Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale
Ambiente e Territorio, Sicurezza

Scienza delle Costruzioni

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/sdc

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020

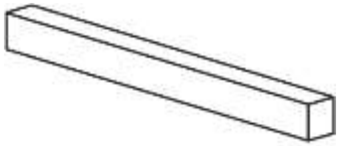
SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

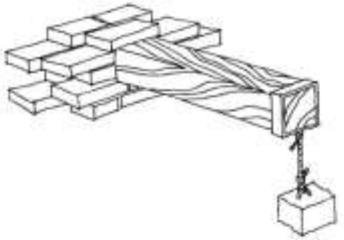
Lezione 5

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni

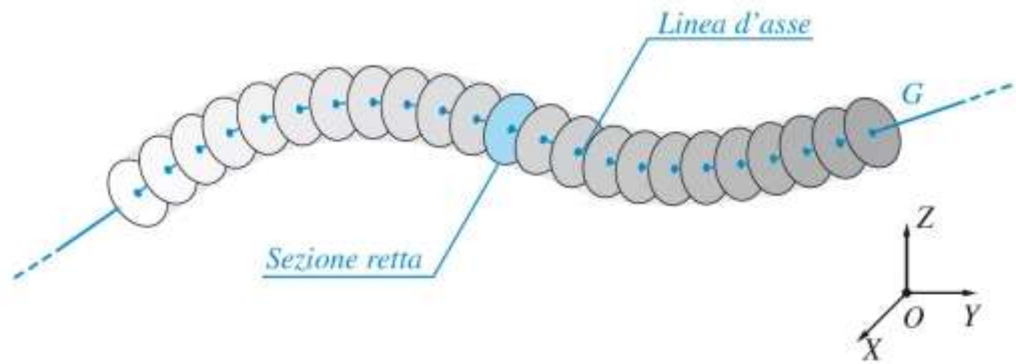
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico



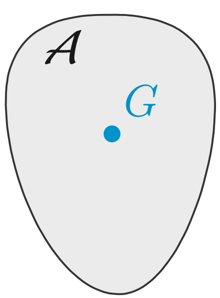



Il modello di trave elastica 1D

Geometria della trave 1D: dal punto di vista geometrico la trave è un solido tridimensionale di forma allungata generato da una figura piana (*sezione*) che trasla nello spazio mantenendosi perpendicolare alla traiettoria descritta dal proprio baricentro G (*linea d'asse*).



Elementi caratteristici

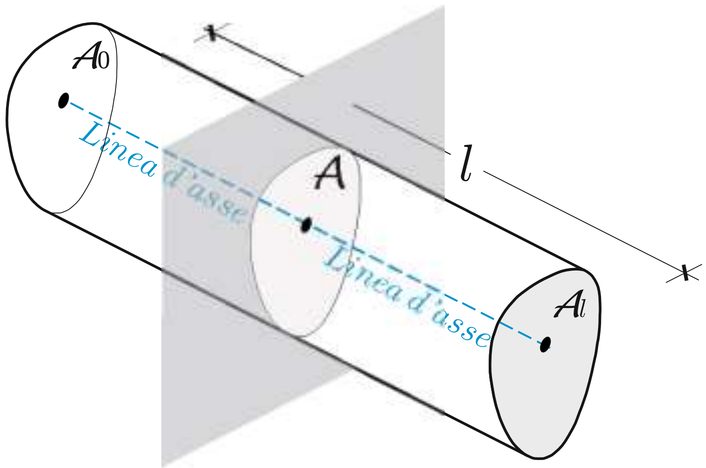


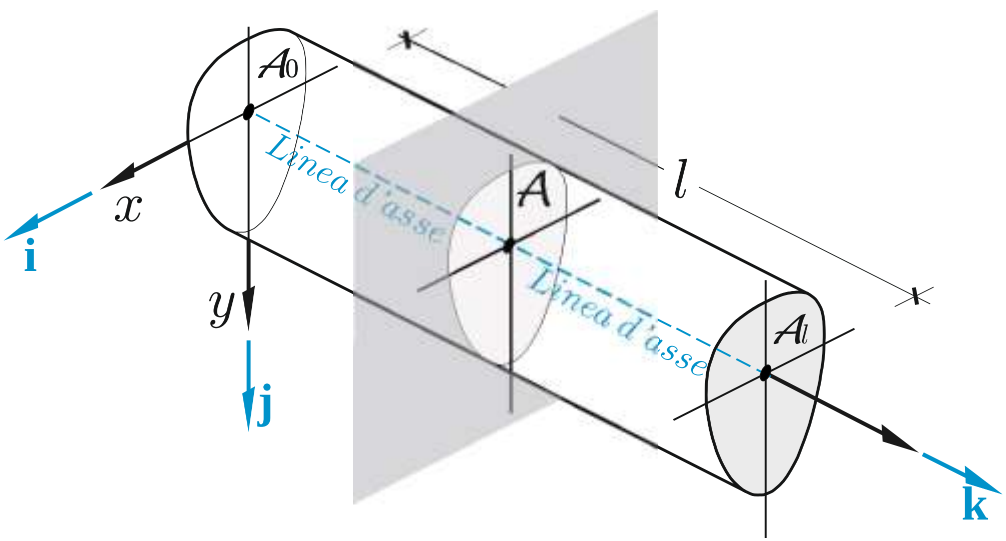
1. Sezione retta: figura piana che genera il solido, dimensione caratteristica D.

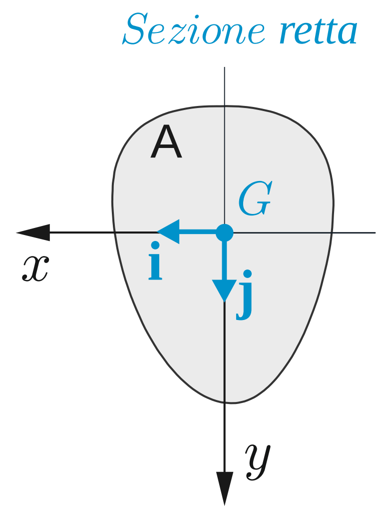
2. Linea d'asse: lunghezza l ($l \gg D$)

