Il problema di Saint Venant

Lettura: E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, 1981 - §12.1, 12.5, 12.6

12 IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT

12.1 SAINT-VENANT: L'INIZIO DIFFICILE DELLA SUA CARRIERA DI INGEGNERE E SCIENZIATO

Capita spesso di leggere nelle biografie dei grandi uomini di scienza che ebbero a soffrire angherie e anche persecuzioni perché il loro spirito era portato su posizioni « progressiste », oggi diremmo forse « di sinistra », rispetto alla barriera reazionaria della cultura ufficiale. È invece assai raro il caso di uno scienziato a cui abbia nuociuto l'aver sentimenti conservatori. Ebbene, questa inusuale disavventura colpì uno dei maggiori personaggi di cui la nostra storia deve parlare: Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant.

Nato da nobile famiglia nel castello di Fortoiseau (Seine-et-Marne), nel 1797, frequentava l'« École Polytechnique » quando, nel 1814, sullo scorcio del turbinoso periodo napoleonico, ruppe con i compagni e con i maestri, rifiutandosi di manifestare a favore dell'« usurpatore ». Fu espulso, e per otto anni dovette accontentarsi di un impiego quale assistente in una industria di polvere da sparo. Soltanto nel 1823 gli riuscì di essere ammesso all'« École des Ponts et Chaussées », ma non gli furono risparmiate amarezze per l'ostilità dei colleghi.

Dal 1825 al 1837 Saint-Venant esercitò la professione di ingegnere; dapprima lavorando al canale di Nivernais (1825-1830), quindi al canale delle Ardenne (1834). Durante l'anno 1837-38 ottenne un incarico provvisorio alla « École des Ponts et Chaussées » in supplenza di Coriolis. Ci sono rimaste le dispense del suo corso: un breve fascicolo di 76 pagine litografate: *Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de St-Venant, Ingénieur des ponts et chaussées*. È un documento interessante, poiché indica chiaramente le linee di pensiero che Saint-Venant seguirà nel corso della sua infaticabile opera. « L'uso delle matematiche — si legge nel postscritto — cesserà d'attirare rimproveri se lo si colloca nei suoi veri limiti. Il calcolo puro è semplicemente uno strumento logico che trae conseguenze rigorose da premesse assegnate e spesso contestabili. La meccanica vi aggiunge in verità qualche principio fisico che l'esperienza ha ormai fondato oltre ogni dubbio, ma essa lascia alle esperienze particolari il compito di determinare quali forze siano in gioco in ogni caso, e a questo riguardo permane maggiore o minore incertezza che influisce necessariamente sui risultati. I quali non debbono essere considerati come oracoli che infallibilmente dettino quel che si deve decidere; essi sono semplici indicazioni, come le deposizioni di testimoni o le perizie di esperti negli affari giudiziari, ma sono tuttavia indicazioni estremamente preziose di cui non ci si deve mai privare, poiché è utilissimo alla determinazione che si ha da prendere il conoscere la soluzione esatta di un problema molto vicino a quello che è proposto, e il poter dire, ad esempio, che "se gli sforzi fossero esattamente così o così, le dimensioni da assegnare sarebbero così o così". In questo modo, il campo della *valutazione istintiva* si troverà ridotto alle differenze che non possono essere oggetto del calcolo teorico; e si riconosce che questi due metodi, lungi dall'escludersi, possono concorrere insieme, supplirsi e aiutarsi mutuamente, controllarsi anche qualche volta — infine stabilire sotto gli auspici del buon senso, un'alleanza feconda di risultati utili secondo il doppio rapporto della convenienza e dell'economia »[1].

In queste stesse dispense, Saint-Venant osserva un ordine espositivo al quale resterà fedele nelle opere maggiori: l'analisi della tensione (al modo di Cauchy), l'analisi della deformazione (e qui il nostro autore si sofferma con particolare attenzione sullo scorrimento angolare, introducendo la notazione a due indici, ad es.: γ_{ij}, da noi già usata nel cap. 11), lo studio del criterio di resistenza e del comportamento elastico. A proposito del criterio di resistenza, Saint-Venant fa proprio il concetto che abbiamo scorto esser presente in Mariotte (cfr. il par. 5.5): *egli afferma cioè*[2] *che il vero metodo per accertare la resistenza di un corpo consiste nel calcolare la dilatazione massima prodotta dal carico: tale dilatazione deve essere minore di un'assegnata quantità che l'esperienza può determinare.* Seguono le applicazioni: viene preso in esame il caso della trave eventualmente iperstatica, soggetta a una distribuzione qualunque di forze. Qui appare per la prima volta un'osservazione d'ordine generale che, successivamente, assumerà l'aspetto di un principio, il cosiddetto *postulato di Saint-Venant*, appunto. Ma su questo torneremo tra poco.

