



Parte II - Il modello di trave elastica 1D

5. Metodo degli spostamenti (linea elastica)

- **Obiettivi**
- **Equazioni della linea elastica**
 - Problema assiale
 - Problema flessionale
 - Condizioni al contorno
- **Esercizi**

5. Metodo degli spostamenti

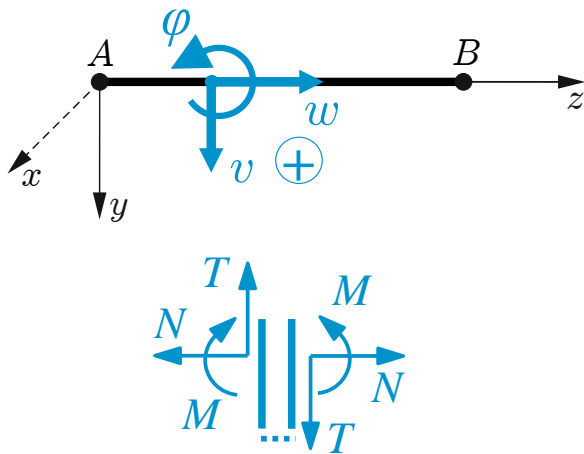
$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

Incognite cinematiche

$$\begin{matrix} w(z) & v(z) & \varphi(z) \\ \varepsilon(z) & & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

5. Metodo degli spostamenti

$$\gamma(z) = 0, GA_t \rightarrow \infty$$

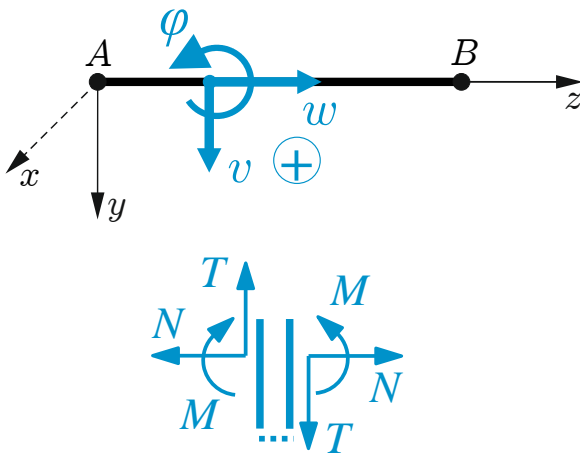
Incognite cinematiche

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

Incognite statiche

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$



Cinematica: equazioni di congruenza

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

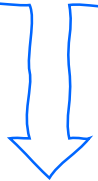
5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche

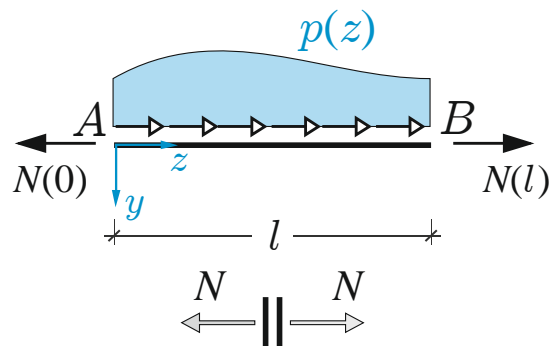
$$\begin{matrix} w(z) & v(z) \\ \varepsilon(z) & \chi(z) \end{matrix}$$

Incognite statiche

$$\begin{matrix} N(z) & T(z) & M(z) \end{matrix}$$



Problema assiale



Cinematica: equazioni di congruenza

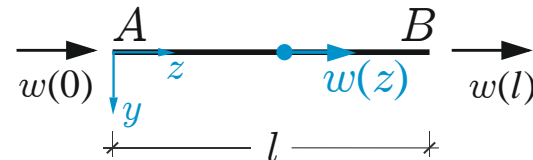
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

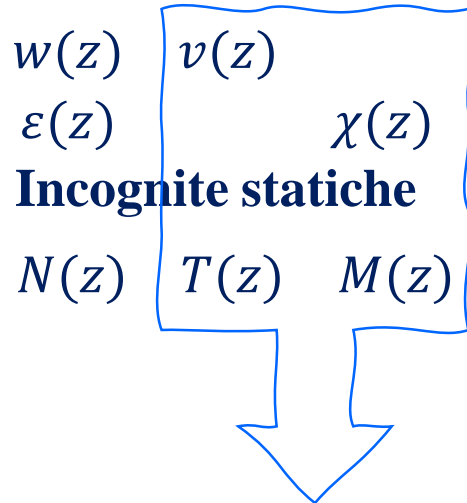
Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$