Trave ad asse rettilineo

Sistema di riferimento locale

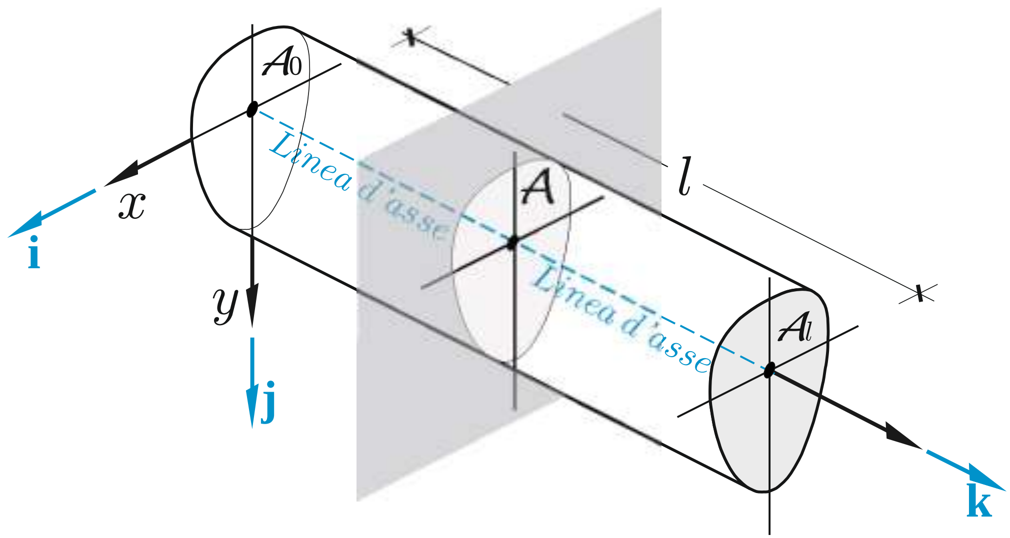


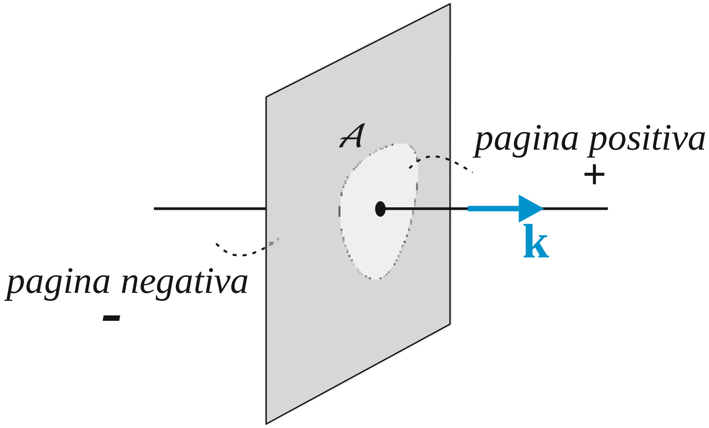


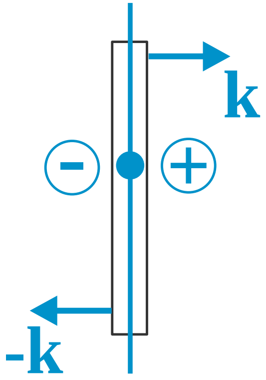


Trave ad asse rettilineo

Orientazione delle sezioni

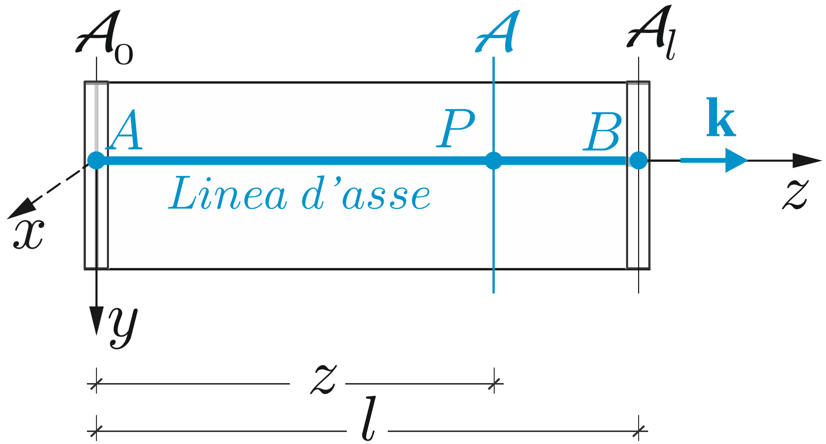






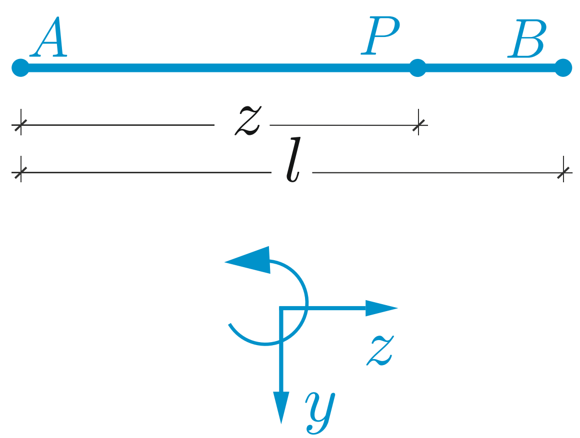
Trave ad asse rettilineo

Vista piano *zy*



$$0 \leq z \leq l$$

$$z = 0 \;\Rightarrow \mathcal{A}_0^-$$
$$z = l \;\Rightarrow \mathcal{A}_l^+$$



$$0 \leq z \leq l$$

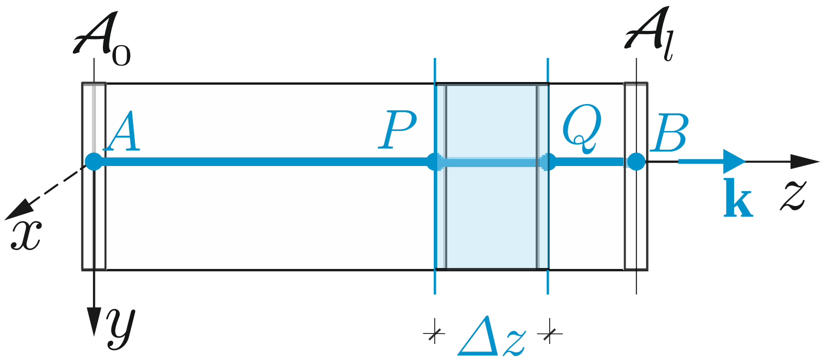
$$z = 0 \;\Rightarrow\; P \equiv A$$
$$z = l \;\Rightarrow\; P \equiv B$$

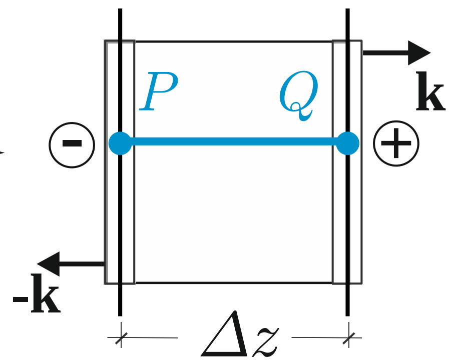
Trave ad asse rettilineo

Elemento di trave

$P \equiv z,$

$Q \equiv z + \Delta z$

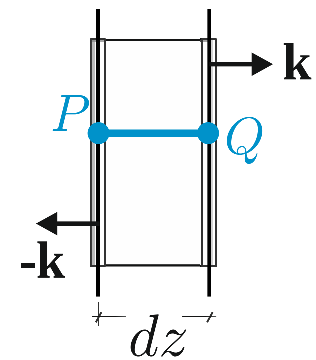




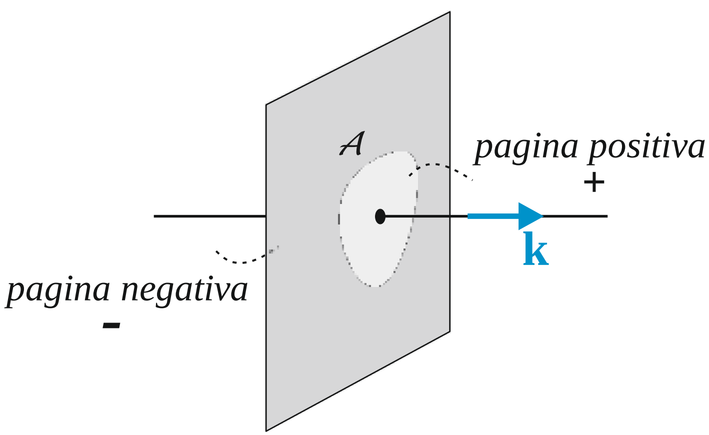
Elemento infinitesimo (concio)