[redacted]

[1] In: I. Todhunter, K. Pearson, cit., *1*, pp. 834-835.

[2] A. Barré de Saint-Venant, *Leçons de mécanique appliquée*, Cours lithographié - École des Ponts et Chaussées, pp. 16-17, Parigi, 1837-1838.

12.5 IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT E IL METODO SEMI-INVERSO

La soluzione offerta da Saint-Venant nella grande memoria del 1855 risponde solo in parte alle pretese di Lamé poiché non è del tutto generale; ma vi risponde pienamente per quel che in realtà è utile alla tecnica. Anzi, in una nota all'introduzione del trattato di Clebsch, Saint-Venant esporrà chiaramente le ragioni che rendono discutibile la rilevanza applicativa della soluzione generale al problema di Lamé: eccettuato il caso di un prisma immerso in un fluido, e soggetto perciò a pressione uniforme, è impossibile assegnare col dovuto rigore le forze distribuite sulle facce del prisma stesso: esse derivano, di norma, dal contatto con altri corpi, e dipendono quindi dallo stato delle loro superficie e dalla natura dei materiali. Quel che può essere effettivamente misurabile non è la distribuzione puntuale ma l'entità delle forze e dei momenti risultanti.

Il primo capitolo della memoria [12] introduce ai temi successivamente studiati, enunciando il metodo misto o semi-inverso che Saint-Venant utilizza. Si consideri un cilindro (o un prisma) generato da una superficie A piana di forma generica che si muova descrivendo con ogni suo punto una linea retta perpendicolare alla superficie generatrice (fig. 12.5). La lunghezza l del cilindro è molto maggiore delle massime dimensioni trasversali. Si suppongano nulle le forze di volume e le forze agenti sulla superficie laterale del cilindro, il quale pertanto potrà essere caricato o vincolato in corrispondenza delle basi.

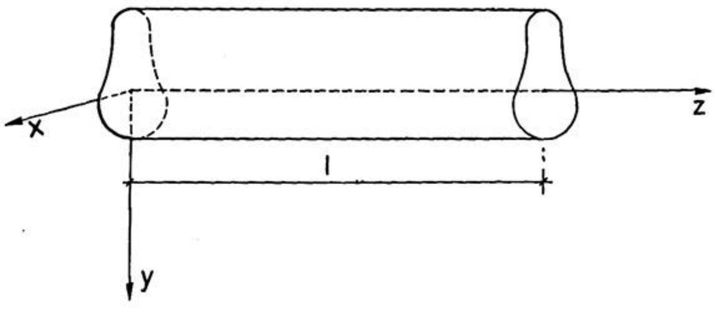

Fig. 12.5.

Il materiale, omogeneo, si comporti secondo le leggi (11.18.13) dell'elasticità lineare e isotropa. Riferiamo il sistema a una terna di assi cartesiani ortogonali la cui origine è posta nel baricentro di una delle basi, e dove l'asse z coincide con l'asse geometrico del cilindro mentre gli assi x e y sono principali di inerzia per la sezione trasversale.

A questo punto si può formulare il problema dell'equilibrio elastico in forma *diretta*: essendo assegnate le forze agenti sulle basi (ed eventualmente

12. A.J.C de Saint-Venant: *Mémoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'équilibre intérieur des solidés élastiques en général, etdes formules pratiques pour le calcul de leur resistance à diverse efforts s'exerçant simultanément*. Mémoirs des Savants, vol XIV, 1855

le modalità di vincolo) determinare le componenti di tensione, di deformazione, di spostamento in ogni punto del cilindro. Tale formulazione sarebbe quella più ragionevole, ma presenta, come si è detto, difficoltà matematiche insormontabili. Ad essa può essere sostituita la formulazione *inversa* che consiste nell'assegnare a priori le componenti di spostamento in tutti i punti del cilindro e nel dedurre le forze esterne di contorno (e in generale anche di volume) che sono compatibili con tale determinazione. Questa forma del problema è in effetti accessibile in modo immediato, ma non significa quasi nulla sul piano applicativo, poiché la completa determinazione a priori della soluzione le toglie ogni generalità.

