Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

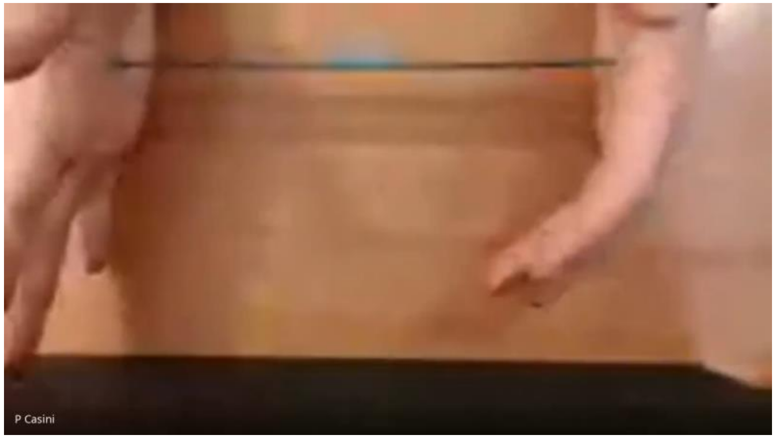
Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione 24

Instabilità Strutturale: instabilità elastica

- **Descrizione del fenomeno**
- **Definizioni e criterio di Eulero**
- **Ipotesi del modello**
- **Asta di Eulero (asta caricata di punta)**
- **Snellezza λ di una trave trave**

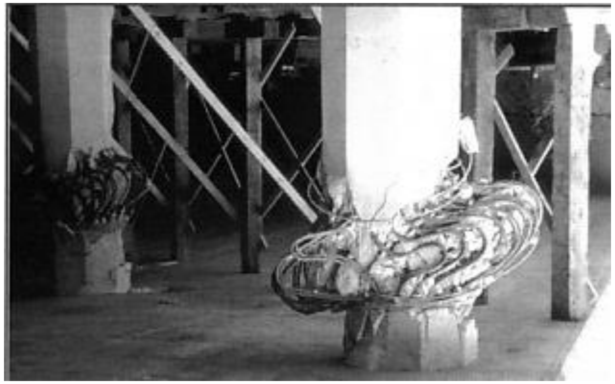


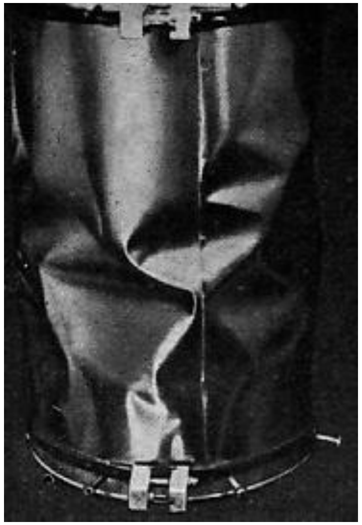
(Video)

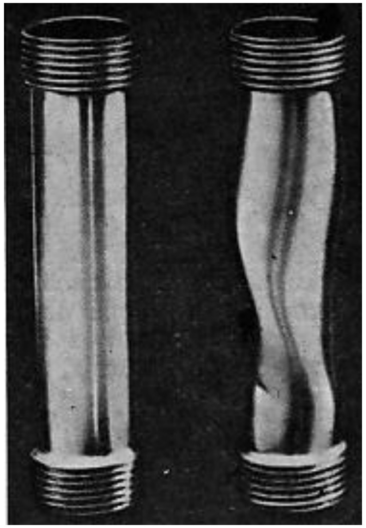
Instabilità elastica: fenomenologia

Esempi di tipologie strutturali interessate dal fenomeno

- *Travi snelle soggette a compressione centrata o a pressoflessione*
- *Travi alte sezione sottile aperta soggette a flessione (instabilità flesso-torsionale)*
- *Lastre sottili (fenomeni locali di imbozzamento)*
- *Cilindri cavi sottili soggetti a pressione idrostatica esterna (ovalizzazione)*
- *Archi ribassati (fenomeni di snap-through)*