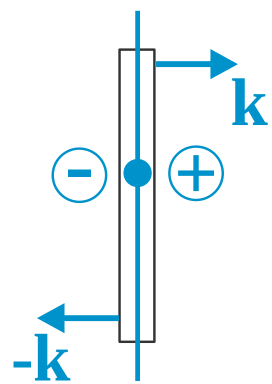
$P \equiv z,$

$Q \equiv z + \mathrm{d}z$



NB Orientazione sezione





SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione 5

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

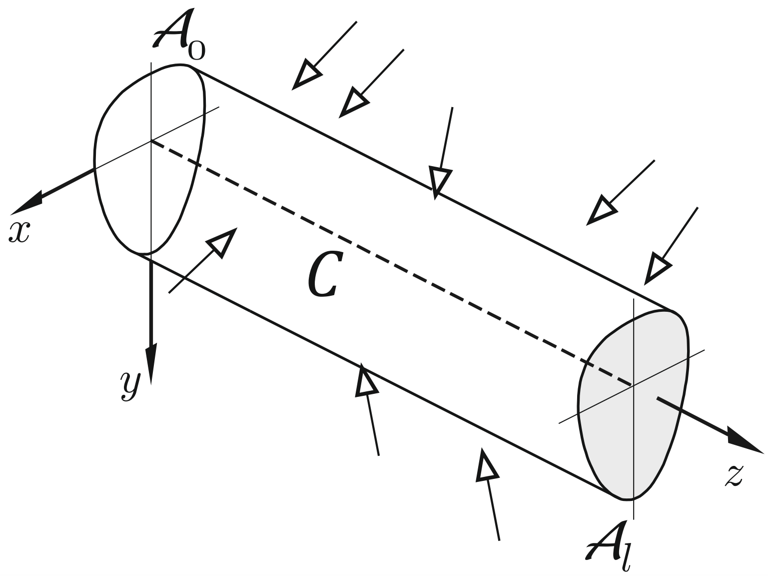
2. Statica della trave

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze interne**
  - definizioni
  - caratteristiche delle sollecitazioni (CdS)
  - convenzioni
- **Equazioni indefinite di equilibrio**
- **Problema statico**
- **Leggi e diagrammi delle CdS**
- **Esercizi** (sito: E08-E10, testo: §6.7-6.9)

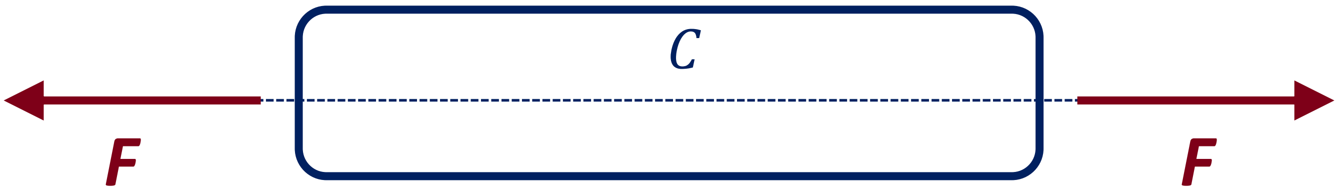
2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle forze esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.

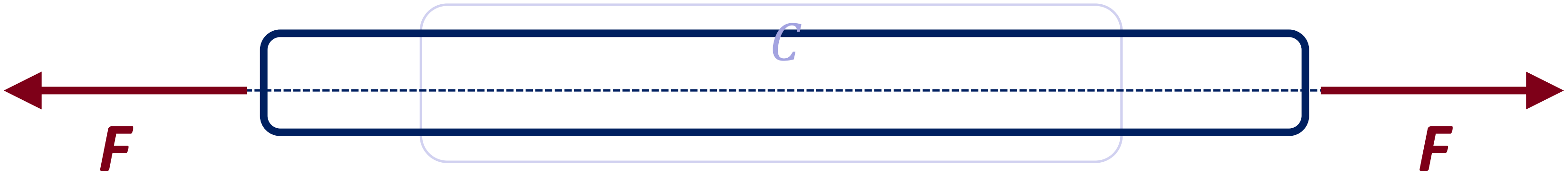


Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*


C
F
F

Osservazione

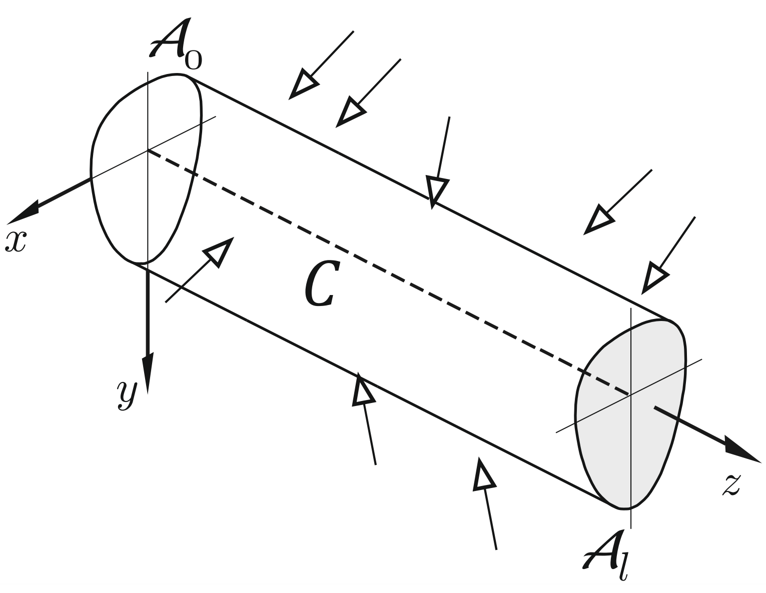
*Se il corpo è deformabile la condizione che il sistema delle forze esterne sia nullo in genere è necessaria ma **non sufficiente** per l'equilibrio del corpo*



2. Statica della trave: obiettivi

Obiettivo 1. Definire un modello atto a caratterizzare le **forze interne** che nascono in una trave in risposta alle azioni esterne (attive e reattive)

Obiettivo 2. Definire le condizioni analitiche che devono rispettare le forze interne e le forze esterne (attive e reattive) affinché la configurazione occupata dal sistema sia d'**equilibrio**.



Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (***Postulato di Eulero***)

Ipotesi
Le equazioni cardinali della statica, a livello sia globale che locale, possono essere scritte nella configurazione iniziale (indeformata) C

3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Forze interne.

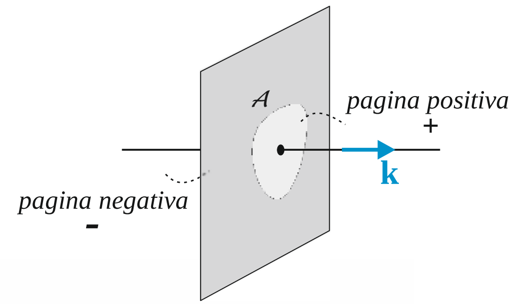
$\mathbf{R}(z) \rightarrow$ *Risultante delle forze interne* $[F]$

$\mathbf{M}(z) \rightarrow$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

Lemma di Cauchy

$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$

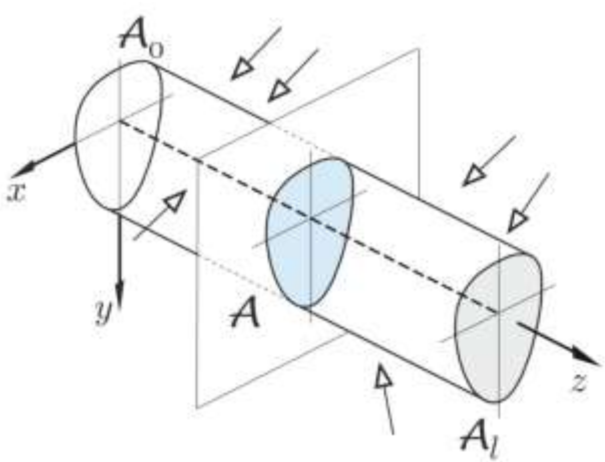
$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$

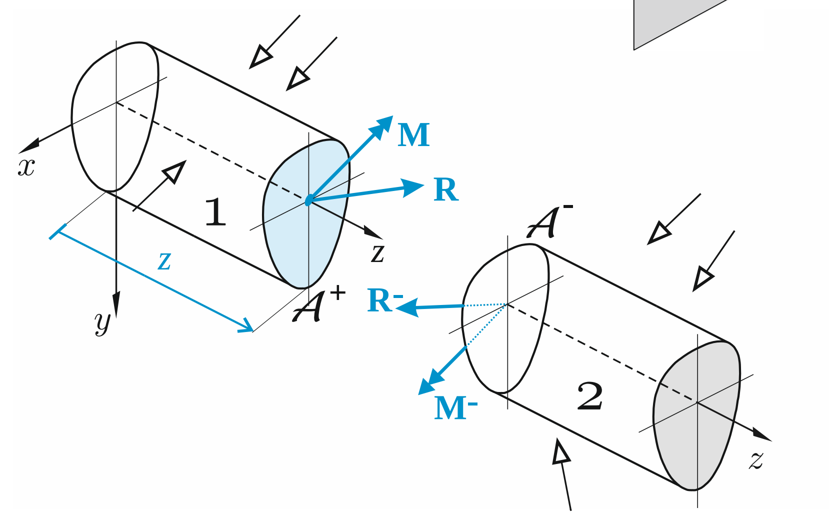


$0 \le z \le l$

$z = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_0^-,\ \mathbf{R}^-(0)$

$z = l \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_l^+,\ \mathbf{R}(l)$





