Il modello della tensione di Cauchy

Lettura: E. Benvenuto, *La Scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico*, Sansoni, 1981 - §11.4-11.5

11.4 DEFINIZIONE DELLA TENSIONE SECONDO CAUCHY

È ora di fare conoscenza con il grande scienziato che ci accompagnerà idealmente per tutto questo capitolo: è Augustin Louis Cauchy, una figura di matematico e meccanico del tutto emergente nella cultura scientifica dell'Ottocento.

Cauchy nacque a Parigi il 21 agosto 1789 e morì a Sceaux sulla Senna il 23 maggio 1857. Si formò all'« École des Ponts et Chaussées » entrando quindi nel vivo dell'ingegneria di quel tempo; egli stesso esercitò per qualche tempo, stenza di Lagrange e di Laplace, rivolse ogni sua attività alla ricerca scientifica nel campo della matematica e della fisica

Ben presto Cauchy entrò a far parte dei docenti dell'« École Polytechnique »,

¹³ A. Cauchy, cit., p. 201.

a partire dal 1816. Con l'avvento di Luigi Filippo, a seguito della rivoluzione del 1830, egli abbandonò l'insegnamento a Parigi e si trasferì a Torino, dove era stata creata per lui una cattedra di fisica. Personaggio austero, rigido, saldo lo spirito positivistico dei suoi colleghi, Cauchy tornò definitivamente a Parigi solo nel 1838, riprendendo la sua cattedra all'« École Polytechnique ».

I suoi contributi fondamentali si estendono a numerosi settori della matesemplice ed elegante un famoso problema di lunga storia nella geometria, il cerchi assegnati), e nel 1811 generalizzò il teorema di Eulero sui poliedri.

Nel 1816, l'« Institut » conferì a Cauchy il grand prix per una memoria molto importante sulla propagazione delle onde. La maggior parte delle sue scoperte matematiche è rintracciabile nei libri scritti per l'« École Polytechnique », quali « dispense » ai corsi da lui tenuti sino al 1830. Sono tre trattati: Cours d'analyse de l'École Polytechnique (1821), Le Calcul infinitésimal (1823), Leçons chiarire in modo rigoroso e moderno i principali concetti del calcolo infinitesimale, superando finalmente le oscurità che sino ad allora gravavano in questo importante settore della matematica vagamente affidato all'intuizione leibniziana delle quantità « infinitamente piccole »: ebbe così inizio quella fase rifondativa dei principi che caratterizzerà buona parte della matematica ottocentesca.

Sempre intorno gli stessi anni (successivi al 1820) Cauchy sviluppò la sua teoria delle funzioni a variabile complessa e offerse nuovi risultati alla teoria dei numeri e all'algebra (teoria dei gruppi di permutazione). Tralasciamo di menzionare le ricerche relative all'astronomia, all'ottica, alla meccanica generale, per soffermarci invece su quelle più strettamente attinenti alla meccanica dei continui e alla teoria dell'elasticità.

La prima memoria fondamentale su questi argomenti è del 1823: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des solides on fluides, élastiques ou non élastiques, ed è pubblicata nel "Bulletin des Sciences par la Société Philomatique". Ad essa numerose altre seguirono, raccolte, in gran parte, nei volumi degli Exercices de mathématique. Si può veramente affermare che in tali lavori Cauchy gettò le basi di tutta la teoria: definì nel modo ancor oggi seguito il concetto di tensione, stabilendone le proprietà essenziali sia col suo « grande teorema », sia con lo studio delle tensioni principali di cui parleremo in seguito, formulò le equazioni indefinite dell'equilibrio, svolse compiutamente l'analisi della deformazione, introdusse il legame elastico.

