

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:

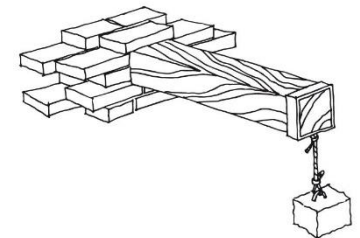
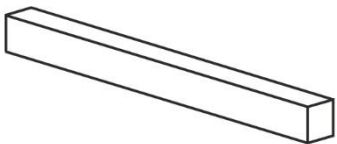
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020





Parte III - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico
- Soluzione del problema elastico:
 - Metodo degli spostamenti (linea elastica)
 - Metodo delle forze





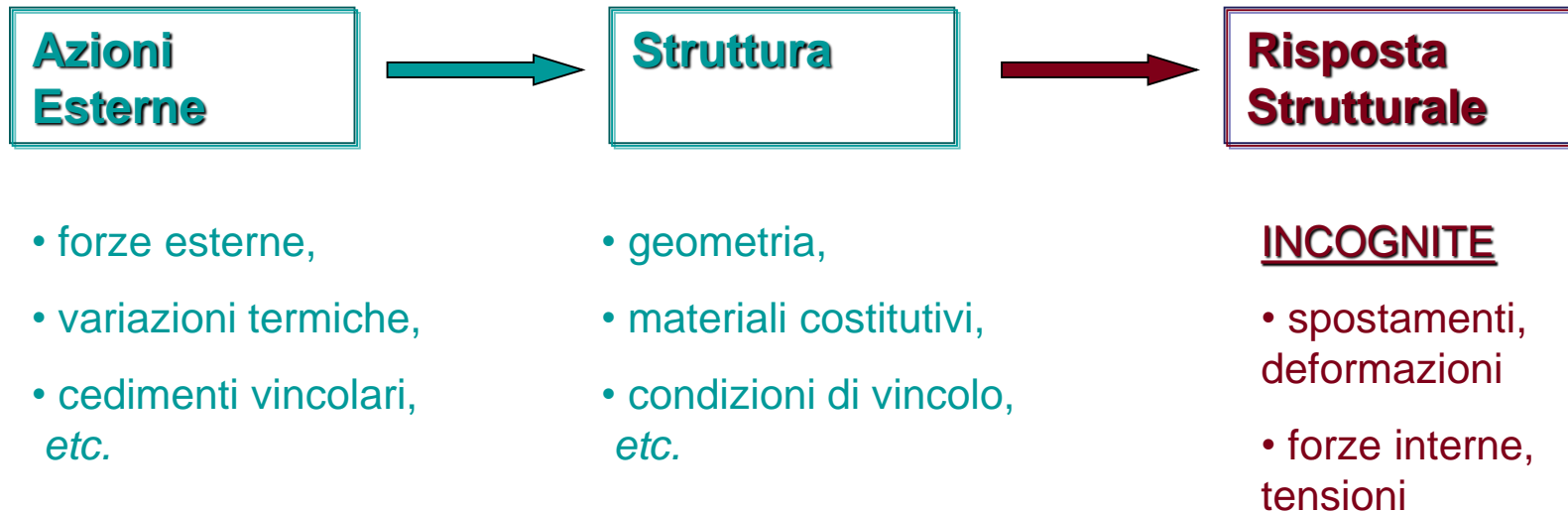
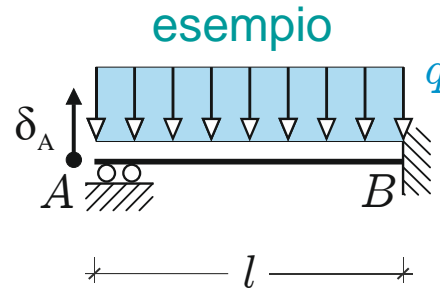
Parte III - Il modello di trave elastica 1D

4. Il problema elastico

- **Obiettivi**
- **Posizione del problema**
 - Ipotesi del modello
 - Dati del problema
 - Incognite
- **Formulazione analitica**
- **Esistenza della soluzione**
- **Confronto con il modello di corpo rigido e limiti del modello di trave 1D**

4. Problema elastico: obiettivi

Obiettivi: Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato soggetto ad azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.



4. Problema elastico: posizione del problema

Ipotesi del modello.