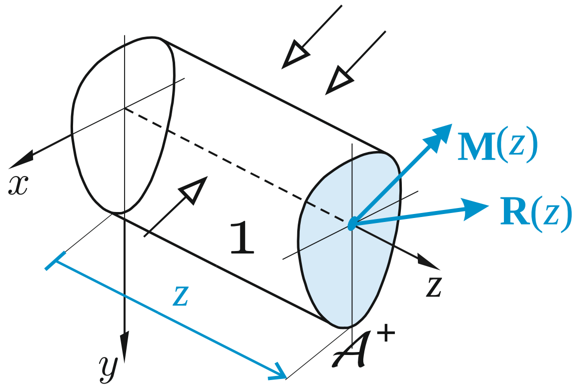
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione. Le CdS sono le componenti scalari dei vettori **R** e **M** rispetto al sistema di riferimento locale

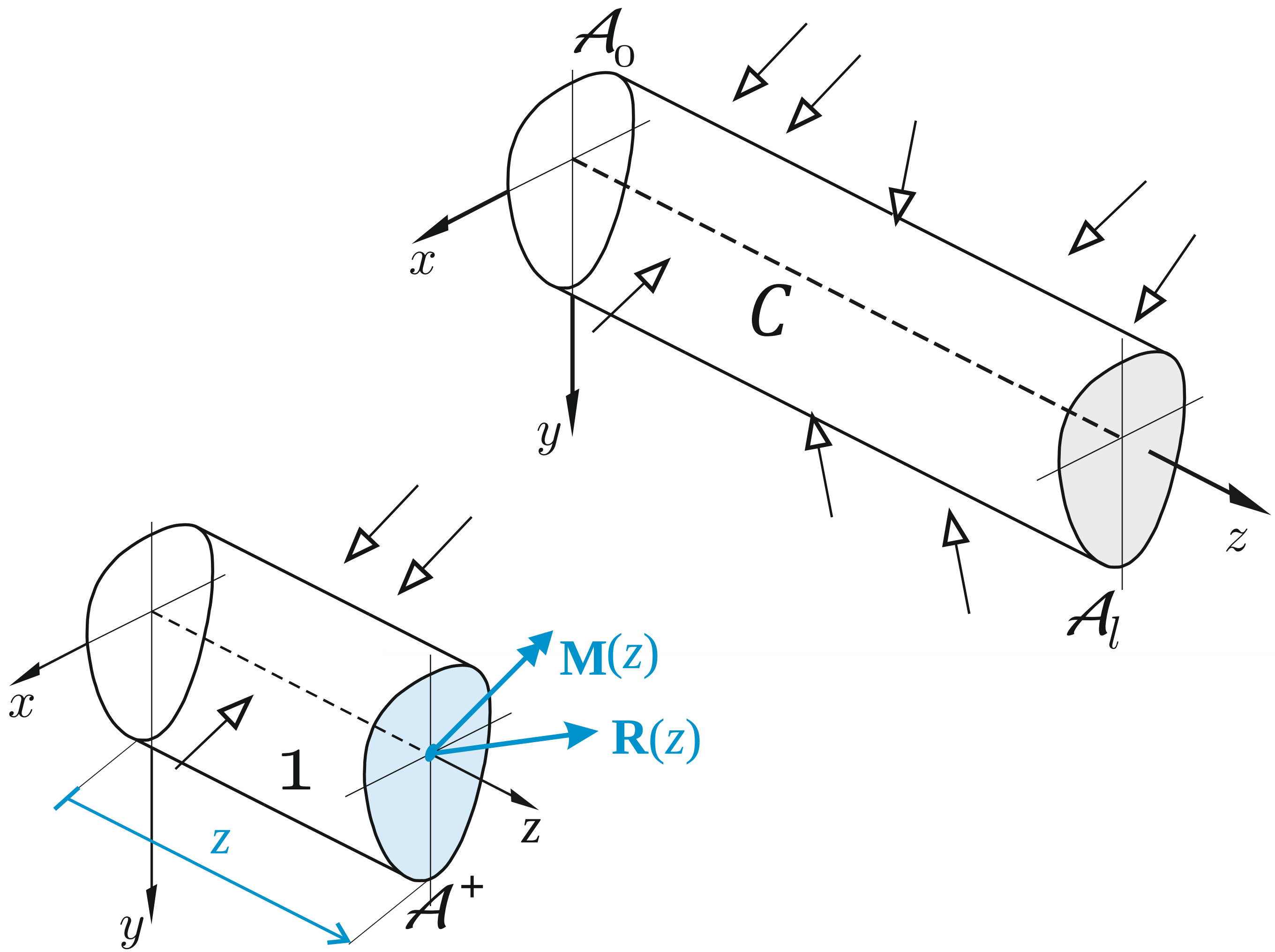
$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T_x(z)\mathbf{i} + T_y(z)\mathbf{j}$ → *Risultante delle forze interne* $[F]$
$\mathbf{M}(z) = M_t(z)\mathbf{k} + M_x(z)\mathbf{i} + M_y(z)\mathbf{j}$ → *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

$N(z)$ → ***Forza normale*** $[F]$ *(agisce perpendicolarmente alla sezione)*
$T_x(z)$ → ***Forza di taglio*** x $[F]$ *(agisce parallelamente alla sezione)*
$T_y(z)$ → ***Forza di taglio*** y $[F]$ *(agisce parallelamente alla sezione)*

$M_t(z)$ → ***Momento torcente*** $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano della sezione)*
$M_x(z)$ → ***Momento flettente*** x $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano verticale* zy*)*
$M_y(z)$ → ***Momento flettente*** y $[Fl]$ *(la coppia agisce sul piano orizzontale* zx*)*