Per ragioni didattiche non possiamo seguire da vicino la trattazione di Cauchy, riferendoci di volta in volta ai suoi singoli contributi, e preferiamo presentare nelle pagine seguenti un quadro dei principali risultati sull'analisi della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-della tensione, sull'analisi della deformazione e sul legame elastico che, pur richia-

l'approfondimento e la generalità.
Rimandando dunque il lettore ai paragrafi successivi, ci limitiamo ora a

esporre brevemente la nuova impostazione proposta da Cauchy per la definiesporre brevemente la nuova impostazione proposazione proposazione proposazione proposazione proposazione proposazione la definizione del concetto di tensione. Nel lavoro del 1823, a differenza di Navier, zione del concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari della concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari della concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari della concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari della concetto di tensione. zione del concetto di tensione. Nel lavolo del nozioni già rese familiari dalla Cauchy introduce la tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla Cauchy introduce la tensione e, prima ancora, dal « principio di solidificazione del concetto di Eulero e, prima ancora, dal « principio di solidificazione del concetto di tensione. Nel lavolo del concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione facendo appello a nozioni già rese familiari dalla concetto di tensione di ten Cauchy introduce la tensione facendo appento a mora del consideratione de la tensione facendo appento a mora del consideratione del consideratione del consideratione del consideratione del consideratione del consideration del co meccanica dei fluidi di Eulero e, prima alle di galileo (cfr. di Stevino utilizzato nel corso del dibattito sul problema di Galileo (cfr. di tensione, secondo Cauchy, si collega pertanto al di Stevino utilizzato nel corso del dibattico di concetto di tensione, secondo Cauchy, si collega pertanto al concep. 3-5). Il concetto di tensione, Vediamo in che modo. cetto di pressione su un piano. Vediamo in che modo.

o di pressione su un piano. Veulattio III de la consideri un corpo solido (o fluido) C in equilibrio sotto l'azione delle Si consideri un corpo solido (o fluido) C in equilibrio sotto l'azione delle Si consideri un corpo sondo (o nato) de la punto P interno al corpo, forze esterne attive e reattive e, con riferimento a un punto P interno al corpo, forze esterne attive e reattive e, con l'interiment (α) e (α'). Le due porzioni attra-un piano π_n , che lo divida in due porzioni rappresentabili mediante una di un piano π_n , che lo divida in due polizioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuverso il piano π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distributati di scambiano azioni rappresentabili di scambiano azioni rappre

zione superficiale di forze (fig. 11.3).

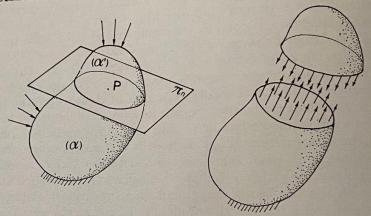


Fig. 11.3.

Supponendo che ΔA_n indichi l'area di un intorno di P e ΔF_n , ΔM_n la risultante e il momento risultante delle forze agenti su ΔA_n , consideriamo i rapporti:

$$\frac{\Delta \mathbf{F_n}}{\Delta \mathbf{A_n}} \qquad \frac{\Delta \mathbf{M_n}}{\Delta \mathbf{A_n}} \tag{11.4.1}$$

È prevedibile che al tendere a zero di ΔA_n anche ΔF_n e ΔM_n tendano a zero e che, esistendo finiti i limiti dei rapporti precedenti per $\Delta A_n \rightarrow 0$, si abbia

$$\mathbf{S}_{n} = \lim_{\Delta \mathbf{A}_{n} \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_{n}}{\Delta \mathbf{A}_{n}} \qquad \lim_{\Delta \mathbf{A}_{n} \to 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_{n}}{\Delta \mathbf{A}_{n}} = \mathbf{0}$$

$$(11.4.2)$$

dove S_n è un vettore di modulo finito che prende il nome di tensione in P secondo la giacitura n.

L'insieme {S_n} che contiene tutte le possibili determinazioni della tensione ariare della giacitura di maindi. al variare della giacitura di π_n individua la tensione in P.

