Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*, CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Parte IV - Il Problema di Saint Venant

- **Obiettivi, Generalità**
- **Forza normale centrata, Flessione retta**
- **Flessione deviata, Forza normale eccentrica**
- **Flessione e Taglio**
- **Torsione Uniforme**

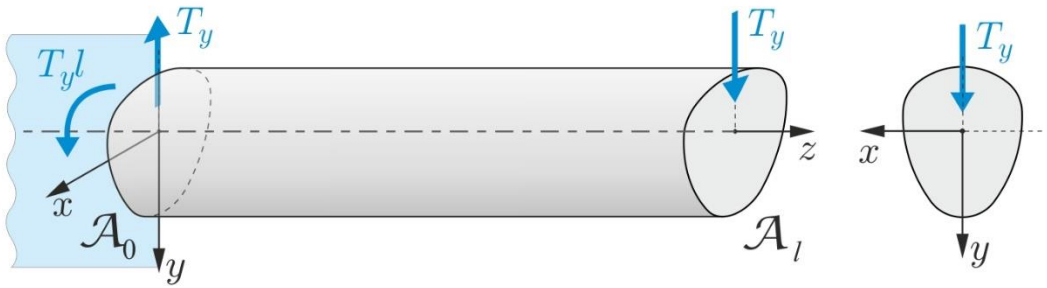
Lezione 20

4. Flessione e Taglio

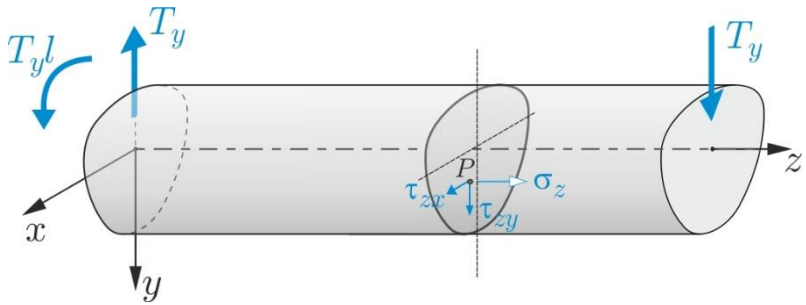
- **Posizione del problema**
- **Ipotesi sulla soluzione (tensioni)**
- **Tensioni normali**
- **Tensioni tangenziali**
- **Teoria approssimata di Jourawsky**
- **Esercizi** (sito: E17-18, testo: §21.10-21.11)

4. Flessione e Taglio

Posizione del problema



Ipotesi sulla soluzione (tensioni)



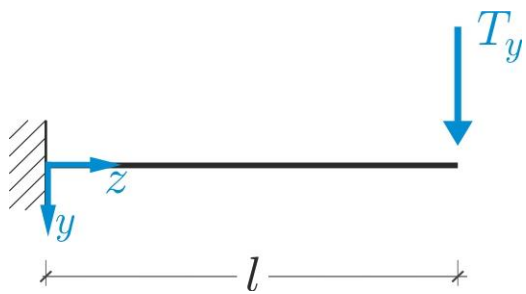
$$\sigma_z \neq 0$$

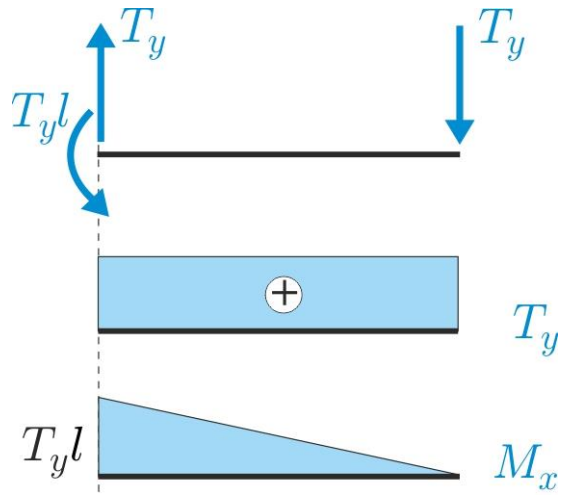
$$\boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$$

$$T(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

4. Flessione e Taglio

Modello 1D





$\Rightarrow \boldsymbol{\tau}$

$\Rightarrow \sigma_z$

$$M_x(z) = -T_y l + T_y z$$

Tensioni normali σ_z

Formula di Navier

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad M_x(z) = -T_y l + T_y z \qquad \sigma_z(y,z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = -\frac{T_y}{I_x} y(l-z)$$