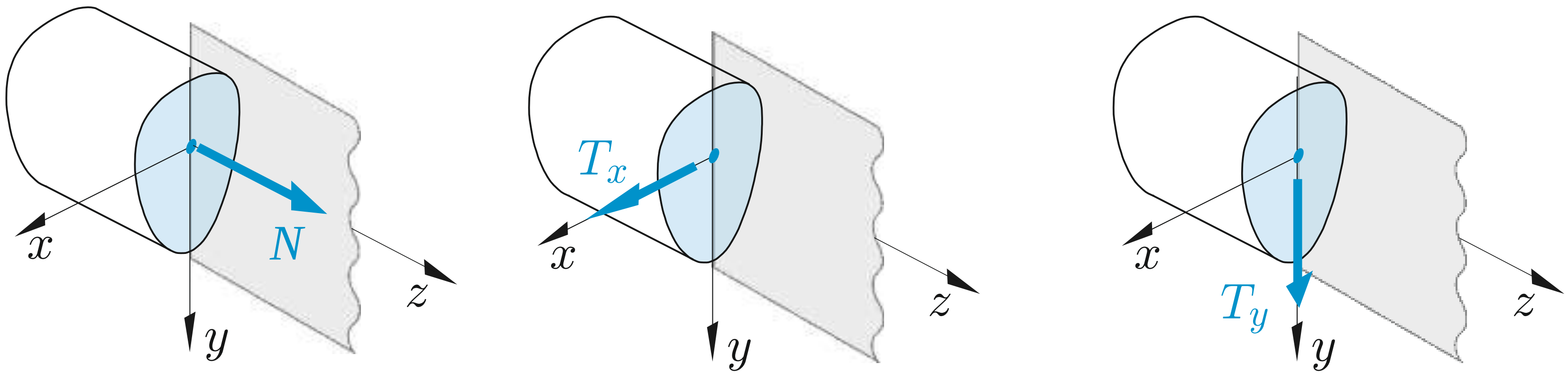


2. Statica della trave

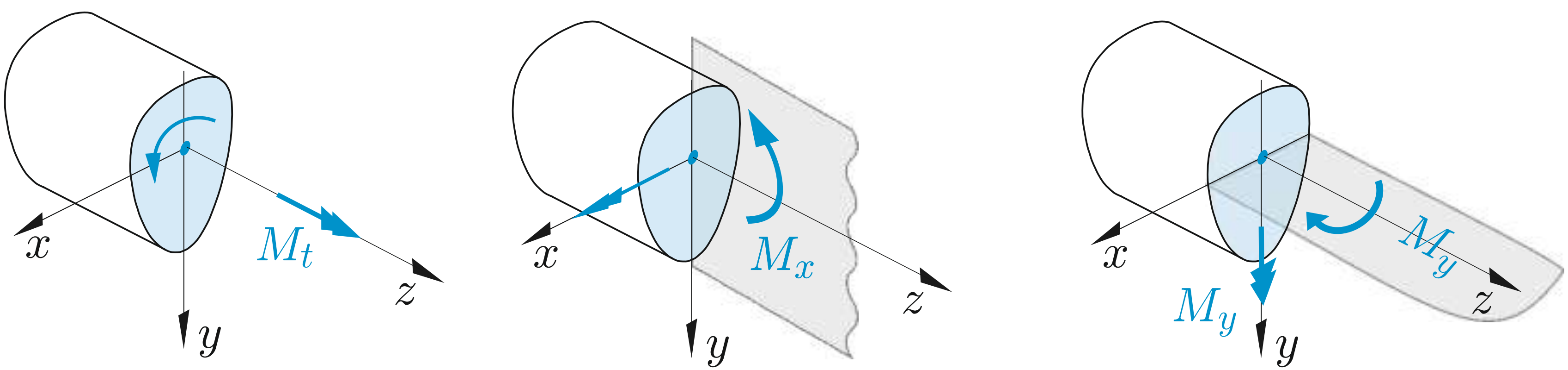


3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $\mathbf{R}(z)$ $[F]$



Caratteristiche della sollecitazione: componenti di $\mathbf{M}(z)$ $[FL]$



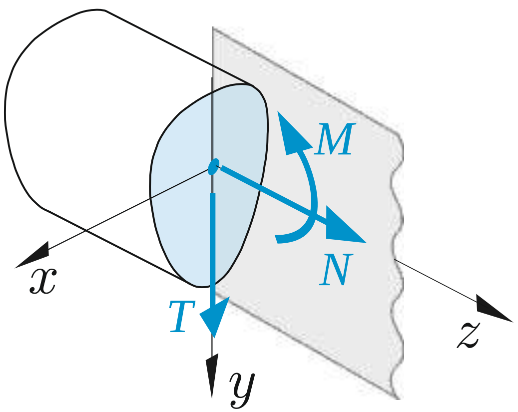
3. Statica della trave: le forze interne in sezione

Caratteristiche della sollecitazione: caso piano (zy)

$T_x(z) = 0, M_y(z) = 0, M_t(z) = 0 \qquad T_y(z) = T(z), \quad M_x(z) = M(z)$

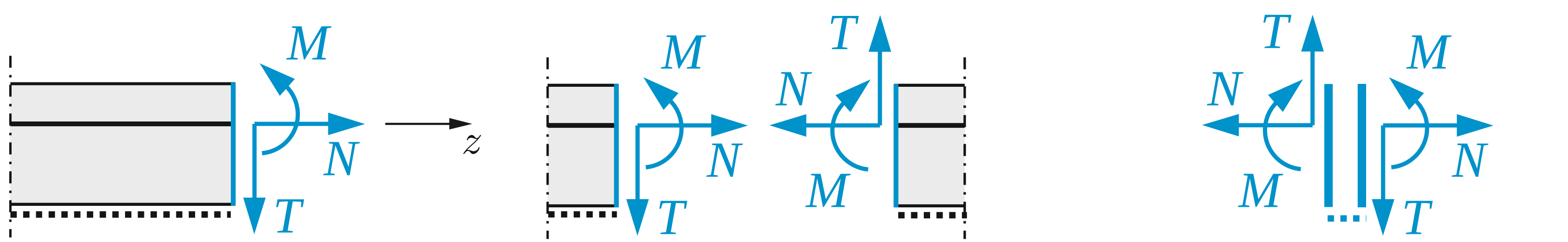
$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j} \quad \rightarrow$ *Risultante delle forze interne* $[F]$
$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i} \rightarrow$ *Momento risultante delle forze interne* $[FL]$

$N(z), \quad T(z), \quad M(z) \quad \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*



Faccia di normale positiva

Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni



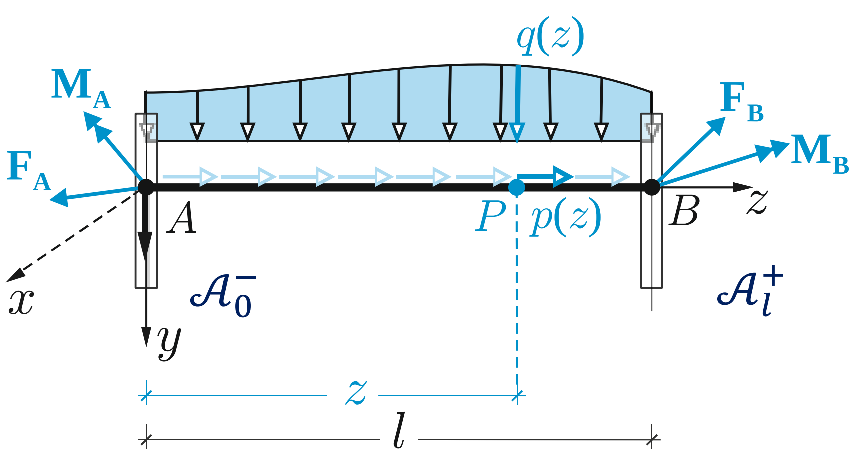
Faccia di normale positiva azioni interne positive

Azioni interne sulle due facce

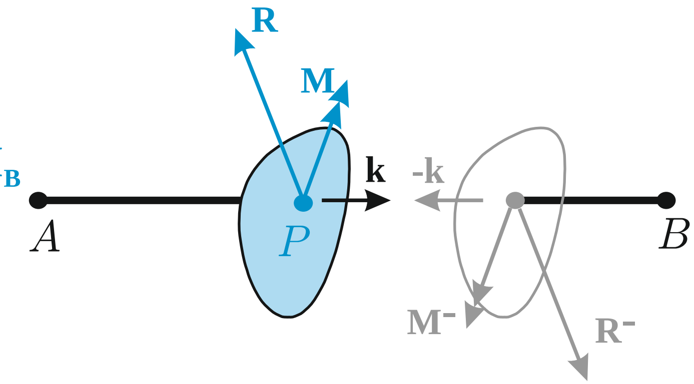
Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni

3. Statica della trave: equazioni indefinite di equilibrio

Equazioni indefinite di equilibrio



Forze esterne



Forze interne

$$\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j}\ [F/L]$$

$p(z) \rightarrow$ *Carico distribuito assiale* $[F/L]$
$q(z) \rightarrow$ *Carico distribuito trasversale* $[F/L]$