L'ipotesi $\lim_{A_n\to 0} \frac{\Delta M_n}{\Delta A_n} = 0$ configura la classe dei corpi di Cauchy; essa fu rimossa dai fratelli Cosserat, i quali ammisero la presenza di un limite finito, ΔM_n generalmente non nullo, anche per il rapporto $\frac{\Delta \mathbf{M}_n}{\Delta \mathbf{A}_n}$. In tal caso si definisce una classe più generale di corpi detti polari, entro il cui ambito si iscrivono i

RIFLESSIONI CRITICHE SUL CONCETTO DI TENSIONE

Questa è la definizione offerta da Cauchy alla tensione in un punto generico P di un corpo C soggetto ad assegnate condizioni di carico e di vincolo. Ad essa faremo riferimento, poiché tale definizione è ormai entrata di pieno diritto nell'uso comune e nessuno si arrischierebbe di avanzare dubbi sulla sua

legittimità.

Tuttavia, la cosa non è del tutto chiara. Quante operazioni puramente «immaginarie» si richiedono per giungere a questo strano ente: la tensione Sn relativa a un punto P del corpo C, secondo una giacitura n.! Occorre fissare l'attenzione su un punto P, generalmente interno al corpo: ma al tempo stesso non si può sperare di raggiungerlo « realmente » con qualche strumento di misura che penetri nel corpo, senza alterare il suo primitivo stato di sollecitazione. Occorre « segare » idealmente il continuo distinguendo due parti separate da una sezione passante per P e di giacitura π_n : ma non si può in alcun modo sperare di tradurre in pratica questa operazione ideale, senza stravolgere del tutto lo stato dell'oggetto fisico che si vuole esaminare. Occorre costruire il rapporto $\frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta \mathbf{A_n}}$ (cfr. la (11.4.1)) e su questo introdurre un curioso passaggio al limite per $\Delta A_n \rightarrow 0$:

$$S_n = \lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A_n}$$

ma certamente nulla si può dire a priori sulle condizioni necessarie per rendere

matematicamente intelligibile e sensato tale passaggio al limite.

Che cosa dovremmo dunque concludere? Se ci rivolgiamo, per prendere lumi, a una delle teorie « epistemologiche » più accreditate, ossia alla teoria « operativa » proposta da Percy W. Bridgman nell'analisi dei concetti fondamentali della fisica, rischiamo di restare a tutta prima assai interdetti. Secondo il Brid. il Bridgman, il carattere radicalmente empirico della conoscenza scientifica importe la carattere radicalmente empirico della conoscenza scientifica impone che il fisico non ammetta «alcun principio a priori che determini o limiti la limiti la possibilità di nuove esperienze. L'esperienza è determinata soltanto dall'esperienza può stabilire se i condall'esperienza » 14. Da ciò deriva che solo l'esperienza può stabilire se i con-

¹⁴ P. W. Bridgman, La logica della fisica moderna, 1927, trad. it., p. 35, Torino, 1965,