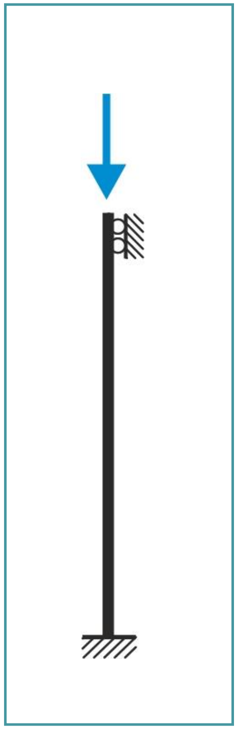




Instabilità elastica: fenomenologia

Descrizione del fenomeno

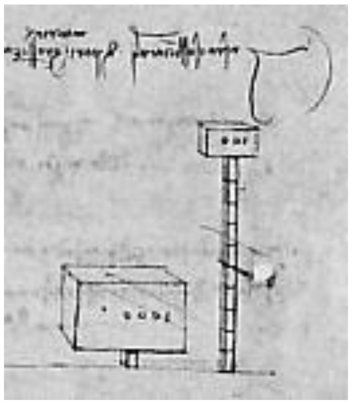
- *Carichi critici*
- *Perdita di stabilità della configurazione di equilibrio*
- *Materiale in fase elastica quando il fenomeno inizia a manifestarsi*

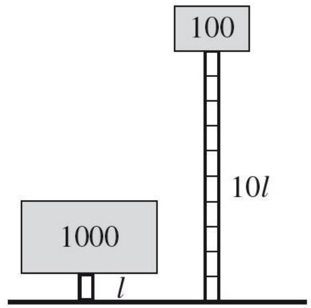


(Video)

Instabilità elastica: fenomenologia

Studi sperimentali di Leonardo (Cod. Atl. f. 410r)





Infra i sostentacoli di pari materia e grossezza quello fia di maggiore fortezza del quale la sua lunghezza fia più brieve. Se collocherai un sostentacolo di pari grossezza e materia il quale resista a 100 e che poi tu ne tolga via i nove decimi dell'altezza, tu troverai che il suo rimanente, essendo nelli estremi sostenuto, resisterà a 1000. (Cod. Atl. f. 410r)

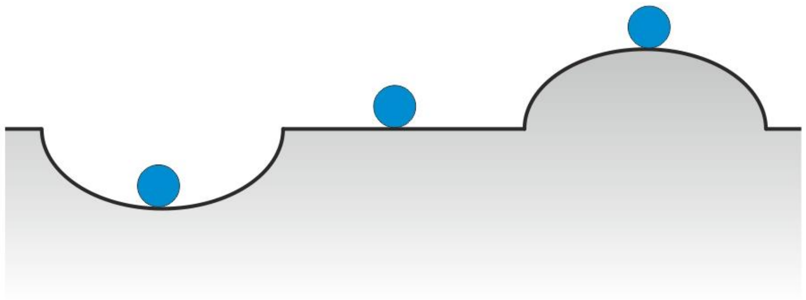
Modello di Eulero (1707-1783)

L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietati gaudentes*, 1744

L. Euler, *Sur la force des colonnes*, Hist. acad. sci, pp. 252-282, 1759.

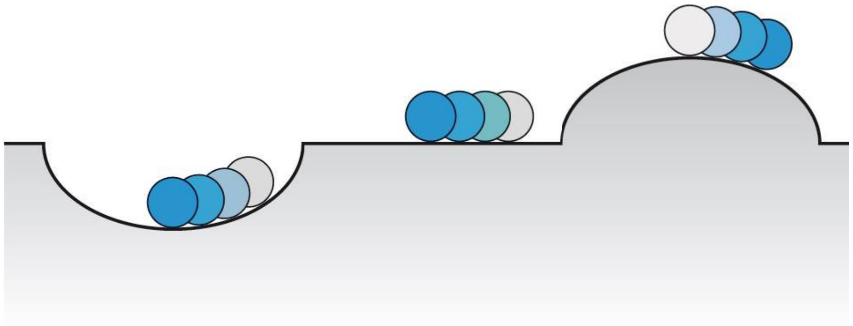
Instabilità elastica: definizioni

Posizione di equilibrio e 'qualità' dell'equilibrio



Instabilità elastica: definizioni

Posizione di equilibrio e ‘qualità’ dell’equilibrio



- *Posizione di **equilibrio stabile***

- *Posizione di **equilibrio indifferente**: sono possibili più posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale*

- *Posizione di **equilibrio instabile***

Instabilità elastica: definizioni

Carico critico

- *Valore della forza esterna in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere stabile*

Sistema meccanico euleriano

- *Sistema meccanico soggetto a forze conservative e che esibisce un comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)*

Criterio di Eulero (criterio statico)

- *I carichi critici esprimono i valori delle forze esterne in corrispondenza dei quali la configurazione di equilibrio cessa di essere unica e diventano possibili (infinite) posizioni di equilibrio distinte da quella iniziale*

Modelli lineari (trave 1D o continuo 3D)

Ipotesi del modello.

Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti', il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Esistenza e Unicità della soluzione

Instabilità elastica: ipotesi

- **Ipotesi 0** *Il sistema è Euleriano: è quindi soggetto a forze conservative e esibisce un comportamento elastico lineare prima che sia raggiunto il carico critico (fase pre-critica)*

Nuove ipotesi

Ipotesi 1 (cinematica): 'spostamenti finiti', il campo di spostamento in uno opiù punti può presentare modulo paragonabile alle dimensioni caratteristiche del sistema

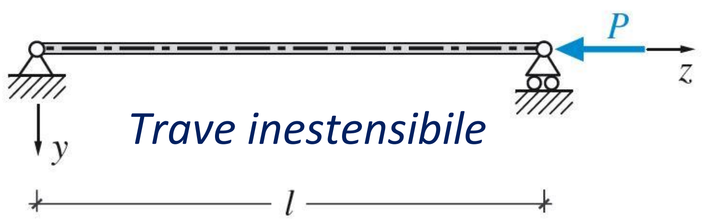
Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Instabilità elastica: asta di Eulero

Posizione del problema

- *Determinare il valore (i valori) della forza assiale P in corrispondenza del quale la configurazione di equilibrio diventa instabile. Si consideri per iniziare lo schema di **trave appoggiata** e la **sezione circolare** di raggio R ($I = I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi R^4$)*



Ipotesi

Ipotesi 1 (cinematica): 'piccoli spostamenti', il modulo dello spostamento di ogni punto si mantiene sempre molto più piccolo delle dimensioni caratteristiche del sistema

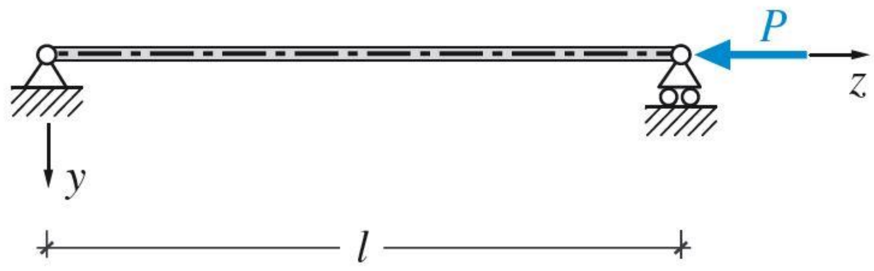
Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si devono scrivere con riferimento alla configurazione finale (*deformata*) del sistema.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*.

Instabilità elastica: asta di Eulero

Soluzione banale

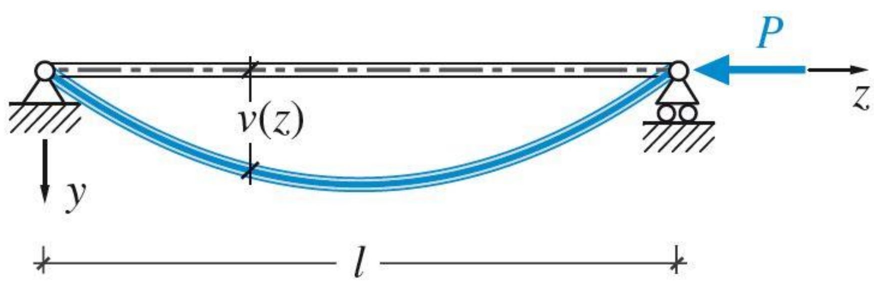
$$v(z) = 0, z \in [0, l]$$



$v(z)$: spostamento trasversale [L] positivo se concorde all'asse locale y

Applicazione del criterio di Eulero

Determinare, se esistono, i valori del carico assiale P in corrispondenza dei quali divengano possibili soluzioni del problema elastico diverse da quella banale (cioè soluzioni con $v(z) \neq 0$). Tali valori sono i carichi critici cercati.