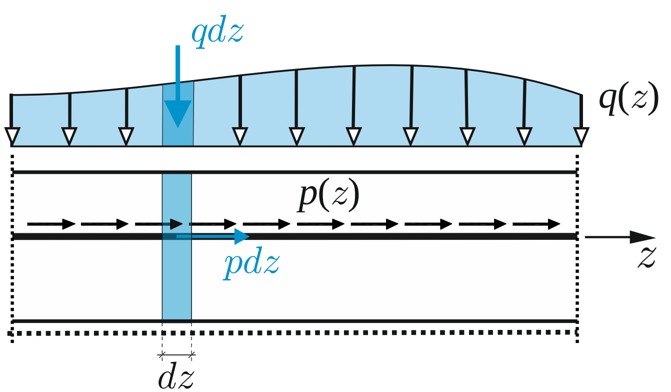
$\mathbf{F}_A, \mathbf{M}_A \rightarrow$ forze e coppie concentrate *esterne* agenti su $\mathcal{A}_0^-$

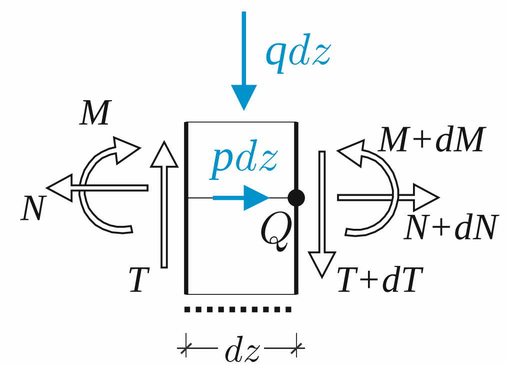
$\mathbf{F}_B, \mathbf{M}_B \rightarrow$ forze e coppie concentrate *esterne* agenti su $\mathcal{A}_l^+$

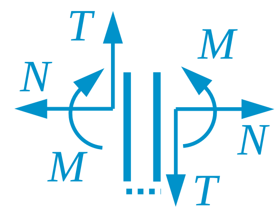
$$\mathbf{R}^-(0) = \mathbf{F}_A \qquad \mathbf{M}^-(0) = \mathbf{M}_A$$
$$\mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B \qquad \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

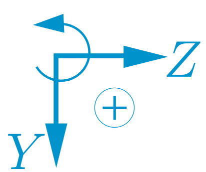
Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulato di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*



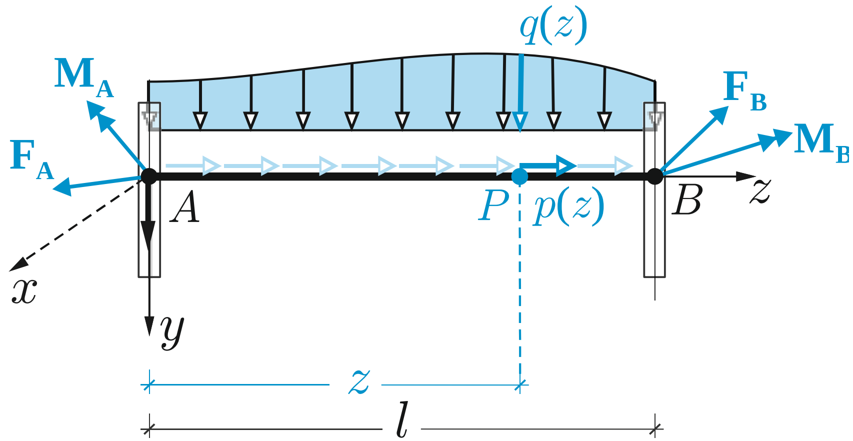






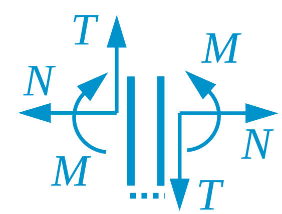
$$\begin{cases} \sum Z = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_Q = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} -N + (N + dN) + pdz &= 0 \\ -T + (T + dT) + qdz &= 0 \\ -M + (M + dM) - Tdz + qdz\frac{dz}{2} &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dN}{dz} + p(z) = 0 \\ \dfrac{dN}{dz} + q(z) = 0 \\ \dfrac{dM}{dz} - T = 0 \end{cases}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma scalare



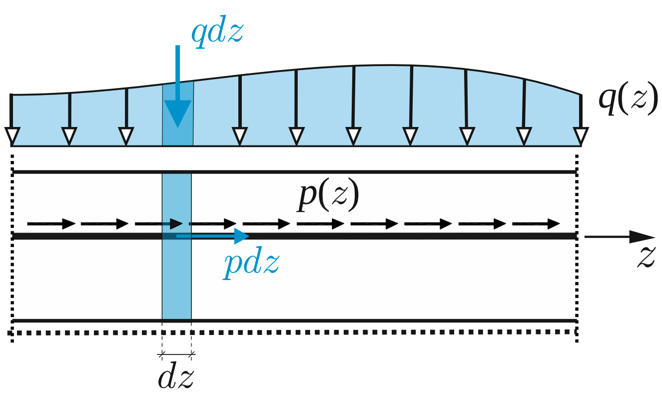
$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \quad + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

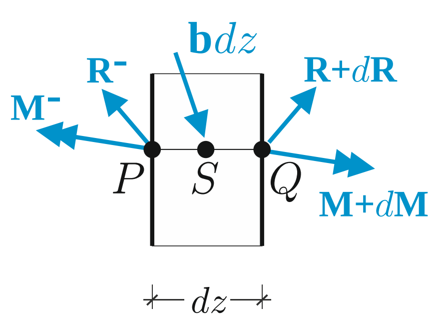
$N(z), \;\; T(z), \;\; M(z) \;\; \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*



Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo deformabile sia in equilibrio è che lo sia ogni sua parte, finita o infinitesima, comunque scelta (*Postulati di Eulero*). Ne segue in particolare che *le forze agenti su ogni elemento infinitesimo devono verificare le equazioni cardinali della statica*





$$\mathbf{PQ} = dz\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{PS} = \frac{dz}{2}\,\mathbf{k}$$

Equazioni cardinali forma vettoriale

$$\mathbf{R}^- + (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

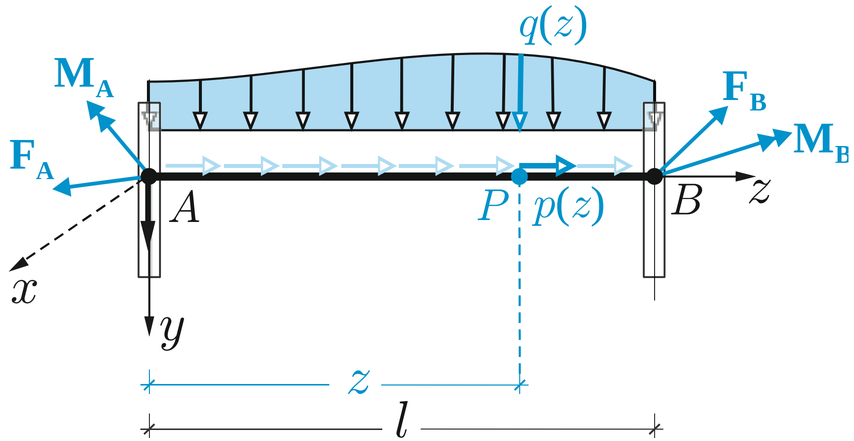
$$\mathbf{M}^- + \mathbf{PQ} \times (\mathbf{R} + d\mathbf{R}) + (\mathbf{M} + d\mathbf{M}) + \mathbf{PS} \times \mathbf{b}dz = \mathbf{0}$$

Lemma di Cauchy

$$\mathbf{R}^- = -\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}^- = -\mathbf{M}$$

Equazioni indefinite di equilibrio: forma vettoriale

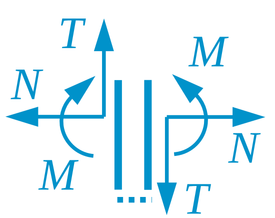


$$\begin{cases} \mathbf{R}'(z) + \mathbf{b}(z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}'(z) + \mathbf{k} \times \mathbf{R}(z) = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}^-(0) = \mathbf{F}_A \qquad \mathbf{R}(l) = \mathbf{F}_B$$
$$\mathbf{M}^-(0) = \mathbf{M}_A \qquad \mathbf{M}(l) = \mathbf{M}_B$$