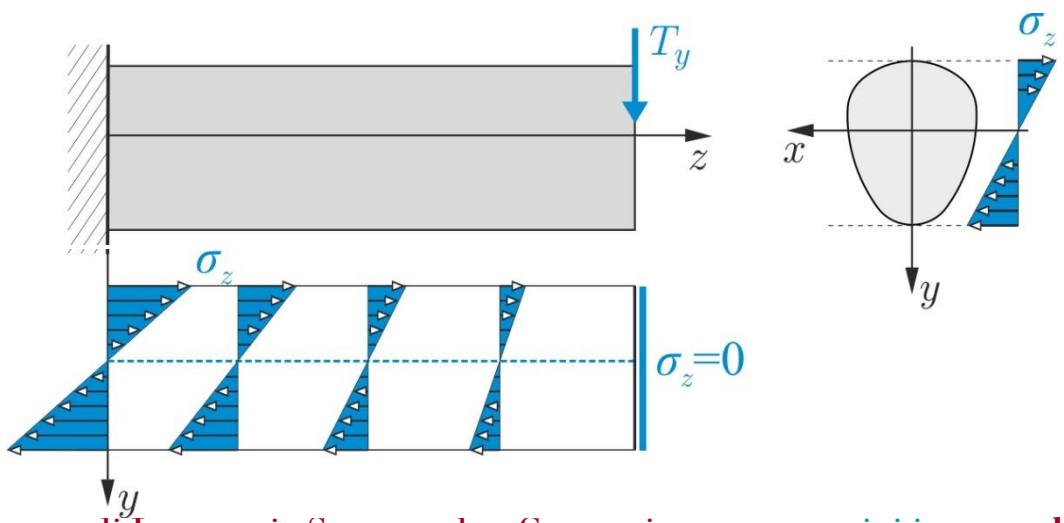
4. Flessione e Taglio

Tensioni normali σ_z

$$\sigma_z(y,z) = -\frac{T_y}{I_x}(l-z)y \qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{T_y}{I_x}y$$

$$\sigma_z(y,0) = -\frac{T_y}{I_x}l\,y \qquad \sigma_z(y,l) = 0$$

Tensioni normali σ_z: rappresentazione grafica



4. Flessione e Taglio

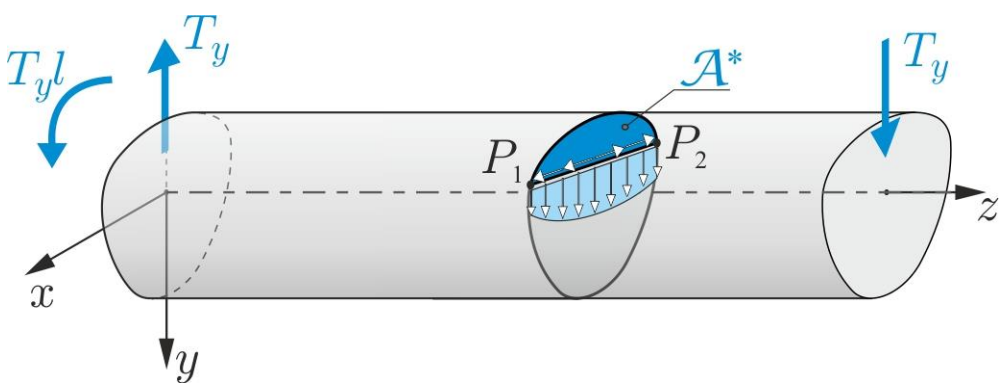
Tensioni tangenziali τ

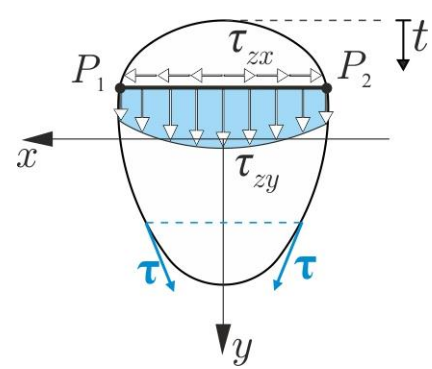
Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{zx}(x,y)\mathbf{i} + \tau_{zy}(x,y)\mathbf{j} = \boldsymbol{cost_z}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x}y}$$

$$c.c.\, su\ \Gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0}, P \in \Gamma}$$





