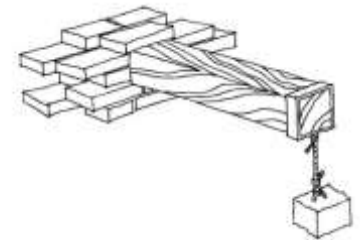
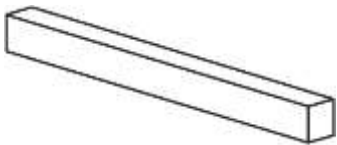


Lezione 7

Parte II - Il modello di trave elastica 1D

- Obiettivi. Definizioni. Notazioni
- Cinematica della trave
- Statica della trave
- Materiale: legame costitutivo
- Problema elastico





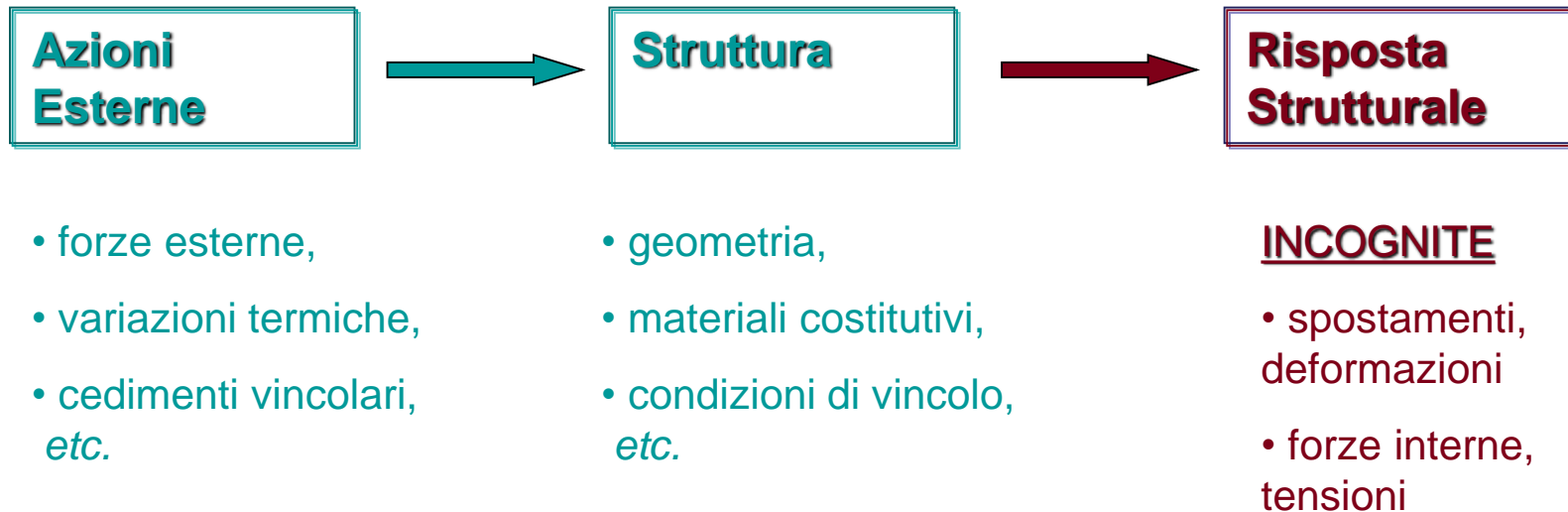
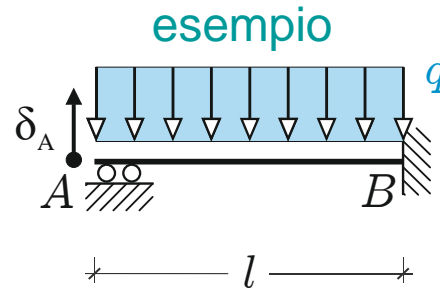
Parte II - Il modello di trave elastica 1D

4. Il problema elastico

- **Obiettivi**
- **Posizione del problema**
 - Ipotesi del modello
 - Dati del problema
 - Incognite
- **Formulazione analitica**
- **Esistenza della soluzione**
- **Confronto con il modello di corpo rigido e limiti del modello di trave 1D**

4. Problema elastico: obiettivi

Obiettivi: Assegnata una trave o un sistema di travi vincolato soggetto ad azioni esterne note determinare, se esiste, la *risposta strutturale* in termini di spostamenti, deformazioni e forze interne.



4. Problema elastico: posizione del problema

Ipotesi del modello.

Ipotesi 1 (cinematica): ‘piccoli spostamenti’. **1a:** $\forall z \in [0, l], \quad |\mathbf{u}(z)| \ll l$

1b: $\forall z \in [0, l], \quad |\boldsymbol{\theta}(z)| \ll 1 \text{ rad}$

Ipotesi 2 (statica): le equazioni cardinali della statica, sia a livello globale che locale, si possono scrivere con riferimento alla configurazione iniziale (*indeformata*) della trave.

