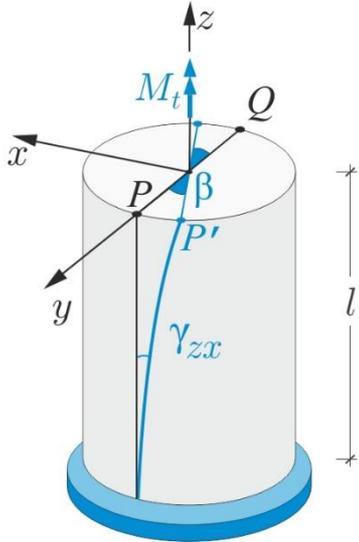
Materiali auxetici (αὔξις : aumento)

$$\nu < 0$$



3. Legame 3D: materiale **Elastico Lineare Isotropo Omogeneo**: fenomenologia

Schema della prova sperimentale a torsione



$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$\gamma_{zy} = \frac{1}{G} \tau_{zy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$G = \tan \bar{\alpha} \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]



3. Legame 3D: materiale **E**lastico **L**ineare **I**sotropo **O**mogeneo: parametri sperimentali

Parametri sperimentali caratteristici (2 soli indipendenti)

$E = \tan \alpha \rightarrow$ Modulo di Young [FL^{-2}]

$G = \tan \bar{\alpha} \rightarrow$ Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

$\nu \rightarrow$ Modulo di Poisson [0]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



3. Legame costitutivo: legame elastico lineare

Materiale	ρ [kg/m³]	E [GPa]	ν	α [°C⁻¹]
Acciaio strutturale	7860	200–210	0.3	$1.17 \cdot 10^{-5}$
Leghe di Alluminio	2600–2800	70–75	0.34	$2.35 \cdot 10^{-5}$
Rame	8900	120	0.36	$1.69 \cdot 10^{-5}$
Titanio	4700	110–120	0.34	$0.90 \cdot 10^{-5}$
Calcestruzzo	2400–2500	25–30	0.12	$0.99 \cdot 10^{-5}$
Muratura (mattoni pieni)	1800	30		$0.60 \cdot 10^{-5}$
Marmo	2700	55		$1.08 \cdot 10^{-5}$
Granito	2770	70		$0.72 \cdot 10^{-5}$
Legno (lungo le fibre)	400–720	9–15		$0.40 \cdot 10^{-5}$
Gomma	900	<1	0.49	$16.0 \cdot 10^{-5}$

3. Legame costitutivo: legge di Hooke per la trave

provino

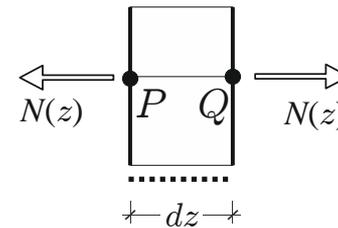
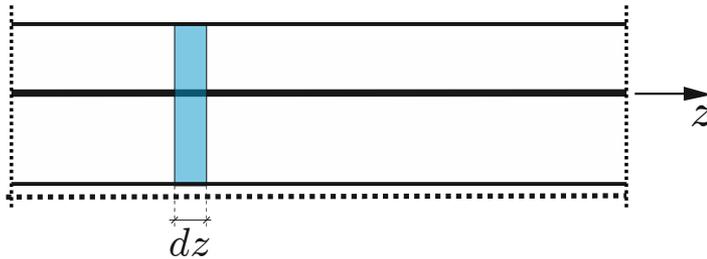
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

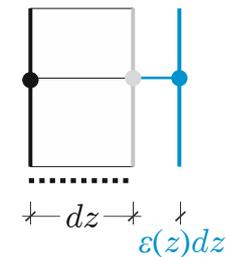
$$\rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

Elemento infinitesimo

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$



forza interna



deformazione



3. Legame costitutivo: equazioni costitutive per la trave elastica

$$\varepsilon(z) = \frac{N(z)}{EA}$$

$$\gamma(z) = \frac{T(z)}{GA_t}$$

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

Caratteristiche del materiale

E → Modulo di Young [FL^{-2}]

G → Modulo di rigidezza tangenziale [FL^{-2}]

Caratteristiche della sezione retta

A → Area [L^2]

A_t → Area di taglio [L^2]

$I = I_x$ → Momento d'inerzia rispetto all'asse locale x [L^4]

Rigidezze della trave

EA → Rigidezza assiale [F]

GA_t → Rigidezza di taglio [F]

EI → Rigidezza flessionale [FL^2]

$EA \rightarrow \infty$ Trave inestensibile elasticamente

$GA_t \rightarrow \infty$ Trave indeformabile a taglio
(Eulero-Bernouilli)