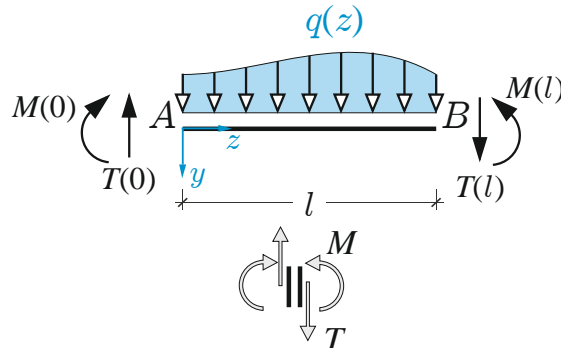


5. Metodo degli spostamenti

Incognite cinematiche



Problema flessionale (Eulero-Bernoulli)



Cinematica: equazioni di congruenza

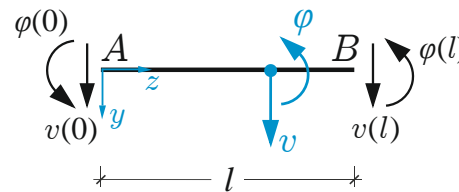
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



5. Metodo degli spostamenti

Incognite primarie:
spostamenti w e v

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

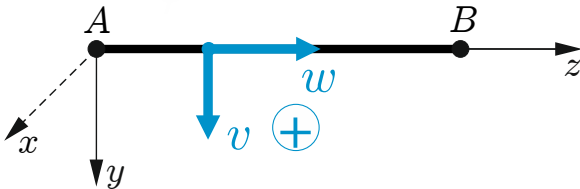
$$\begin{cases} \varepsilon(z) = w'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \end{cases} + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} N'(z) + p(z) = 0 \\ T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$\begin{cases} N(z) = EA \varepsilon(z) \\ M(z) = EI \chi(z) \end{cases} \text{ (Hooke)}$$



5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

$$N(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

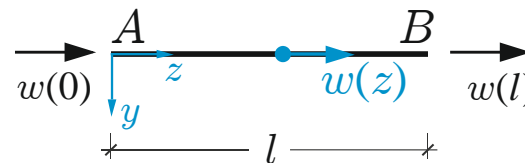
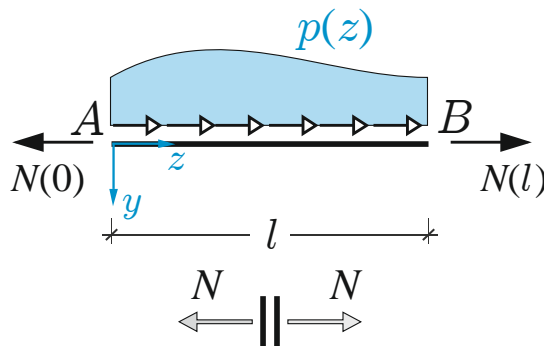
$$\varepsilon(z) = w'(z) + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$N'(z) + p(z) = 0 + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$N(z) = EA \varepsilon(z)$$



$$N(z) = EA w'(z) \quad \rightarrow \quad (EA w'(z))' + p(z) = 0 + c.c.$$

5. Metodo degli spostamenti: problema assiale

Incognite

$$w(z)$$

$$\varepsilon(z)$$

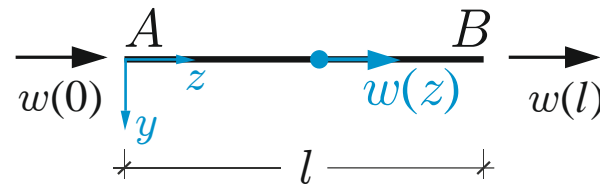
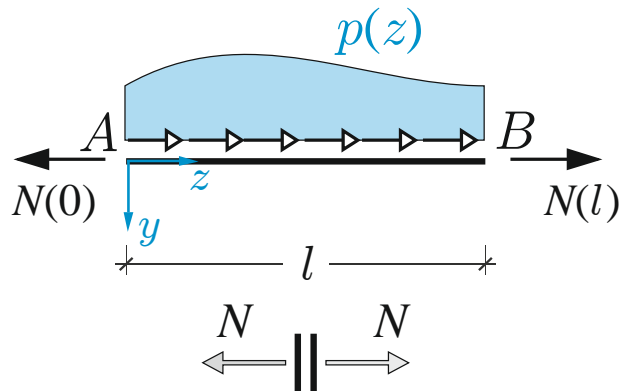
$$N(z)$$