Ipotesi 3 (materiale): si suppone che il materiale costitutivo abbia comportamento ideale *elastico lineare*. Nel seguito, per semplicità, il materiale sarà considerato anche *omogeneo* (moduli elastici costanti in ogni punto della trave)

4. Problema elastico: posizione del problema

Dati del problema.

Azioni esterne.

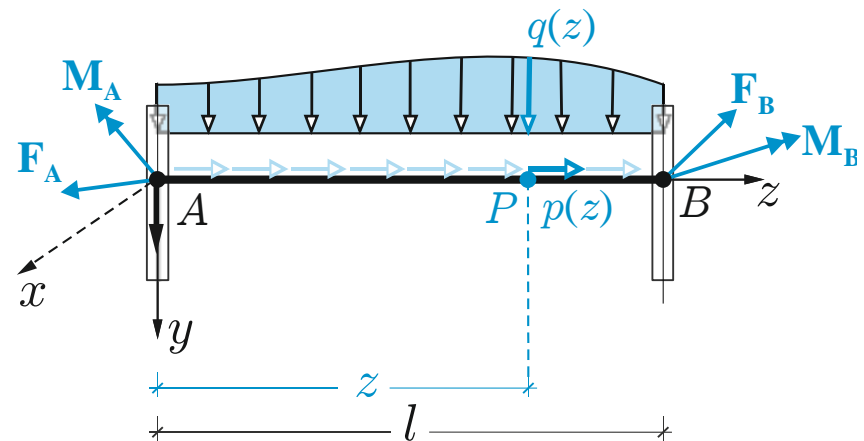
- Forze esterne attive distribuite $\mathbf{b}(z) = p(z)\mathbf{k} + q(z)\mathbf{j}$
- Forze e coppie esterne concentrate alle estremità
- Spostamenti imposti, cedimenti vincolari
- Variazioni di temperatura
- Ecc.

Schema statico

- Geometria della linea d'asse e della sezione (baricentro, area, momenti d'inerzia)
- Disposizione/tipologia dei vincoli

Materiale

- Moduli elastici E, G



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

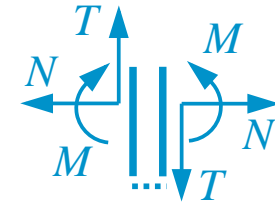
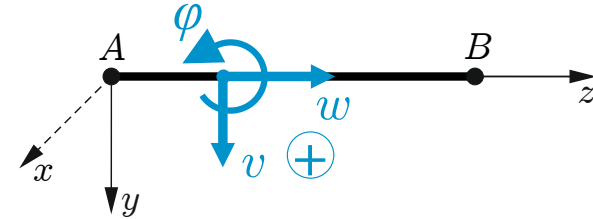
Cinematica

$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione

Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

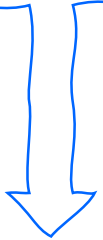
Cinematica

$w(z)$ $v(z)$ $\varphi(z)$ → Spostamenti e rotazioni

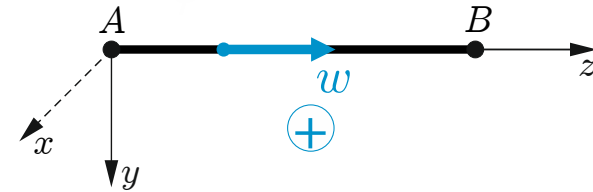
$\varepsilon(z)$ $\gamma(z)$ $\chi(z)$ → Misure di deformazione

Statica

$N(z)$ $T(z)$ $M(z)$ → CdS



Problema assiale



4. Problema elastico: posizione del problema

Incognite del problema

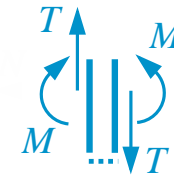
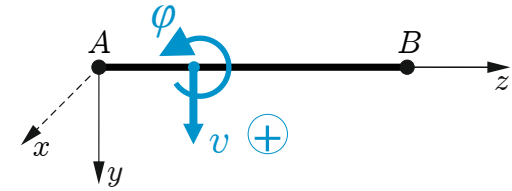
Cinematica

$w(z)$	$v(z)$	$\varphi(z)$	→ Spostamenti e rotazioni
$\varepsilon(z)$	$\gamma(z)$	$\chi(z)$	→ Misure di deformazione