Instabilità elastica: asta di Eulero

Equazioni cardinali della statica per il tratto deformato $A\Sigma$

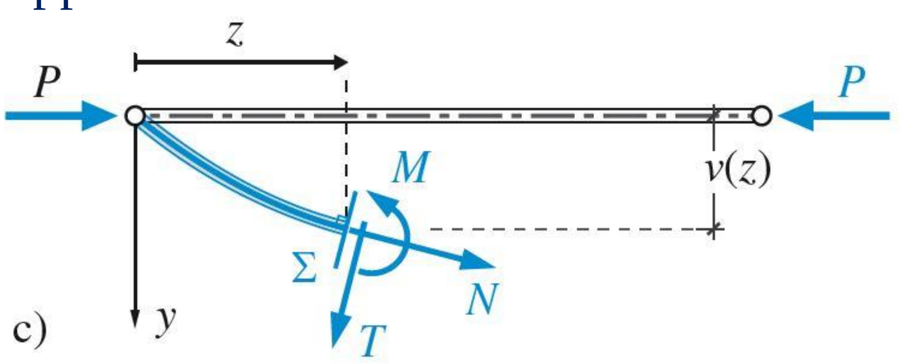
$$M_\Sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad M(z) - Pv(z) = 0 \ \Rightarrow \ -EIv''(z) - Pv(z) = 0$$

$$v''(z) + \frac{P}{EI}v(z) = 0 \qquad\qquad (I = I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi R^4)$$

Poiché $\frac{P}{EI} > 0$, posto $\frac{P}{EI} = \kappa^2$, si ha la seguente equazione della linea elastica

$$\boxed{v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0} \qquad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

da integrare con le opportune condizioni al contorno



Instabilità elastica: asta di Eulero

$$\boxed{v''(z) + \kappa^2 v(z) = 0} \qquad \kappa^2 = \frac{P}{EI}$$

Soluzione generale

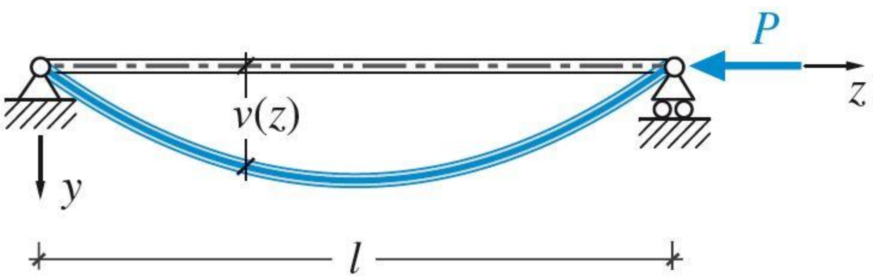
$$v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z) \qquad \kappa = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

Soluzione banale: $C_1 = 0, C_2 = 0$

A norma del criterio di Eulero si devono trovare eventuali valori del carico $P = \kappa^2 EI$ in corrispondenza dei quali sono possibili **soluzioni non banali**: $C_1 \neq 0$, e/o $C_2 \neq 0$

Condizioni al contorno

$$v(0) = 0$$
$$v(l) = 0$$



Instabilità elastica: asta di Eulero

Condizioni al contorno $v(z) = C_1 \sin(\kappa z) + C_2 \cos(\kappa z)$

$$v(0) = 0 \qquad C_2 = 0$$

$$v(l) = 0 \qquad C_1 \sin(\kappa l) + C_2 \cos(\kappa l) = 0$$

Sistema di equazioni algebrico lineare omogeneo nelle incognite C_1 e C_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli, ammette soluzione diversa dalla banale solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\kappa l) & \cos(\kappa l) \end{bmatrix} = -\sin(\kappa l) = 0$$

Instabilità elastica: asta di Eulero

Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \quad \& \quad \begin{matrix} C_2 = 0 \\ C_1 \neq 0 \end{matrix}$$

Carichi critici (criterio di Eulero)