Ipotesi 1 (cinematica): ‘piccoli spostamenti’. **1a:** $\forall z \in [0, l], \quad |\mathbf{u}(z)| \ll l$

1b: $\forall z \in [0, l], \quad |\boldsymbol{\theta}(z)| \ll 1 \text{ rad}$

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) della trave.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*. Nel seguito, per semplicità, il materiale sarà considerato anche *omogeneo* (moduli elastici costanti in ogni punto della trave)

4. Problema elastico: posizione del problema

Dati del problema.

Azioni esterne.

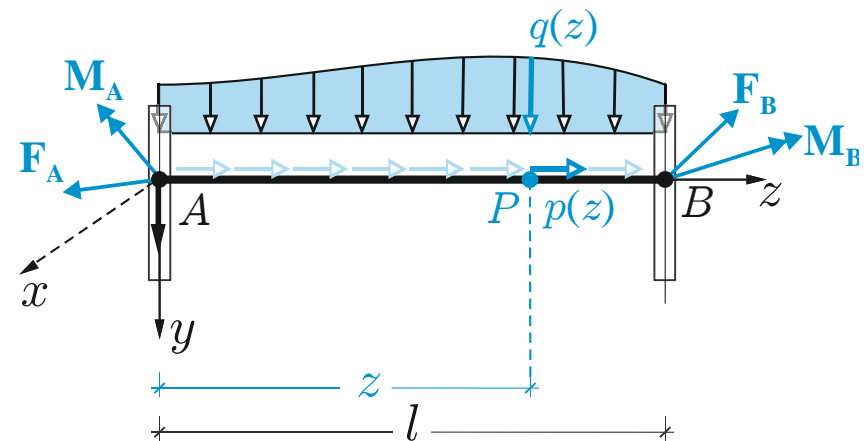
- Forze esterne attive distribuite $\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j}$
- Forze e coppie esterne concentrate alle estremità
- Spostamenti imposti, cedimenti vincolari
- Variazioni di temperatura
- Ecc.

Schema statico

- Geometria della linea d'asse e della sezione (baricentro, area, momenti d'inerzia)
- Disposizione/tipologia dei vincoli

Materiale

- Moduli elastici E, G



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

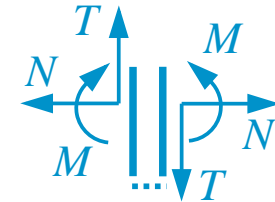
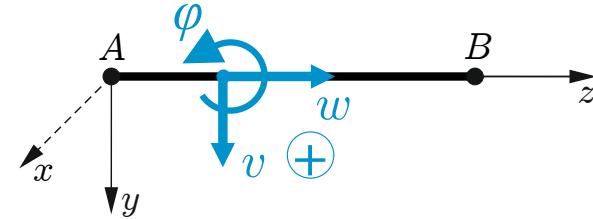
Cinematica

$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ \rightarrow Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ \rightarrow Misure di deformazione

Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ \rightarrow CdS



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

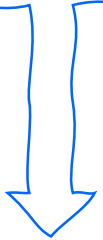
Cinematica

$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

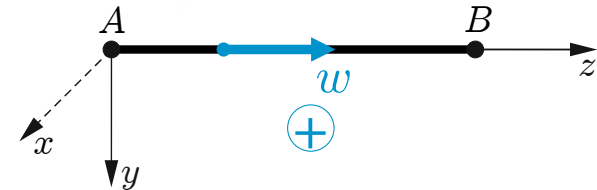
$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione

Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



Problema assiale



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

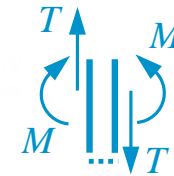
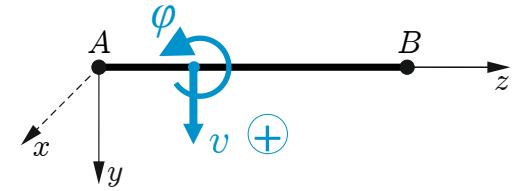
Cinematica

$w(z)$	$v(z)$	$\varphi(z)$	→ Spostamenti e rotazioni
$\varepsilon(z)$	$\gamma(z)$	$\chi(z)$	→ Misure di deformazione