Statica

$N(z)$	$T(z)$	$M(z)$	→ CdS
--------	--------	--------	-------

**Problema
flessionale**



4. Problema elastico: formulazione analitica

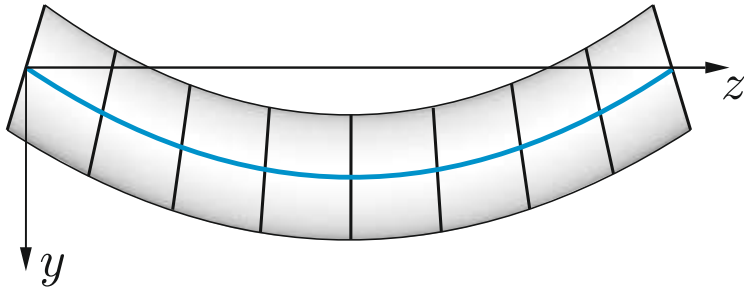
Equazioni risolventi

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



$$\gamma(z) \neq 0$$

Modello di Timoshenko

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \quad (\text{Hooke})$$

4. Problema elastico: formulazione analitica

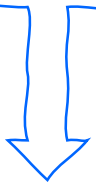
Problema assiale

Incognite cinematiche

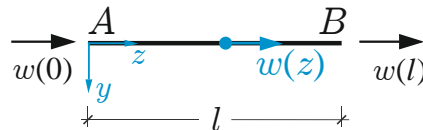
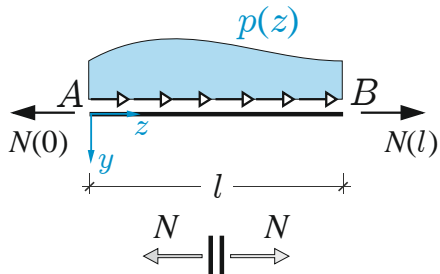
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \quad (\text{Hooke}) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases}$$

4. Problema elastico: formulazione analitica

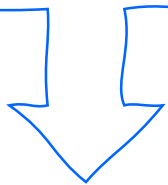
Problema flessionale

Incognite cinematiche

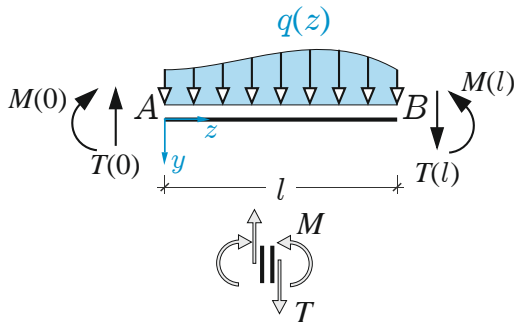
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



Problema flessionale (Timoshenko)



Cinematica: equazioni di congruenza

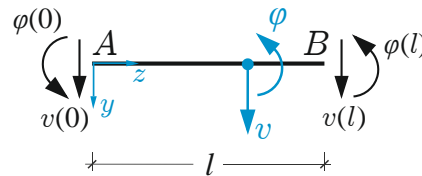
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

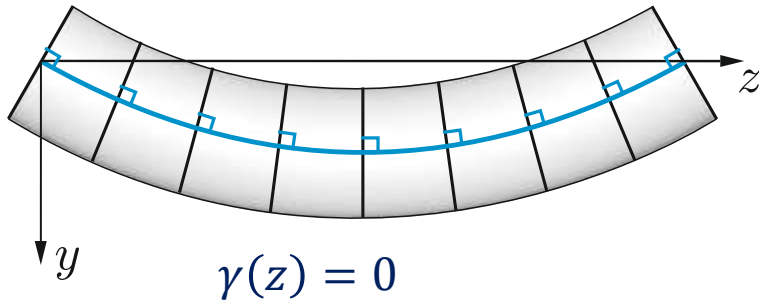
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & \gamma(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \gamma(z) = \varphi(z) + v'(z) + c.c. \\ \chi(z) = \varphi'(z) \end{cases}$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 + c.c. \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ T(z) = GA_t \gamma(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \quad (\text{Hooke})$$

4. Problema elastico: modello Eulero-Bernouilli

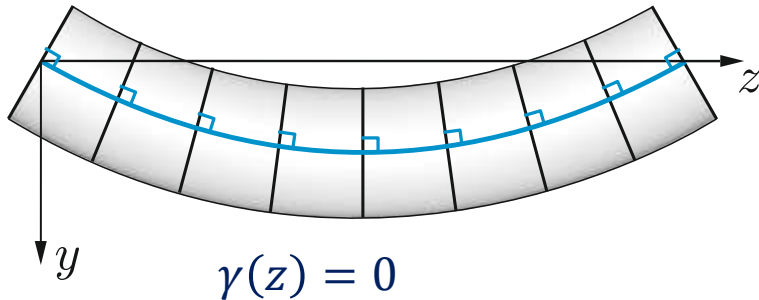
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{array}{ccc} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{array}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Modello di Eulero-Bernouilli

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

4. Problema elastico: soluzione

Esistenza e unicità per sistemi determinati e iperstatici (Kirchhoff)

Principio di sovrapposizione degli effetti

La soluzione del problema elastico relativa ad una qualsiasi combinazione di azioni esterne agenti simultaneamente si ottiene sovrapponendo le soluzioni relative alle singole azioni esterne pensate agire separatamente

Strategie di soluzione

- *Metodo degli spostamenti*
- *Metodo delle forze*

4. Problema elastico: osservazioni sul modello

Confronto con il modello di corpo rigido

Limiti del modello di trave 1D