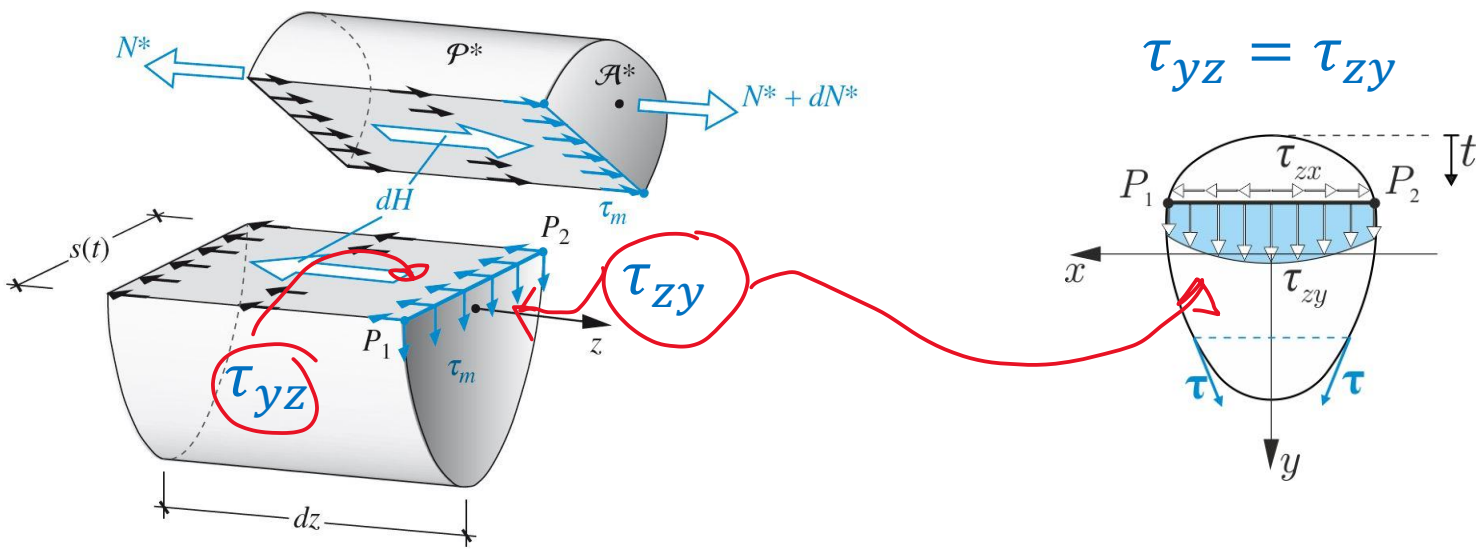
$\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$

4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ: reciprocità delle tensioni tangenziali

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$
$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

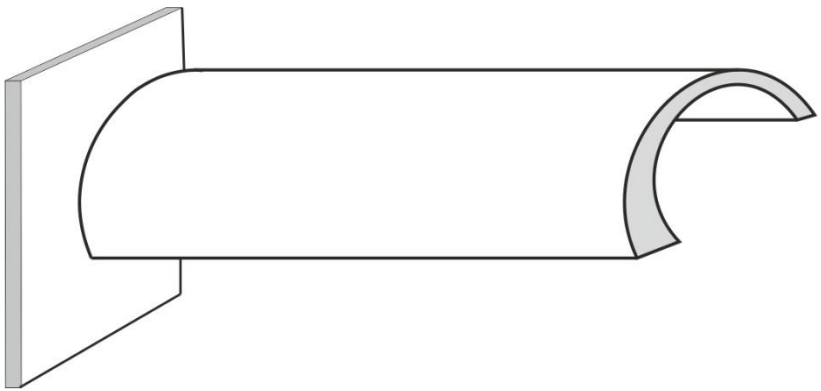
$$\boxed{\mathbf{m} \perp \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \tau_{mn} = \tau_{nm}}$$

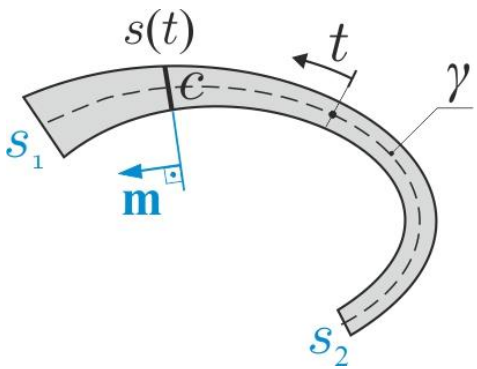


4. Flessione e Taglio

Tensioni tangenziali τ:
Teoria approssimata di Jourawsky

Applicabilità: sezioni di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$)





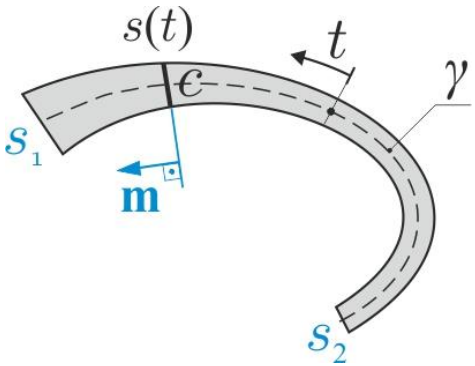
γ: linea media
c: corda (segmento perpendicolare alla linea media)
t: ascissa locale