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \Rightarrow \quad \kappa = n\frac{\pi}{l}, \qquad n = 1,2,3,\ldots \Rightarrow \quad \kappa^2 = n^2\frac{\pi^2}{l^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$$

Carichi critici:

$$\boxed{P_{cr,n} = n^2\frac{\pi^2 EI}{l^2}, \qquad n = 1,2,3,\ldots}$$

Carico critico euleriano ($\boldsymbol{n = 1}$):

$$\boxed{P_{cr} = \pi^2\frac{EI}{l^2}}$$

Instabilità elastica: asta di Eulero

Soluzioni non banali $v(z) \neq 0$

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \quad \& \quad \begin{matrix} C_2 = 0 \\ C_1 \neq 0 \end{matrix}$$

Deformate critiche

$$\boxed{\sin(\kappa l) = 0} \;\Rightarrow\; \kappa = n\frac{\pi}{l}, \qquad n = 1,2,3,\dots \;\Rightarrow$$

$$C_1 \neq 0,\; C_2 = 0 \;\Rightarrow\; v(z) = C_1 \sin(\kappa z)$$

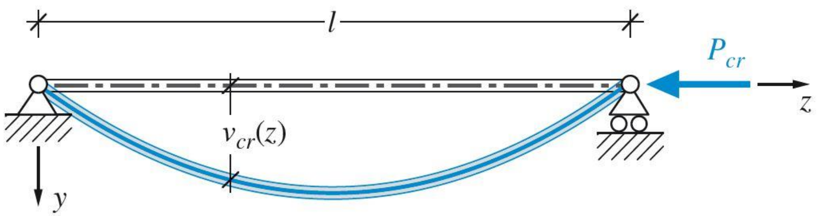
Deformate critiche: $$\boxed{v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right), \qquad n = 1,2,3,\dots}$$

Deformata critica euleriana ($\boldsymbol{n = 1}$):

$$\boxed{v_{cr}(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}z\right),\;\; C_1 \in \mathbb{R}}$$

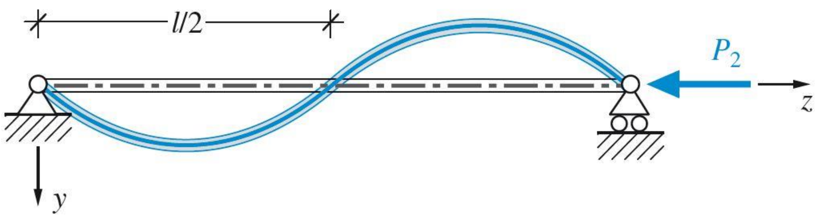
Instabilità elastica: asta di Eulero

Deformate critiche $v_{cr,n}(z) = C_1 \sin\left(n\frac{\pi}{l}z\right)$ $C_1 \neq 0$ $(\infty^1$ *soluzioni*$)$



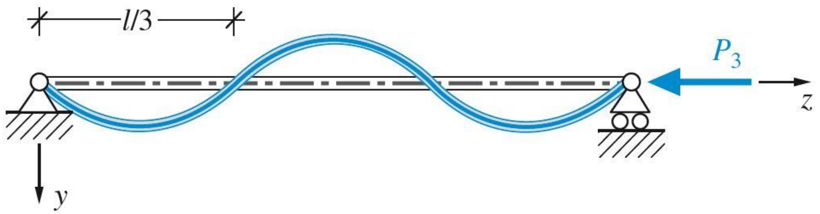
Carico critico euleriano n = 1:

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



Carico critico n = 2:

$$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_{cr}$$



Carico critico n = 3:

$$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{l^2} > P_2 > P_{cr}$$

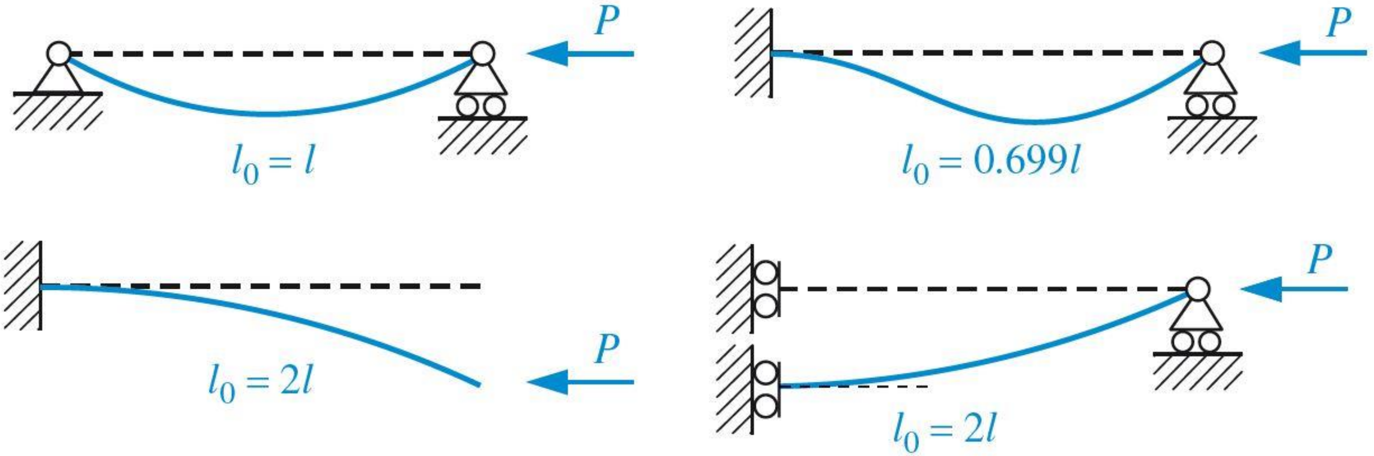
Instabilità elastica: asta di Eulero

Condizioni di vincolo diverse

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

l_0: *lunghezza libera di inflessione*

(dipende dalla lunghezza l e dalle condizioni di vincolo)



Instabilità elastica: asta di Eulero

Sezioni diverse dalla sezione circolare

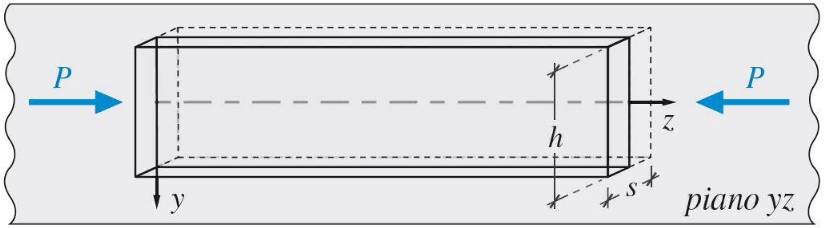
$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

l_0: *lunghezza libera di inflessione*

Se la sezione non è circolare e risulta $I_x \neq I_y$*, il carico critico più pericoloso è quello più piccolo: si continua quindi a utilizzare la formula precedente ponendo:*