Statica

$N(z)$	$T(z)$	$M(z)$	→ CdS
--------	--------	--------	-------

**Problema
flessionale**



4. Problema elastico: formulazione analitica

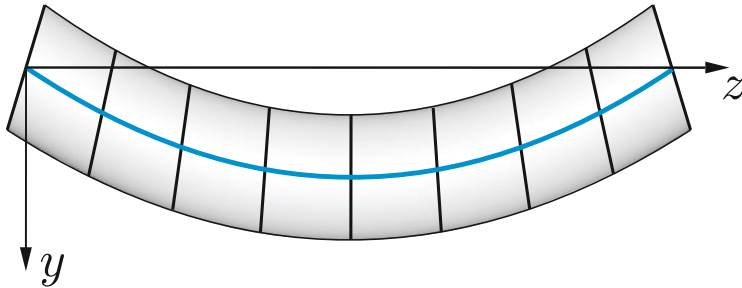
Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



$$\gamma(z) \neq 0$$

Modello di Timoshenko

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \quad (\text{Hooke})$$

4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

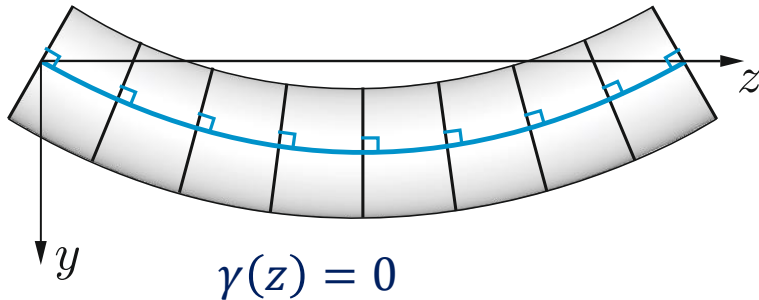
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ \cancel{T(z) = GA_t \gamma(z)} \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \quad (\text{Hooke})$$

4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

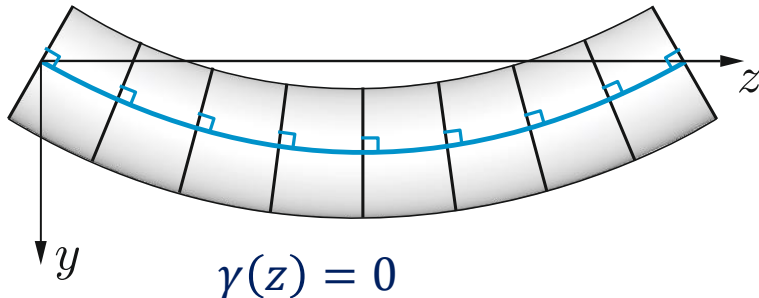
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

4. Problema elastico: soluzione

Esistenza e unicità per sistemi determinati e iperstatici (Kirchhoff)

Principio di sovrapposizione degli effetti

La soluzione del problema elastico relativa ad una qualsiasi combinazione di azioni esterne agenti simultaneamente si ottiene sovrapponendo le soluzioni relative alle singole azioni esterne pensate agire separatamente

Strategie di soluzione

- *Metodo degli spostamenti*
- *Metodo delle forze*



Parte III - Il modello di trave elastica 1D

5. Metodo degli spostamenti (linea elastica)

- **Obiettivi**
- **Equazioni della linea elastica**
 - Problema assiale
 - Problema flessionale
 - Condizioni al contorno
- **Esercizi** (sito: E15; testo §9.4-9.6) (Esonero)

5. Metodo degli spostamenti

$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

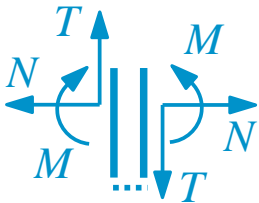
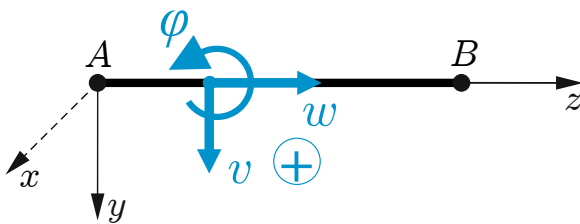
Incognite cinematiche

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

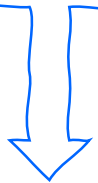
5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche

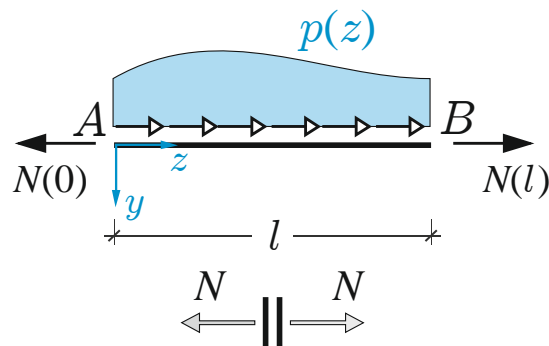
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

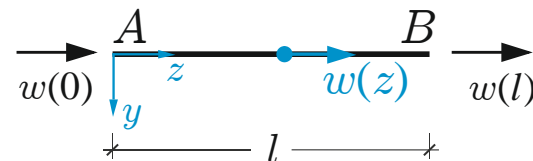
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

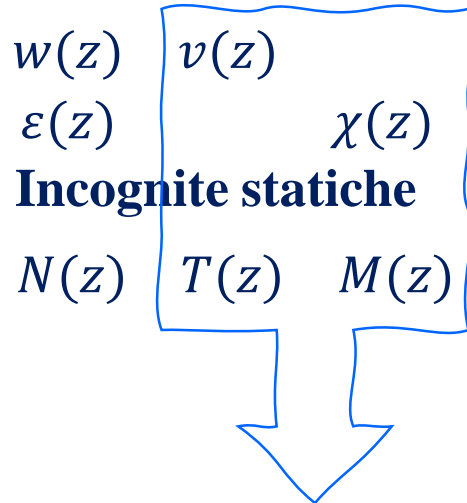
Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

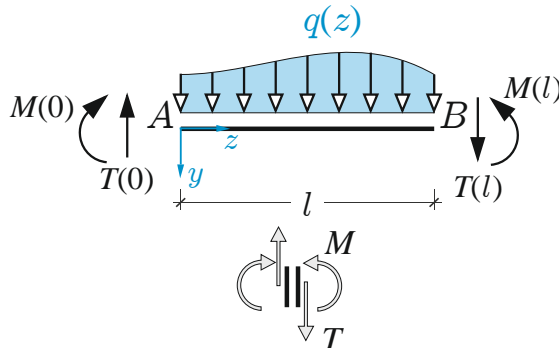


5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche



Problema flessionale (Eulero-Bernoulli)



Cinematica: equazioni di congruenza

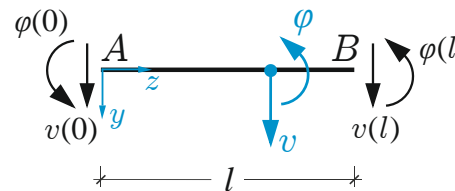
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



5. Metodo degli spostamenti

Incognite primarie:
spostamenti w e v

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

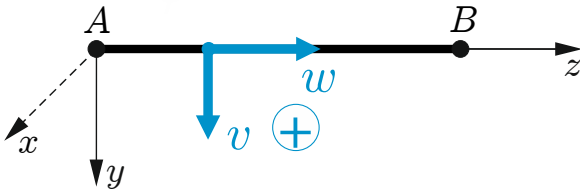
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

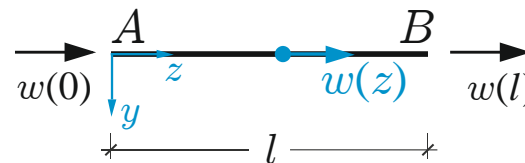
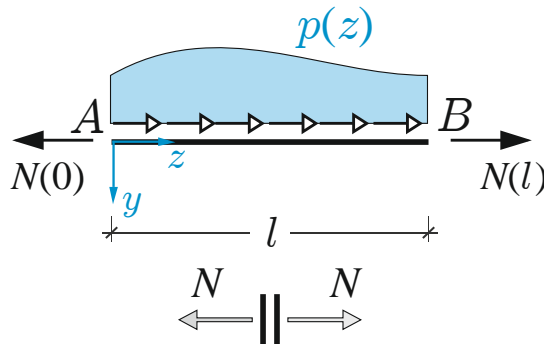
$$\varepsilon(z) = w'(z) + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0 + c.c$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA \varepsilon(z)$$



$$N(z) = EA w'(z) \quad \rightarrow \quad (EA w'(z))' + p(z) = 0 + c.c$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