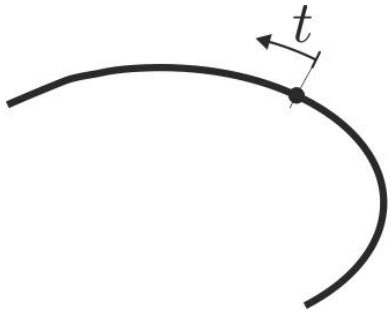
$$mis(\gamma) := a \qquad s \ll a \qquad 0 \le t \le a$$
$$mis(c) := s(t)$$

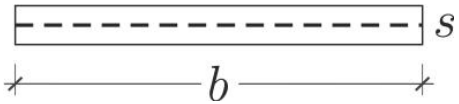
4. Flessione e Taglio

Teoria approssimata di Jourawsky

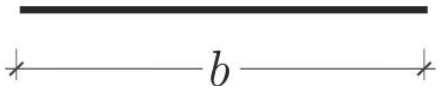
Sezioni di piccolo spessore (sezioni sottili $s \ll a$): rappresentazione

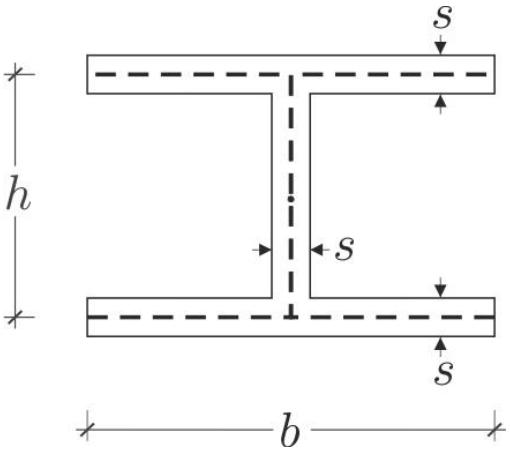




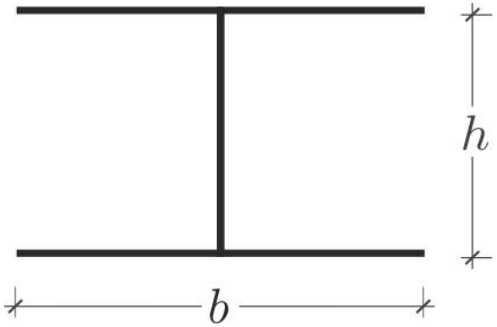


$a = b$





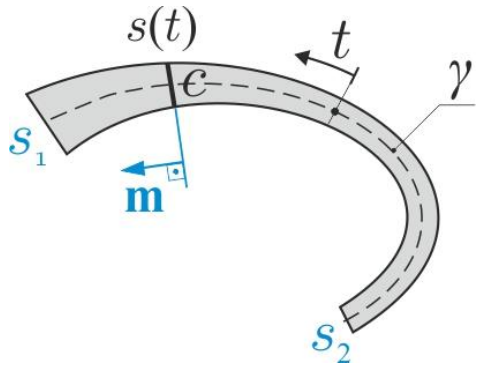
$a = 2b + h$

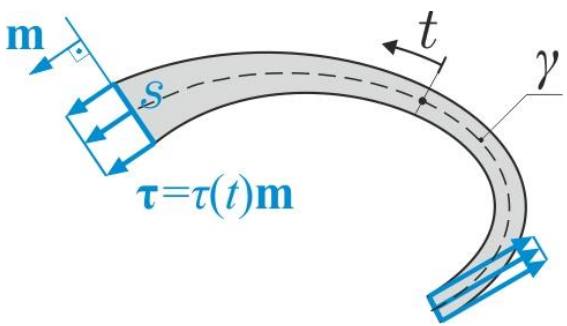


4. Flessione e Taglio

Teoria approssimata di Jourawsky

Ipotesi





Ipotesi 1: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è parallelo alla linea media e quindi perpendicolare alla corda

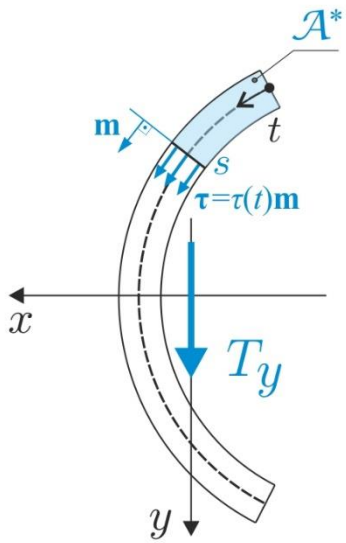
Ipotesi 2: il vettore delle tensioni tangenziali $\boldsymbol{\tau}$ è costante lungo la corda, il suo modulo dipende quindi dalla sola ascissa locale t:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