$$I = \min(I_x, I_y)$$

Esempio: asta a sezione rettangolare sottile



$$I_x = \frac{1}{12} s h^3$$

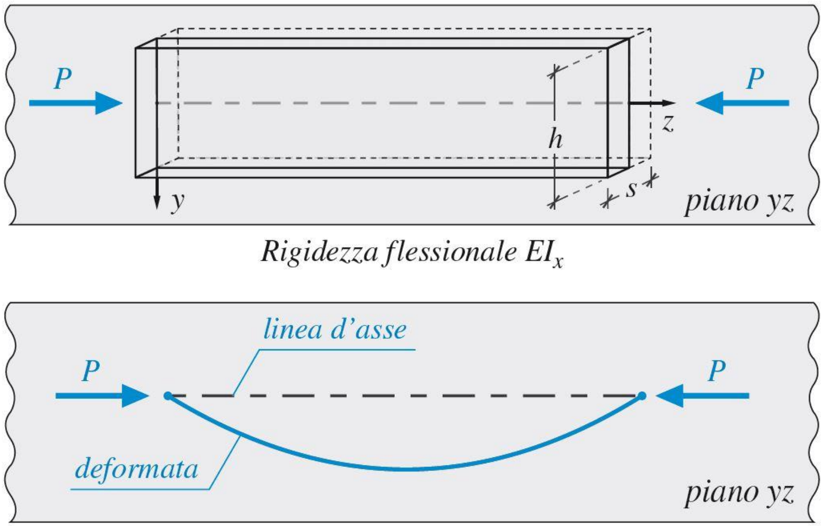
$$I_y = \frac{1}{12} h s^3$$

$$I = \min(I_x, I_y) = \frac{1}{12} h s^3$$

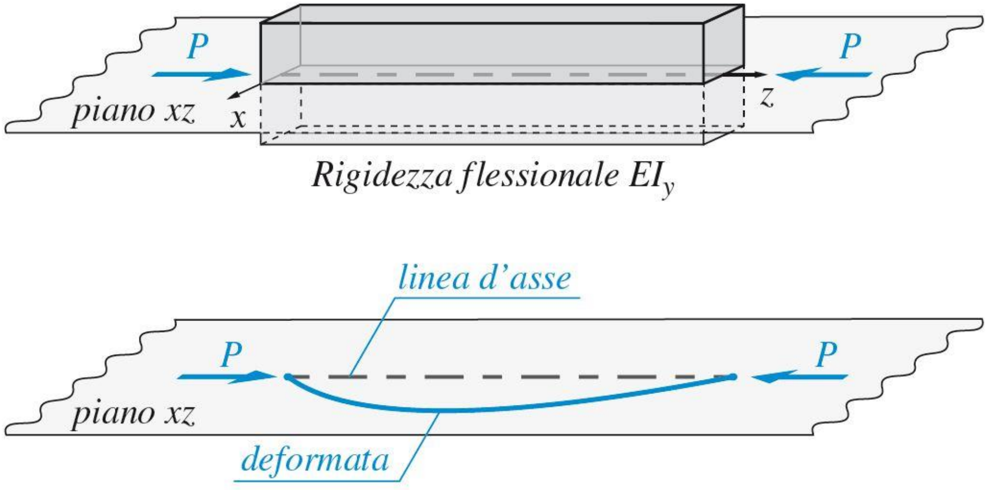
Instabilità elastica: asta di Eulero

Piano 'forte' di inflessione

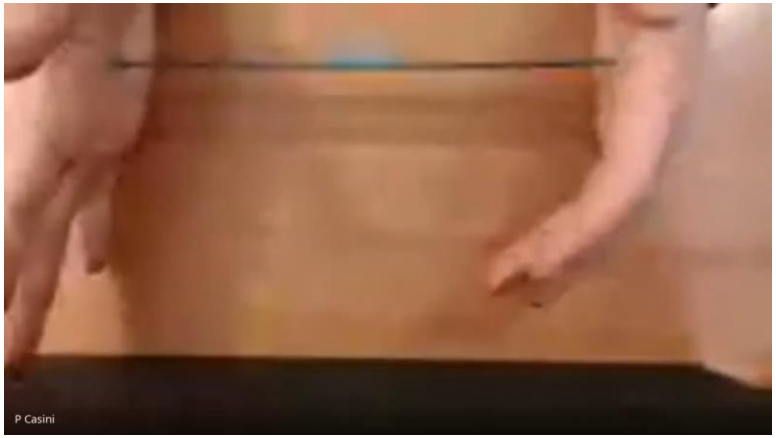
$$I_x = \frac{1}{12} s h^3$$



Piano 'debole' di inflessione



$$I_y = \frac{1}{12} h s^3$$



Instabilità elastica: asta di Eulero

Snellezza di una trave

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2 A} = \pi^2 \frac{E}{l_0^2} \rho^2 = \pi^2 \frac{E}{\left(\frac{l_0^2}{\rho^2}\right)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \min(\rho_x, \rho_y)$$

Snellezza λ

$$\boxed{\lambda = \frac{l_0}{\rho}}$$

Iperbole di Eulero

$$\boxed{\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica

Instabilità elastica: asta di Eulero

Iperbole di Eulero

$$\boxed{\sigma_{cr}(\lambda) = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}}$$

Collasso per instabilità (failure due to buckling)

Se $\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o$ allora si manifesta prima l'instabilità che l'uscita dalla fase elastica

Snellezza limite λ_0

$$\sigma_{cr}(\lambda_0) = \sigma_o = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

$$\sigma_{cr}(\lambda) < \sigma_o \quad \Rightarrow \qquad \lambda > \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_o}}$$

Travi snelle: $\lambda > \lambda_0$ **Travi tozze: $\lambda < \lambda_0$**