Tra i due estremi (la formulazione diretta e quella inversa) è possibile una via di mezzo? Ossia, è possibile valersi di *qualche* ipotesi a priori sulla soluzione, senza però determinarla completamente, e « in ugual misura », lasciare in qualche modo indeterminata la distribuzione delle forze superficiali, riservandosi però di ritenere assegnate a priori alcune sue proprietà, sì da garantire alle soluzioni che si otterranno un certo grado di generalità?

Ebbene, la risposta è affermativa: si può configurare un procedimento *semi-inverso* nel quale alcune, ma non tutte, tra le proprietà della soluzione sono assunte a priori e, nello stesso tempo, alcune, ma non tutte, tra le proprietà delle sollecitazioni esterne sono lasciate a priori indeterminate. Tale procedimento *semi-inverso* nella forma proposta da Saint-Venant è congegnato nei seguenti termini. A priori *sono assegnate*:

(per le sollecitazioni esterne)	(per la soluzione)
1) le forze di volume identicamente nulle	1) $\sigma_{xx} = 0$
2) le forze di superficie, sulla superficie laterale del cilindro, identicamente nulle	2) $\sigma_{xy} = 0$
3) *le caratteristiche di sollecitazione* sulle basi	3) $\sigma_{yy} = 0$ in tutti i punti del cilindro

Le posizioni:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \tag{12.5.1}$$

possono essere illustrate intuitivamente; esse equivalgono all'ipotesi che tra le fibre longitudinali del cilindro si esercitino azioni mutue soltanto nella direzione delle fibre stesse (fig. 12.6).

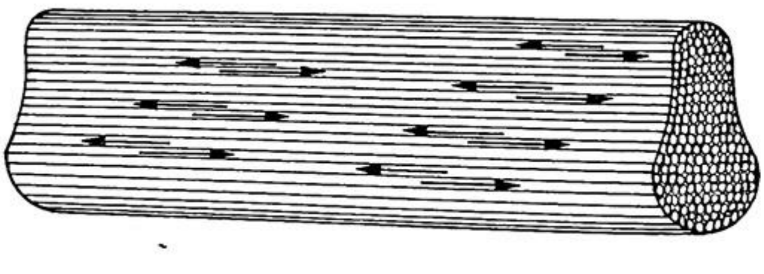

Fig. 12.6.

Sono invece affidate alla effettiva risoluzione del problema:

(per le sollecitazioni esterne)	(per la soluzione)
la distribuzione delle forze sulle basi	1) le tre componenti della tensione: σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz};
	2) la completa determinazione delle componenti di spostamento

La trattazione svolta da Saint-Venant ha dimostrato che questo procedimento *misto* o *semi-inverso* è percorribile per intero e può essere svolto sia in termini di spostamento [13], sia in termini di tensione [14]. Dal punto di vista applicativo, i risultati che si ottengono riescono a inquadrare in una teoria unitaria i diversi casi di sollecitazione che si incontrano nelle travi: la presso- o tensoflessione, il taglio, la torsione. Resta tuttavia da discuterne la validità: infatti non è spesso vero che le travi siano libere da forze sulla superficie laterale, e inoltre non è assicurato che la reale distribuzione delle forze sulle basi sia quella « dedotta » al termine della risoluzione del problema di Saint-Venant.

12.6 IL POSTULATO DI SAINT-VENANT

Ma proseguiamo per ora la lettura della memoria *Sur la torsion des prismes*. Il secondo capitolo occupa cinquantadue pagine [15] e riassume la teoria generale dell'elasticità, con l'analisi della deformazione, della tensione, e del legame sia nel caso anisotropo, sia in quello isotropo, con ulteriori indicazioni sul criterio di rottura per dilatazioni massime.