Formula di Jourawsky: *verso* e *modulo* del vettore delle tensioni tangenziali è fornito dalla formula approssimata di Jourawsky

4. Flessione e Taglio

Formula di Jourawsky



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}$$

$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_y: forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale y. $[F]$

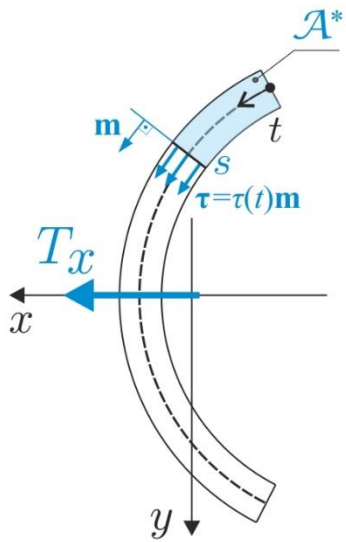
I_x: momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale x $(I_x > 0)$ $[L^4]$

s: lunghezza della corda c, spessore $(s > 0)$ $[L]$

S_x^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a x; positivo se G^* è dalla parte delle y positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio

Formula di Jourawsky



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_x\, S_y^*(t)}{I_y\, s(t)}$$

$\mathbf{m}$: versore uscente perpendicolare alla corda t: ascissa locale sulla linea media

$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$: vettore delle tensioni tangenziali; concorde con $\mathbf{m}$ se $\tau(t) > 0$ $[FL^{-2}]$

T_x: forza di taglio, positiva se concorde con l'asse locale x. $[F]$

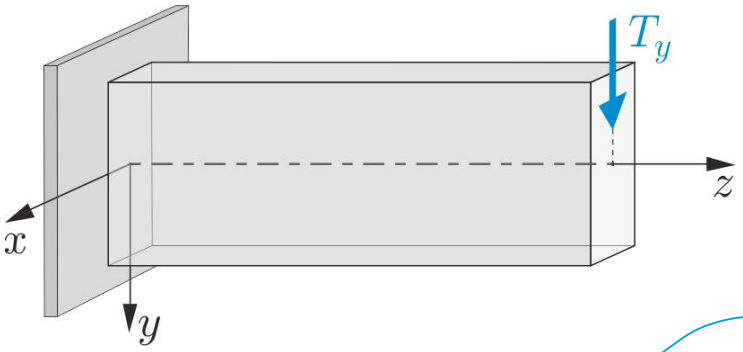
I_y: momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse locale y ($I_y > 0$) $[L^4]$

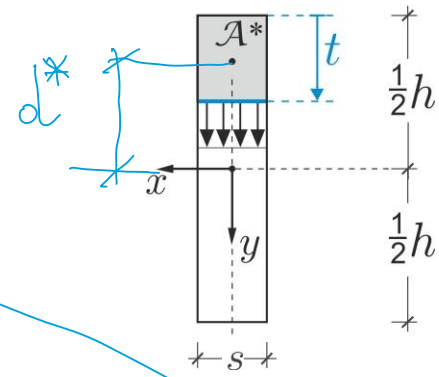
s: lunghezza della corda c, spessore ($s > 0$) $[L]$

S_y^*: momento statico della porzione $\mathcal{A}^*$ rispetto a y; positivo se G^* è dalla parte delle x positive $[L^3]$

4. Flessione e Taglio

Sezioni rettangolare sottile





$$I_x = \frac{1}{12}\, s h^3$$

$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s}$$

$$S_x^*(t) = A^* d^* = -(s\, t)\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) \qquad \Rightarrow S_x^*(t) = -st\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$$

$$\boxed{\tau(t) = \frac{T_y}{I_x}\, t\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}$$

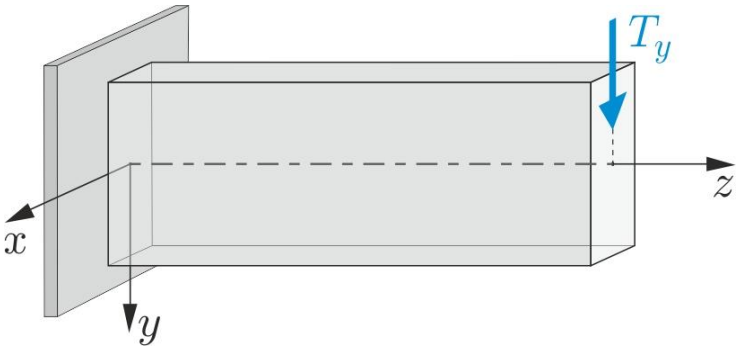
$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \tau\left(\tfrac{1}{2}h\right) = \frac{T_y h^2}{8 I_x}$$