Equazione della trave tesa

$$EAw''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

$$\varepsilon(z) = w'(z)$$

$$N(z) = EA w'(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Cinematica: equazioni di congruenza

$$\chi(z) = -v''(z) + c.c.$$

Statica: equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{cases} T'(z) + q(z) = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases} + c.c.$$

Materiale: equazioni legame costitutivo

$$M(z) = EI \chi(z)$$

$$M(z) = -EI v''(z) \quad M''(z) - T'(z) = 0$$

$$M''(z) + q(z) = 0 \rightarrow \boxed{-\left(EI v''(z)\right)'' + q(z) = 0}$$

5. Metodo degli spostamenti: problema flessionale

Incognite

$$v(z)$$

$$\chi(z)$$

$$T(z), M(z)$$

Equazione della linea elastica

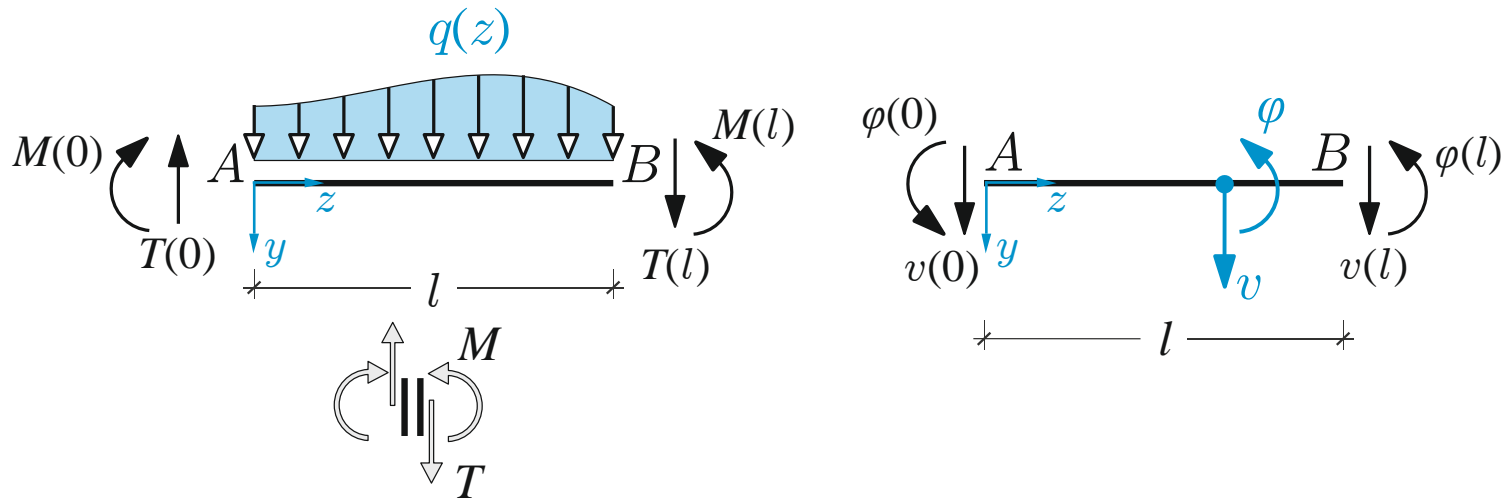
$$EI v''''(z) = q(z) + c.c$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\chi(z) = -v''(z)$$

$$T(z) = M'(z) = -EI v''''(z)$$

$$M(z) = -EI v'''(z)$$



5. Metodo degli spostamenti: riepilogo

Incognite

$$w(z) \quad v(z)$$

$$\varepsilon(z) \quad \chi(z)$$

$$N(z) \quad T(z) \quad M(z)$$

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

$$\begin{cases} N(z) = EA w'(z) \\ T(z) = -EI v'''(z) \\ N(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

Equazione della trave tesa

$$EA w''(z) + p(z) = 0 \quad + \text{c. c}$$

Equazione della linea elastica

$$EI v''''(z) = q(z) \quad + \text{c. c}$$

NB1 Si è fatta l'ipotesi di materiale omogeneo e sezione costante: EA , EI uniformi

NB2 I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati nelle equazioni, ma potrebbero essere accoppiati nelle condizioni al contorno (ad es. carrelli o glifi inclinati rispetto all'asse della trave)