cetti scientifici definiti mediante l'indicazione di qualche presunta proprietà cetti scientifici definiti mediante l'indicazione di proprietà proprietà obiettiva corrispondano a qualcosa di esistente in natura. Ora, l'unico modo obiettiva corrispondano a qualcosa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa è quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre il significato di proprienza quida di se stessa e quello di ridurre di proprienza qui di proprienza q obiettiva corrispondano a qualcosa di esistente quello di ridurre il significato dei per rendere l'esperienza guida di se stessa è quello di ridurre il significato dei per rendere l'esperienza guida di se stessa è quello di ridurre il significato dei per rendere l'esperienza guida di se stessa è quello di ridurre il significato dei per rendere l'esperienza guida di se stessa di operazioni empiriche. Ad esempio, concetti scientifici a una certa successione di operazioni empiriche. Ad esempio, concetti scientifici a una certa di lunghezza risulta fissato quando sono finale concetto di lunghezza risulta fissato di lunghezza risulta fissato di lunghezza risulta fissato di lunghezza risulta fissato di lunghezza risulta fis concetti scientifici a una certa successione di crisulta fissato quando sono fissate dice Bridgman, «il concetto di lunghezza si misura; vale a dire, il concetto di lunghezza si misura; dice Bridgman, «il concetto di lunghezza si misura; vale a dire, il concetto di le operazioni mediante cui la lunghezza si misura; vale a dire, il concetto di le operazioni mediante cui la lunghezza si misura; vale a dire, il concetto di le operazioni con cui la di le operazioni mediante cui la lungnezza si un di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica né più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica ne più né meno che il gruppo di operazioni con cui la lunghezza implica ne più ne concetto noi non intendiamo altro che il concetto noi non intendiamo altro che il concetto noi non intendiamo altro che il concetto noi non intendiamo che il concetto lunghezza implica né più ne meno che ne del corrispondente gruppo di aperale, per concetto noi non intendiamo altro che un ghezza si determina. In generale, per concetto del corrispondente gruppo di aperale, il concetto è sinonimo del corrispondente gruppo di aperale. ghezza si determina. In generale, per concetto è sinonimo del corrispondente gruppo di operazioni; il concetto è sinonimo del corrispondente gruppo di operazioni, gruppo di operazioni; il concetto è sinonimo.
Se il concetto è fisico, come nel caso della lunghezza, le operazioni sono effet. Se il concetto è fisico, come nei caso della continuità misura la lunghezza; se il tive operazioni fisiche, cioè quelle mediante cui si misura la lunghezza; se il tive operazioni fisicne, cioe quelle internationali matematica, le operazioni concetto è mentale, come nel caso della continuità matematica, le operazioni concetto è mentale, come nel caso della determiniamo se un dato insieme di sono mentali, cioè quelle mediante cui determiniamo se un dato insieme di grandezze è continuo o no » 15.

A questo punto, non possiamo far altro che domandarci: che ne è della tensione, visto che non si può sperare di rendere operativa, nel senso di Bridgman, la sua definizione? Deve essere esclusa dal rango dei concetti fisici? È lo stesso Bridgman a rispondere su queste domande e l'interesse della sua risposta ci spinge a riportarla per intero, come esempio di riflessione critica sui concetti, anche i più familiari, che non dovrebbe essere mai estranea all'orizzonte cultu-

rale dello scienziato e del tecnico.

Il Bridgman, dunque, osserva dapprima che in fisica sono spesso presenti dei « modelli mentali » e dei « costrutti mentali » la cui efficacia e la cui legittimità sono legate a più remote verifiche d'esperienza. Uno degli esempi addotti è appunto quello attinente al concetto di tensione. « Una tensione — egli afferma — è per definizione una proprietà dei punti interni di un corpo connessa matematicamente in modo semplice alle forze agenti sulla superficie libera del corpo. Una tensione è quindi, per sua natura, sempre al di fuori del raggio dell'esperienza diretta, ed è pertanto un costrutto. L'intera struttura di una tensione non corrisponde a nulla nell'esperienza diretta (...). Dobbiamo poi chiederci se la tensione, che abbiamo inventato per risolvere la situazione di un corpo sottoposto a forze, è un buon costrutto. In primo luogo, una tensione ha lo stesso numero di gradi di libertà che compete al fenomeno osservabile, in quanto una delle proposizioni della teoria matematica dell'elasticità asserisce che le condizioni al contorno, le quali costituiscono le variabili sperimentali, determinano univocamente la tensione in un dato corpo (...); appare ovvio, esaminando le equazioni di interesaminando le equazioni, che viceversa un sistema possibile di tensioni determina univocamente le condizioni al contorno nella quantità significativa. Vi è dunque una corrispondenza binni dunque una corrispondenza biunivoca tra una tensione e la situazione fisica buon che essa è destinata a coprire, pertanto la tensione e la situazione costrutto (...)». Di più «Un costrutto di tensione rappresenta un buon costrutto (...)». Di più: « Un corpo sotto tensione è anche in uno stato di sforzo, che può venir determinato della la consione è anche in uno stato di la sforzo sforzo, che può venir determinato dalle deformazioni esterne, oppure lo sforzo nei punti interni può venir reso più arrida nei punti interni può venir reso più evidente mediante quegli effetti ottici della