4. Flessione e Taglio

Sezioni rettangolare sottile



$$\boldsymbol{\tau} = \tau(t)\mathbf{m}$$

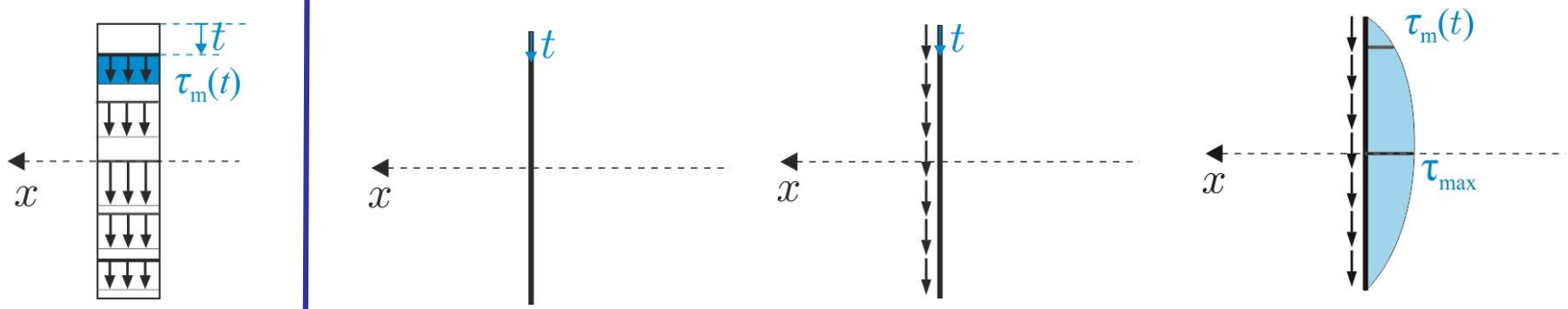
$$\boxed{\tau(t) = \frac{T_y}{I_x} t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}$$

$$\tau(0) = 0$$

$$\tau(h) = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{T_y h^2}{8 I_x}$$

Tensioni tangenziali: rappresentazione grafica



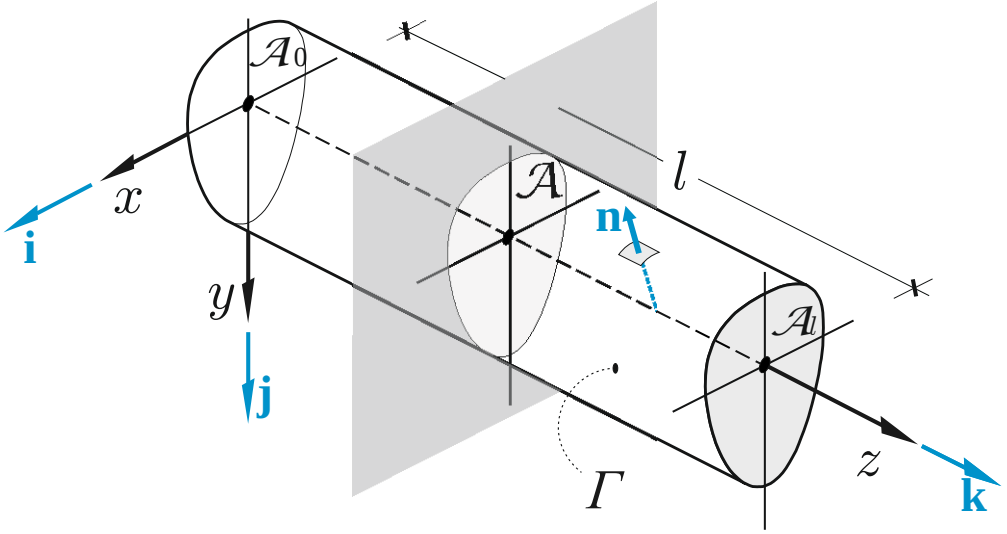
4. Flessione e Taglio

Osservazioni generali (testo § 21.4.4)