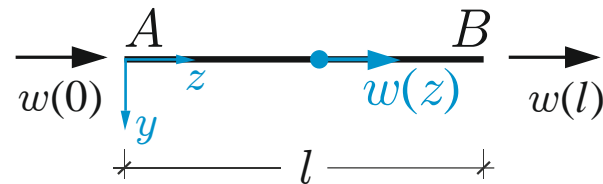
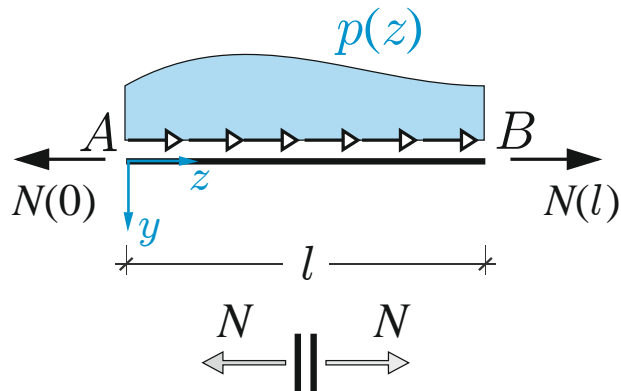
$$N(z)$$

Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

$$N(z) = EA w'(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z) + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI \chi(z)$$

$$M(z) = -EI v''(z) \quad M''(z) - T'(z) = 0$$

$$M''(z) + q(z) = 0 \rightarrow \boxed{-\left(EI v''(z)\right)'' + q(z) = 0}$$

5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Equazione della linea elastica

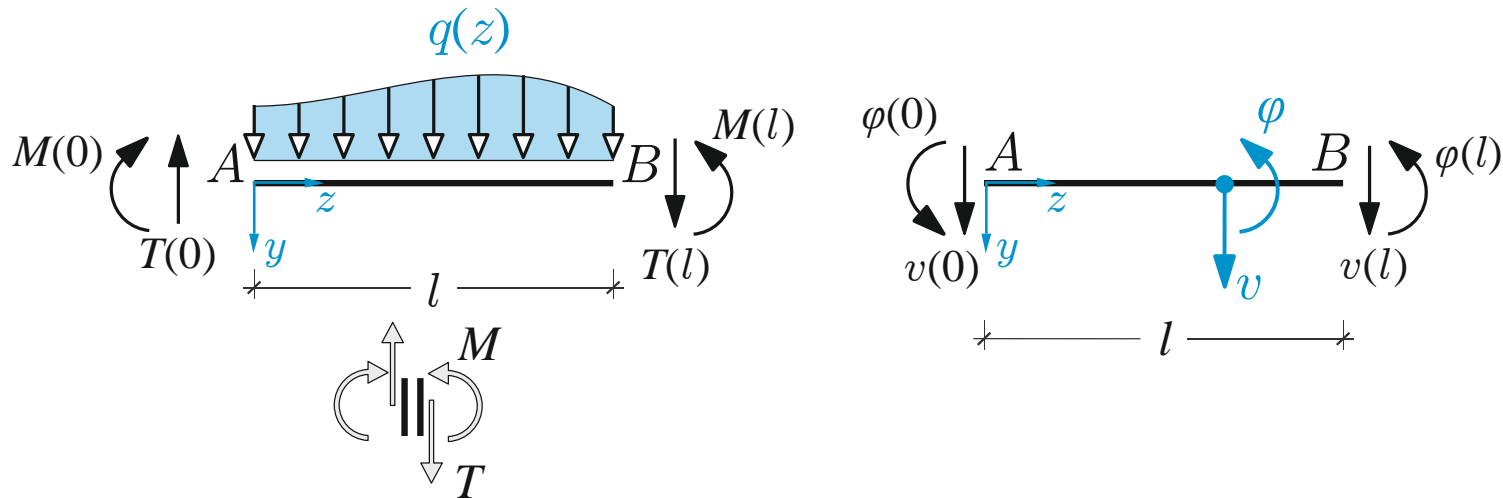
$$EI v''''(z) = q(z) + c.c$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\chi(z) = -v''(z)$$

$$T(z) = M'(z) = -EI v''''(z)$$

$$M(z) = -EI v'''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ N(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''''(z) = q(z) \quad + \text{c. c}$$

NB1 Si è fatta l'ipotesi di materiale omogeneo e sezione costante: EA , EI uniformi

NB2 I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati nelle equazioni, ma potrebbero essere accoppiati nelle condizioni al contorno (ad es. carrelli o glifi inclinati rispetto all'asse della trave)