¹⁵ P. W. Bridgman, cit., p. 37.

doppia rifrazione nei corpi trasparenti, che ora vengono tanto impiegati in doppia riliazione di con di con la contra di con la contra di con la contra di contra esperimenti dinocerto esperimenti di la di un certo limite, abbiamo fenomeni nuovi quali la deformazione permanente o addirit-

« Abbiamo pertanto ragione di ritenerci soddisfatti del nostro costrutto della tensione. In primo luogo, dal punto di vista formale, esso rappresenta della tensione de la contra de la corrispondenza univoca con i dati fisici un buon costanti in termini dei quali è definito; in secondo luogo, abbiamo diritto di attribuirgli in termini de la tensione è connessa in modo unico ad altri fenomeni una realtà fisica perché la tensione è connessa in modo unico ad altri fenomeni una realta de quelli considerati nella sua definizione. Quest'ultimo requisito in effetti, dal punto di vista operativo, non rappresenta altro che una definizione di ciò che intendiamo per realtà delle cose non date direttamente dall'esperienza. L'esperienza mostra che la tensione, oltre che soddisfare i requisiti formali, è utilissima nel correlare i fenomeni, onde noi siamo giustificati nel dare a questo costrutto un posto preminente tra i nostri concetti » 16.

Le considerazioni svolte da Bridgman sono veramente interessanti anche per chi non sia disposto ad accettare del tutto il punto di vista operativo propugnato dall'autore. Usando una diversa terminologia, esse sembrano condurre a una concezione meno «ingenua» della tensione e in generale dei procedimenti di analisi propri alla meccanica dei continui, nel senso che dimostrano come l'efficacia della descrizione non derivi dalla semplice verisimiglianza dei concetti usati, ma dall'intera struttura formale della teoria, nella sua coerente « sintassi » e nelle valenze semantiche offerte dal suo « lessico », onde si venga a stabilire una corrispondenza biunivoca « tra la tensione e la situazione fisica che essa è destinata a coprire ».

Null'altro è lecito dire: la «realtà fisica» della tensione ha un aspetto diverso dalla « realtà fisica » di molti altri concetti operativamente accessibili che aderiscono ai dati dell'esperienza classificandoli, o esibendone qualche proprietà. La realtà fisica della tensione risiede ancora nella biunivocità di una corrispondenza, come appunto afferma Bridgman. E allora forse ciò vuol dire il costrutto della tensione è «buono» non per la verità del concetto ma per

l'espressività del linguaggio nel quale esso si iscrive.

Torna qui, dunque, quel tema «linguistico» che, come il lettore avrà osservato, è un Leitmotiv ricorrente nella nostra storia. L'invenzione matematica della tensione si arricchisce subito di proprietà formali implicite nel modo stesso con cui è introdotta, produce intorno a sé una fitta rete di relazioni che ne definiscono la natura « geometrica », inserendola quale elemento di un linguaggio ben strutturato e coerente, dal quale promanano per via deduttiva numerosi e interessanti risultati. Si tratta del capitolo, di per sé astratto, riguardante l'analisi tensoriale; e la cosa più straordinaria sta nel fatto che la « bontà del costa d del costrutto » conduce a impreviste convergenze sperimentali. Ad esempio, come vol. come vedremo tra poco, l'esistenza, in ogni punto del continuo, di tre direzioni privilegiata del continuo, di tre direzioni privilegiate, dette direzioni principali, può essere dedotta a tavolino, operando

¹⁶ P. W. Bridgman, cit., p. 75 e segg.

formalmente sul semplice concetto di tensione: eppure l'esperienza ne dà, a posteriori, piena conferma.