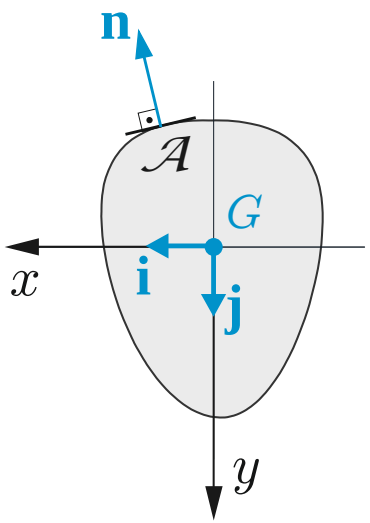
Si riassumono nel seguito gli aspetti salienti della teoria approssimata di Jourawsky, valida per sezioni di piccolo spessore:

1. le tensioni tangenziali dovute al taglio, distribuite allo stesso modo in ogni sezione del cilindro, sono dirette parallelamente alla linea media e sono costanti lungo lo spessore. Verso e intensità lungo la linea media si ricavano utilizzando la formula di Jourawsky.
2. il *flusso delle tensioni tangenziali* dovute al taglio, definito come $q(t) = s(t)\tau_m(t)$, non è costante lungo la linea media (come nel caso della torsione uniforme), ma varia *in modo continuo* con t.
3. il campo delle tensioni tangenziali *non è solenoidale* poiché la sua divergenza è diversa da zero e varia da punto a punto nella sezione; le linee di flusso sono quindi generalmente aperte.
4. in corrispondenza agli estremi liberi della sezione le tensioni tangenziali e i relativi flussi sono nulli.
5. le tensioni tangenziali raggiungono il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro (nei casi visti finora è l'asse x).
6. nei tratti paralleli all'asse x le tensioni variano linearmente, nei tratti paralleli all'asse y le tensioni variano secondo una legge quadratica.
7. la trattazione sin qui svolta non si modifica se l'asse principale y non è di simmetria per la sezione, e si estende immediatamente al caso in cui la forza tagliante è parallela all'asse principale x.

Dimostrazione della formula di Jourawsky

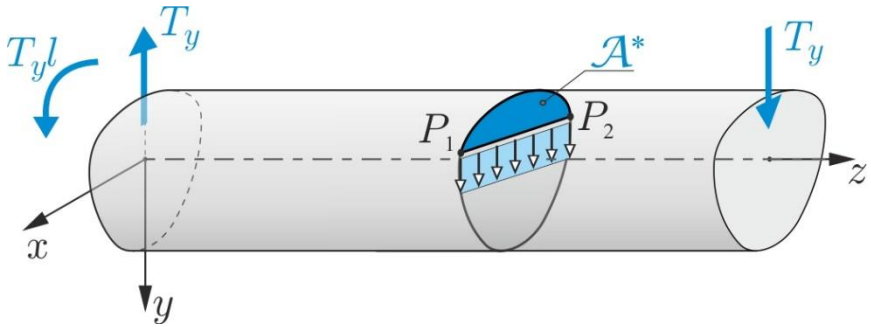


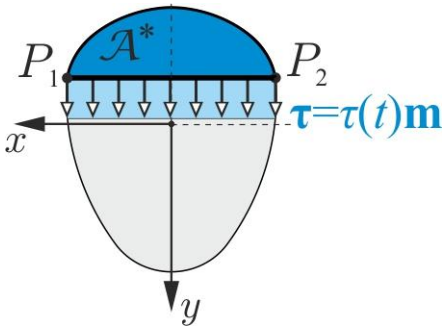
Mantello Γ: versore normale uscente **n**