Nel terzo capitolo [16] la difficoltà sopra accennata sui limiti applicativi del metodo semi-inverso viene approfonditamente discussa. Ciò dà luogo all'introduzione di un nuovo principio, il cosiddetto postulato di Saint-Venant, cui è dedicato l'ultimo paragrafo [17]. Su di esso Saint-Venant tornerà più volte nel corso della sua opera [18]; ad esempio, in una nota al margine della *Notice I* che si

[13] La prima trattazione *generale* in tal senso si trova nel trattato di Clebsch (*Theorie der Elasticität der fester Körper*, p. 73 e segg., Lipsia, 1862); fu appunto Clebsch a denominare il problema del cilindro elastico sollecitato sulle basi come *das Saint-Venantsche Problem.*

[14] R. F. Baldacci, *Sull'integrazione diretta del problema di Saint-Venant in termini di tensioni*, "Atti Accad. Scienze", *90*, p. 604, Torino, 1955-56; cfr. anche: "Giorn. Genio Civile", *95*, p. 759, 1957.

[15] A. Barré de Saint-Venant, cit., pp. 236-288.

[16] Ibidem, pp. 288-299.

[17] Ibidem, par. 33, pp. 297-299.

[18] Cfr.: *Résumé des Leçons* (...), *par Navier* (...). *Troisième édition avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant*, pp. 40-42, Parigi, 1864; e ancora: *Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch* (...) *avec des notes étendues de M. de Saint-Venant*, pp. 174-177, Parigi, 1883.

aggiunge al commento del *Résumé des leçons* (...) di Navier, egli così lo espone: «*Il modo di applicazione e di ripartizione delle forze sulle facce estreme dei prismi è indifferente* agli effetti sensibili prodotti sul resto della loro lunghezza, di sorta che si può sempre, entro sufficiente approssimazione, sostituire le forze che sono applicate, con forze *staticamente equivalenti*, ossia dotate degli stessi momenti totali e delle medesime risultanti, e distribuite secondo la legge che è imposta dalle formule della trazione, della flessione e della torsione, affinché esse siano perfettamente esatte».

Nella Memoria Saint-Venant precisa che «*occorre escludere soltanto i punti molto prossimi a quelli su cui agiscono le forze*» [19]. La stessa cosa può essere detta affermando l'effetto *locale* di un sistema di *forze autoequilibrate* distribuite su una piccola porzione del cilindro. Se infatti sulle basi operano delle forze f_x^*, f_y^*, f_z^* tali che (fig. 12.7):

$$\int_A f_x^*\, dA = T_x \qquad \int_A f_y^*\, dA = T_y \qquad \int_A f_z^*\, dA = N$$

$$\int_A f_z^*\, y\, dA = M_x \qquad \int_A f_z^*\, x\, dA = -M_y \tag{12.6.1}$$

$$\int_A (f_y^* x - f_x^* y)\, dA = M_t$$

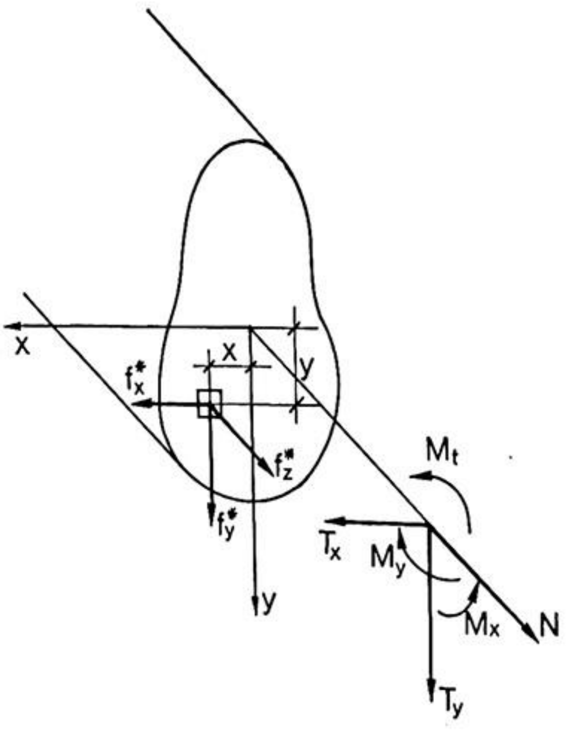

Fig. 12.7.