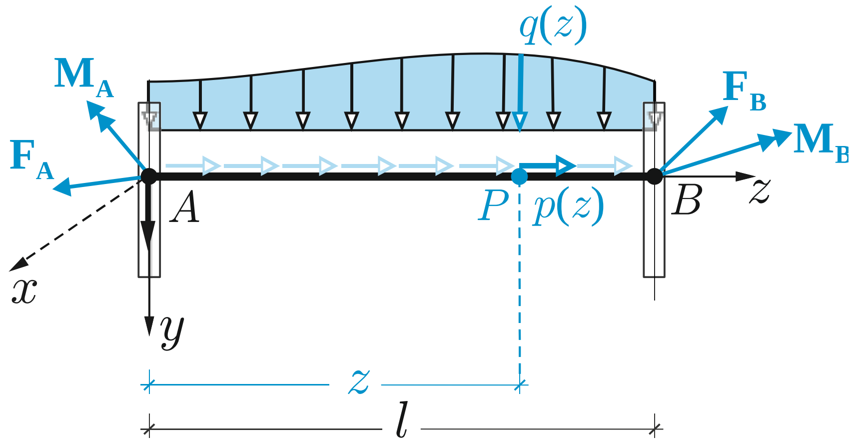
$N(z),\ \ T(z),\ \ M(z) \ \rightarrow$ *Caratteristiche della sollecitazione*

$$\mathbf{R}(z) = N(z)\mathbf{k} + T(z)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{M}(z) = M(z)\mathbf{i}$$



3. Statica della trave: problema statico

Posizione del problema



Assegnate su una trave vincolata le forze esterne (distribuite e/o concentrate), determinare le forze interne (caratteristiche della sollecitazione) con esse equilibrate.

Formulazione analitica

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + p(z) = 0 \quad + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

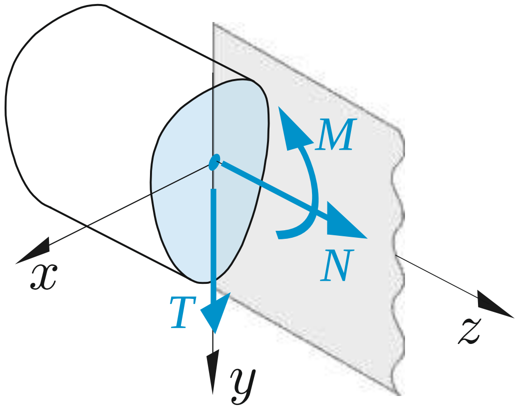
Relazioni analitiche fra forze esterne e interne in una trave in equilibrio (obiettivo 2)

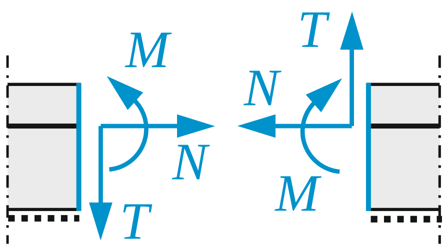
Esistenza della soluzione

$$N(z), \ T(z), \ M(z) \ \rightarrow \ \textit{Incognite}$$

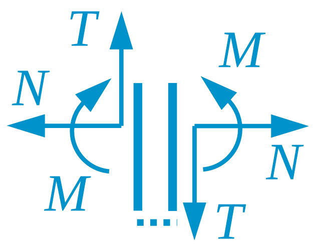
3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z: $N(z), T(z), M(z)$





Azioni interne sulle due facce

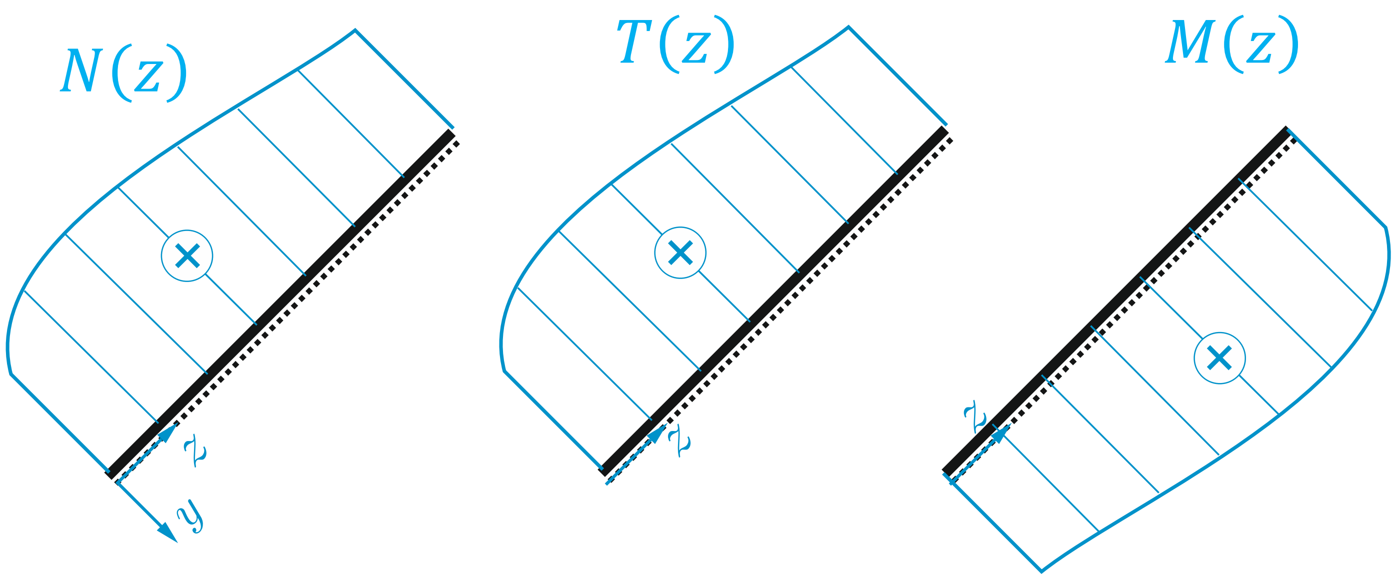


Caratteristiche della sollecitazione: convenzioni

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

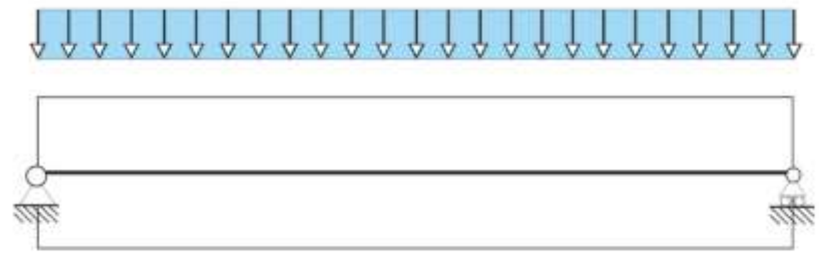
Leggi delle CdS: funzioni scalari che esprimono l'andamento delle CdS in funzione della ascissa locale z: $N(z), T(z), M(z)$

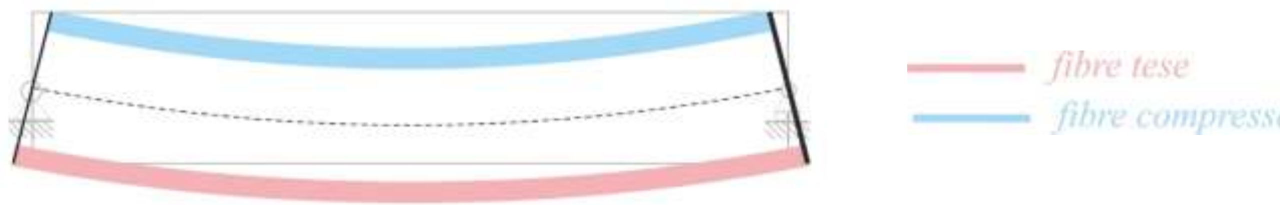
Diagrammi delle CdS: grafici delle funzioni definite al punto precedente, rappresentate nel sistema di riferimento della trave secondo prefissate convenzioni.