Sezione generica $\mathcal{A}$

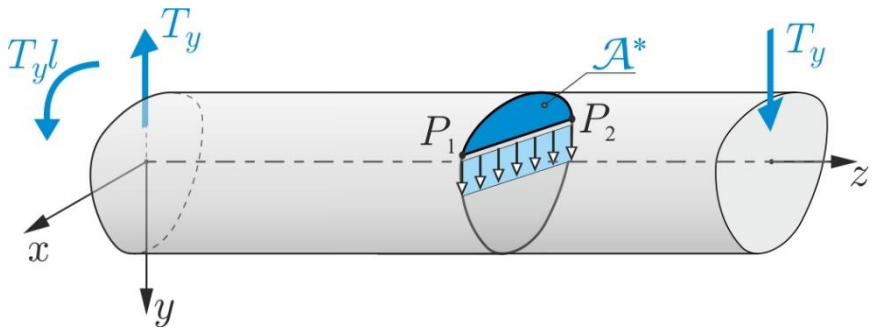
x, y assi centrali principali d'inerzia

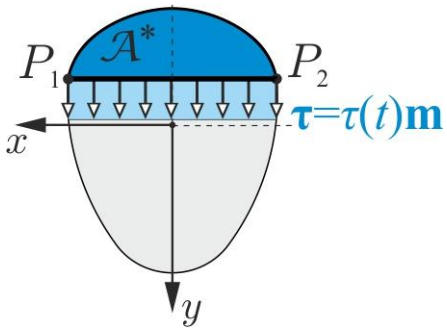


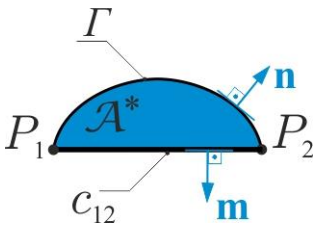


4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky







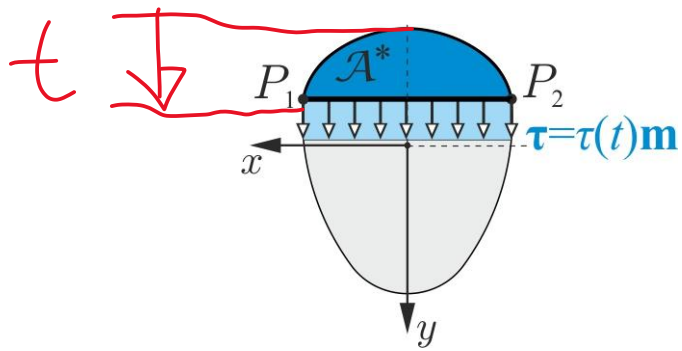
Frontiera: $\partial\mathcal{A}^* = \Gamma \cup c_{12}$

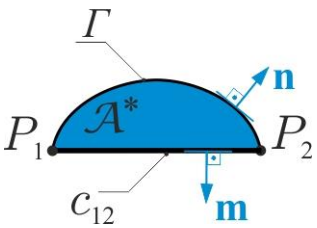
Normali uscenti : $\mathbf{n}^*$ $\quad \mathbf{n} \quad \mathbf{m}$

Dimostrazione della formula di Jourawsky

Problema Saint Venant: equazioni indefinite di equilibrio

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = -\frac{T_y}{I_x} y} \qquad \boxed{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0}, P \in \Gamma}$$



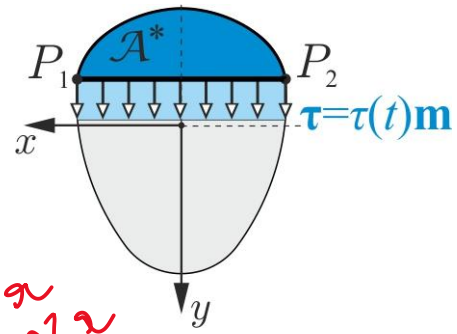


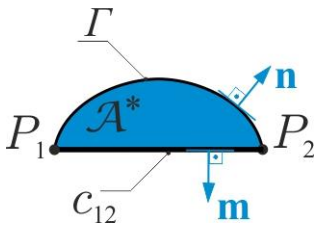
$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{\mathcal{A}*} \left(-\frac{T_y}{I_x} y\right) dA \qquad \int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x}\int_{\mathcal{A}*} y dA$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

4. Flessione e Taglio

Dimostrazione della formula di Jourawsky





$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, P \in \Gamma$$

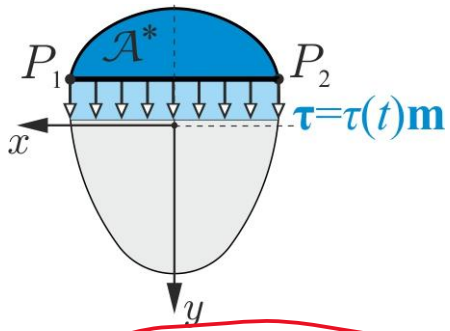
Teorema divergenza

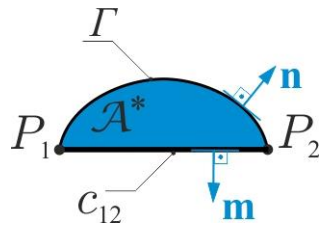
$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = \oint_{\partial\mathcal{A}*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}^* dl \qquad \int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{c_{12}} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}\, dl + \cancel{\int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}\, dl}$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = \int_{c_{12}} \tau(t) dl = \tau(t) \int_{c_{12}} dl = \tau(t) mis(c_{12}) = \tau(t)\, s(t)$$

Dimostrazione della formula di Jourawsky





$$\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, P \in \Gamma$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\int_{\mathcal{A}*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}\, dA = \tau(t)\, s(t)$$

$$\tau(t)\, s(t) = -\frac{T_y}{I_x} S_x^*(t)$$

$$\boxed{\tau(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{m} = -\frac{T_y\, S_x^*(t)}{I_x\, s(t)}}$$