[19] A. Barré de Saint-Venant, *Mémoire sur la torsion des prismes*, cit., p. 299.

comunque siano esse ripartite, possono essere decomposte nelle somme (fig. 12.8):

$$f_x^* = f_x + \bar{f}_x \qquad f_y^* = f_y + \bar{f}_y \qquad f_z^* = f_z + \bar{f}_z \tag{12.6.2}$$

dove f_x, f_y, f_z ammettono come risultanti e momenti risultanti T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_t secondo le (12.6.1) e obbediscono alla legge di distribuzione imposta dal metodo semi-inverso, mentre $\bar{f}_x$, $\bar{f}_y$, $\bar{f}_z$ sono autoequilibrate nel senso che:

$$\int_A \bar{f}_x \, dA = 0 \qquad \int_A \bar{f}_y \, dA = 0 \qquad \int_A \bar{f}_z \, dA = 0 \tag{12.6.3}$$

$$\int_A \bar{f}_z \, y \, dA = 0 \qquad \int_A \bar{f}_z \, x \, dA = 0 \qquad \int_A (\bar{f}_y x - \bar{f}_x y) \, dA = 0 \tag{12.6.4}$$

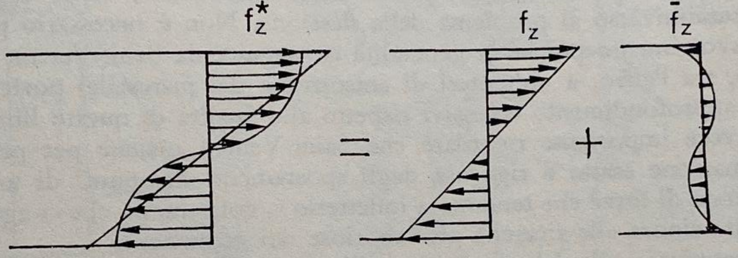

Fig. 12.8.

Ebbene, sembra intuitivo riconoscere che $\bar{f}_x$, $\bar{f}_y$, $\bar{f}_z$ inducano sollecitazioni soltanto nelle zone del cilindro che sono prossime alle basi così caricate, e lasciano in riposo il resto.

Nella *Notice* che si è sopra ricordata, Saint-Venant aggiunge le seguenti parole giustificative: « L'autore ha fatto due esperienze di questo genere sotto gli occhi dell'Accademia, leggendo una delle sue Memorie. Esse consistevano semplicemente nel pinzare con delle tenaglie un prisma di caucciù, e nel dilatare trasversalmente una striscia sottile, tirandone i bordi in due sensi opposti (fig. 12.9). Tutti possono ripeterli e vedere che la contrazione o la dilatazione

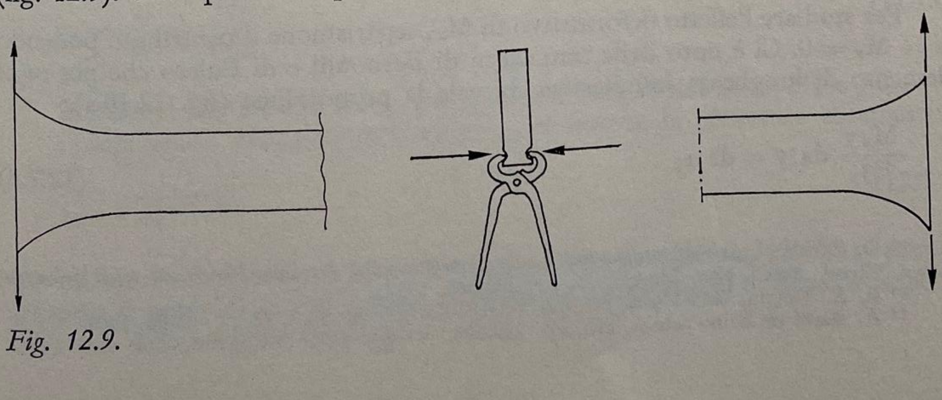

Fig. 12.9.

non si fanno in alcun modo sentire a distanze superiori allo spessore nel primo caso e alla larghezza nel secondo ».

La tesi di Saint-Venant è della massima importanza: solo se essa è ben fondata si può sperare di dar consistenza ai risultati delle teorie tecniche, che ad essa sono generalmente subordinate.

Purtroppo una sua dimostrazione rigorosa e generale, comprensiva dei suoi limiti di applicazione, presenta gravi difficoltà. Tuttavia notevoli passi avanti sono stati compiuti in tempi abbastanza recenti, ad esempio da O. Zanaboni [20] e da R. A. Toupin [21].