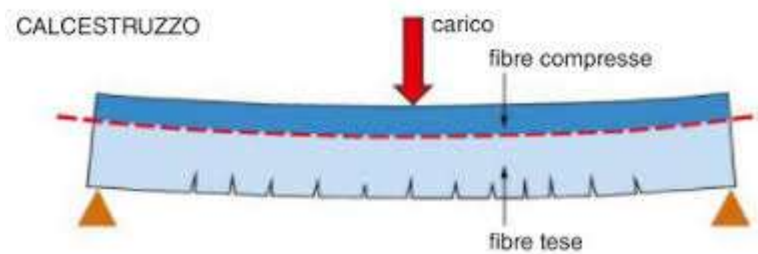


3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

FIBRE TESE

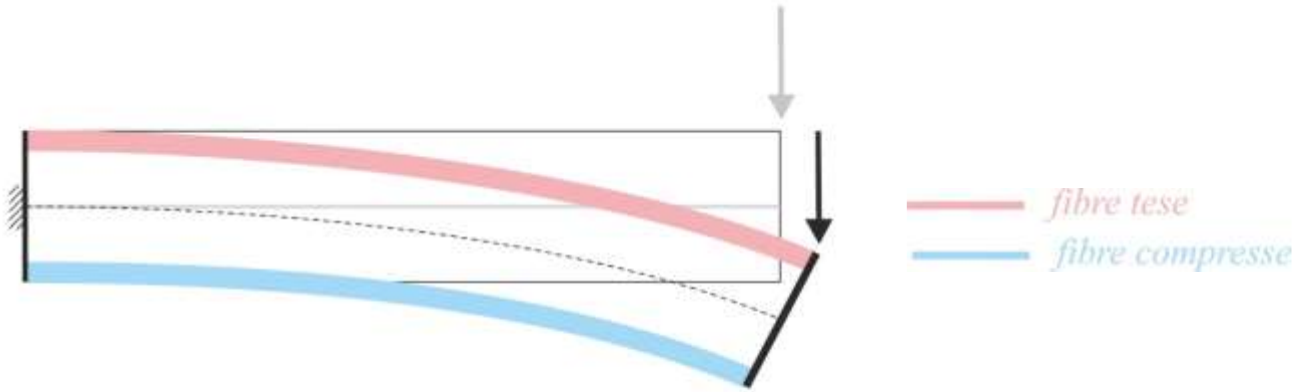






3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

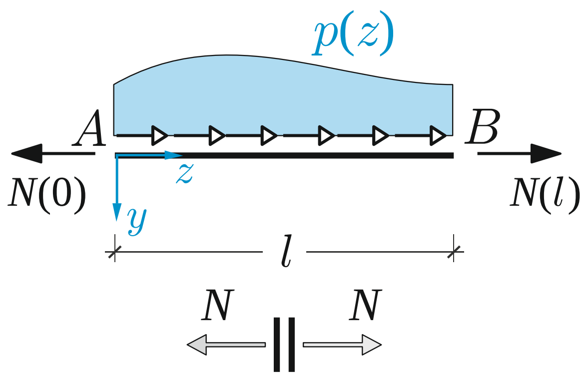
FIBRE TESE



3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito assiale ovunque nullo $p(z) = 0$	carico distribuito assiale legge uniforme $p(z) = \bar{p}$	carico distribuito assiale legge lineare $p(z) = p_1 z + p_2$
$N(z)$ legge uniforme	$N(z)$ legge lineare	$N(z)$ legge quadratica



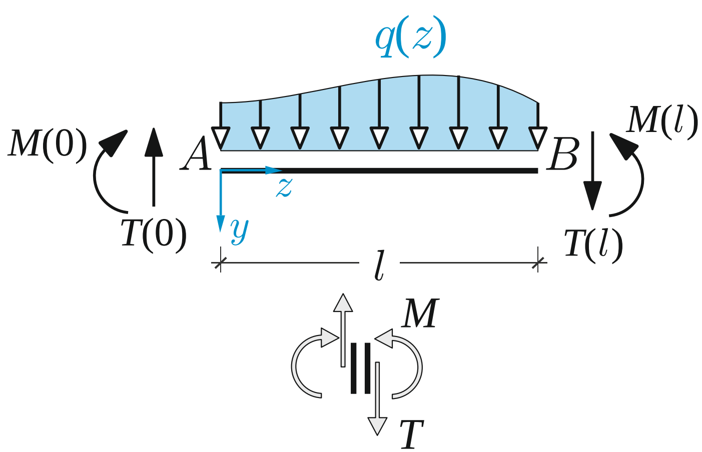
$$N'(z) = -p(z)$$

3. Statica della trave: Leggi e diagrammi delle CdS

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico

carico distribuito trasversale ovunque nullo $q(z) = 0$	carico distribuito trasversale legge uniforme $q(z) = \overline{p}$	carico distribuito trasversale legge lineare $q(z) = q_1 z + q_2$
$\boldsymbol{T(z)}$ legge uniforme	$\boldsymbol{T(z)}$ legge lineare	$\boldsymbol{T(z)}$ legge quadratica

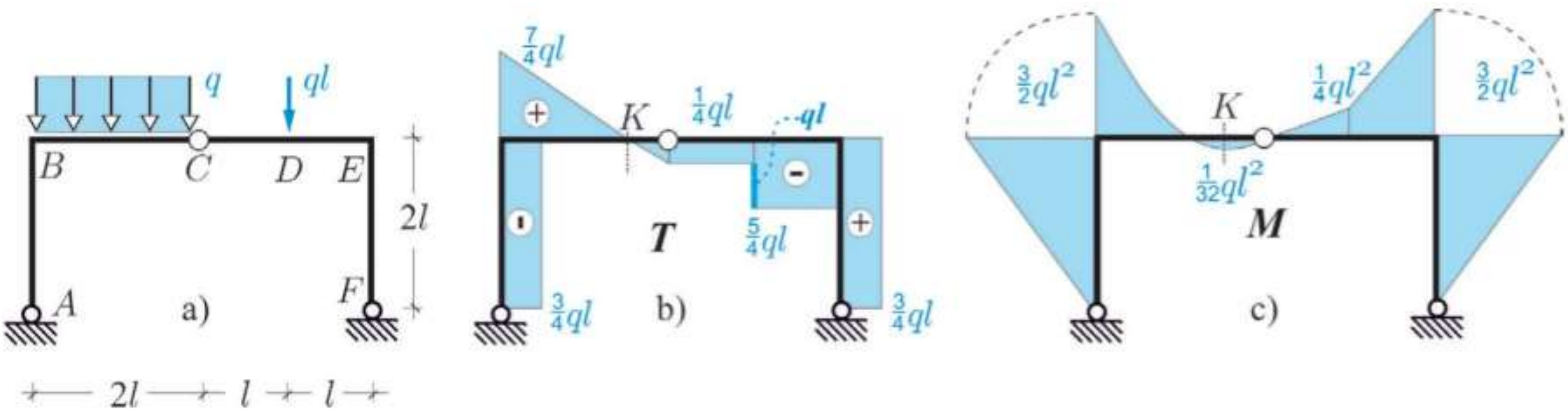
Taglio ovunque nullo	Taglio uniforme	Taglio lineare	Taglio quadratico
$\boldsymbol{M(z)}$ legge uniforme	$\boldsymbol{M(z)}$ legge lineare	$\boldsymbol{M(z)}$ legge quadratica	$\boldsymbol{M(z)}$ legge cubica



$$T'(z) = -q(z)$$

$$M'(z) = T(z)$$

Andamento qualitativo delle CdS per alcune distribuzioni di carico



3. Statica della trave: esercizi (lavagna)

Esercizi Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l'isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera; c) determinare le leggi di variazione delle CdS disegnando i relativi diagrammi.