

# Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/statica](http://www.pcasini.it/disg/statica)

**Testo di riferimento:**  
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



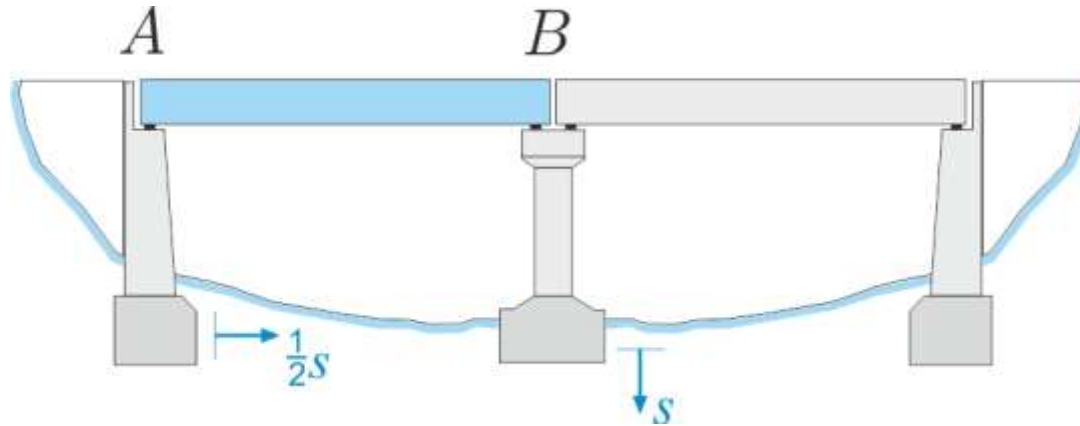
# Parte I - Il modello di corpo rigido

## 2. Statica del corpo rigido

- **Obiettivi**
- **Modello delle forze esterne**
  - forza concentrata, momento di una forza
  - sistemi di forze
  - forze distribuite
- **I vincoli: prestazioni statiche**
- **Equazioni cardinali della statica**
- **Il problema statico**
- **Classificazione statica**
- **Esercizi** (sito: E04-E06, testo: §3.6-2.8)

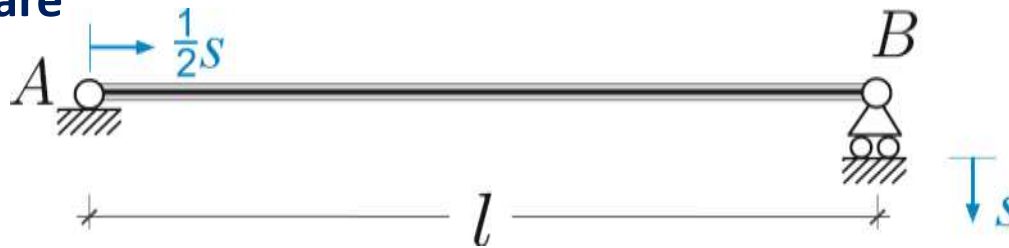
# 1. Cinematica del corpo rigido: problema cinematico

## Esempio



*Come si sposta la trave AB a seguito dei cedimenti del terreno?*

## Modello elementare



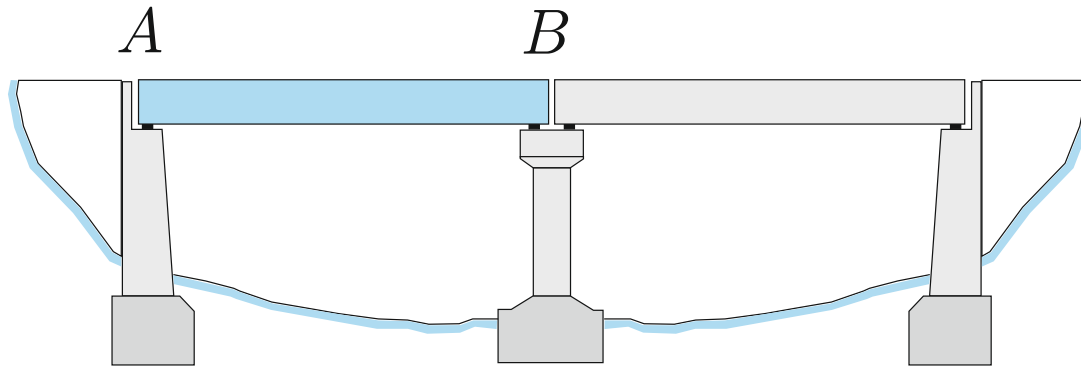
*NB. I cedimenti  $s$  non sono forze ma spostamenti noti, dim [L]*

## Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di  $n_c$  ( $n_c \geq 1$ ) corpi rigidi vincolati e sia  $C$  la configurazione occupata dal sistema. Supponiamo che uno o più vincoli subiscano un cedimento assegnato, il problema cinematico consiste nel determinare, *se esiste*, la nuova configurazione  $C'$  occupata dal sistema a seguito dei cedimenti

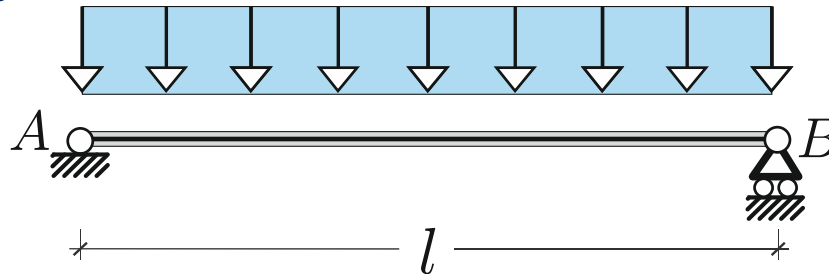
## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Esempio



*Che reazioni devono erogare i vincoli affinché la trave AB sia in equilibrio?*

### Modello elementare

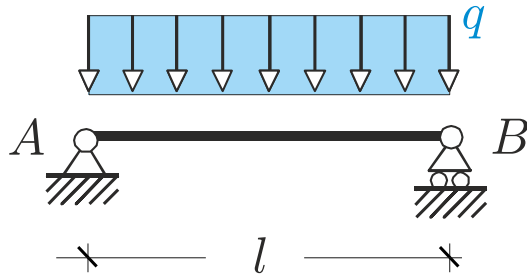


### Posizione del problema in generale

Sia dato un sistema di  $n_c$  ( $n_c \geq 1$ ) corpi rigidi vincolati soggetto ad assegnate forze esterne attive e sia  $C$  la configurazione occupata dal sistema. Il problema statico consiste nel determinare, *se esistono*, le forze esterne reattive (*reazioni vincolari*) che devono erogare i vincoli affinché il sistema sia in equilibrio.

## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Formulazione analitica



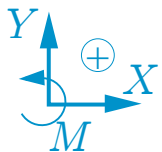
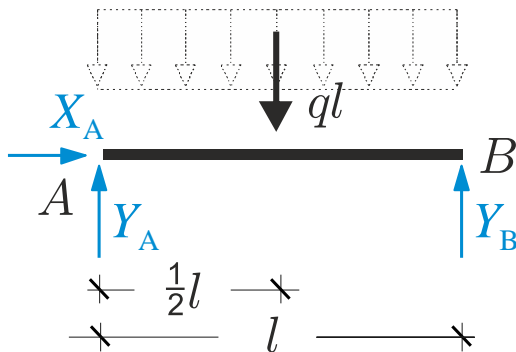
Numero di g.d.l.  
 $n = 3n_c = 3$

Vincoli semplici  
 $m = 2 + 1 = 3$

### Esempio

La trave in figura è in equilibrio sotto un carico distribuito costante  $q$  noto, diretto come in figura. Determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli. Discutere l'esistenza della soluzione e il numero di soluzioni.

Dati: luce  $l$ , carico  $q$  (Ad es.  $l = 2\text{m}$ ,  $q = 1\text{ kN/m}$ )

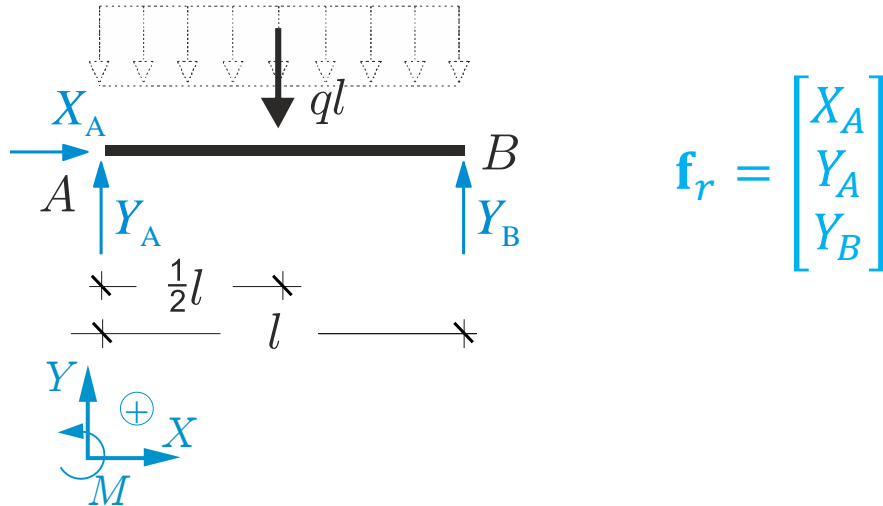


### Procedura operativa

1. Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.
2. Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito dalla sola risultante

## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Formulazione analitica



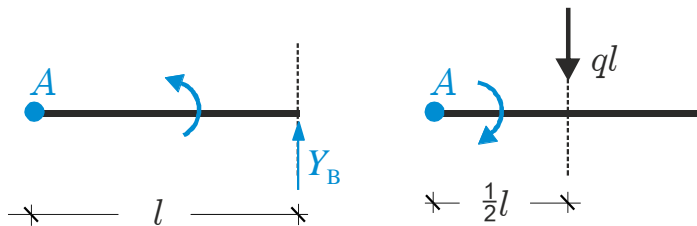
### Procedura operativa

3. Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore  $\mathbf{f}_r$
4. Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_A = 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

### Procedura operativa

5. Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte



## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - \frac{1}{2}ql^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{1}{2}ql^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**B**      **f<sub>r</sub>**      **f<sub>a</sub>**      **0**

### Procedura operativa

6. Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)

Numero di g.d.l  $n = 3n_c = 3$       Numero di equazioni  $n = 3$   
 Vincoli semplici  $m = 2 + 1 = 3$       Numero di incognite  $m = 3$

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

### Problema cinematico sulla stessa struttura

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s \\ 0 \\ -s \end{bmatrix}$$

**A**      **q**      **s**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

Numero di g.d.l  $n = 3n_c = 3$       Numero di equazioni  $m = 3$   
 Vincoli semplici  $m = 2 + 1 = 3$       Numero di incognite  $n = 3$

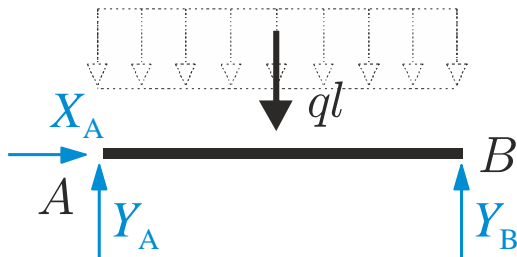
$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{s}$$

## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Soluzione

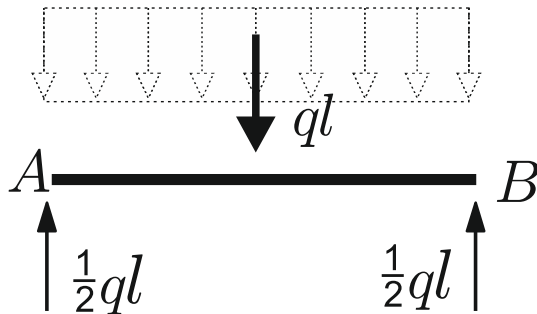
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B - ql = 0 \\ Y_B l - ql \cdot \frac{1}{2} l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{1}{2} ql \\ Y_A = \frac{1}{2} ql \end{cases}$$



### Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.



*Diagramma di struttura libera*

### Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il **diagramma di struttura libera**



## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Formulazione analitica: caso generale

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

Anche nei casi generali ci si riconduce ad un sistema algebrico costituito da  **$n$  equazioni lineari** in  **$m$  incognite**, dove  $m$  è il numero dei vincoli semplici (esterni e interni) e  $n$  il numero di gradi di libertà del sistema.

$\mathbf{f}_r$ : vettore colonna delle reazioni vincolari (**incognito**)  
( $m \times 1$ )

$\mathbf{B}$ : matrice dei coefficienti del sistema detta **Matrice Statica** (nota)  
( $n \times m$ )

$\mathbf{f}_a$ : vettore dei termini noti detto **vettore delle forze attive** (noto)  
( $n \times 1$ )

Numero di g.d.l.:  $n = 3n_c$

Numero di vincoli semplici:  $m$

Esistenza della soluzione  $\mathbf{f}_r$ ?

Numero di soluzioni?

Classificazione Statica

## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### DUALITA' STATICO-CINEMATICA

*Le due problemi cinematico e statico sono, dal punto di vista meccanico, completamente diversi. Dal punto di vista analitico sono ricondotti a sistemi di equazioni lineari con matrici dei coefficienti **A** (matrice cinematica) e **B** (matrice statica).*

*Le matrici cinematica e statica dipendono esclusivamente dalla geometria della struttura e dalla disposizione/tipologia dei vincoli.*

*Si può dimostrare in generale che se si sceglie lo stesso polo nei due problemi, le due matrici sono una la trasposta dell'altra: hanno quindi lo stesso rango e, se quadrate, lo stesso determinante.*

**A:** **Matrice Cinematica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. cinem.  
( $m \times n$ )

**B:** **Matrice Statica** matrice dei coefficienti del sistema che governa il prob. statico  
( $n \times m$ )

*Numero di g.d.l:  $n = 3n_c$*

*Numero di vincoli semplici:  $m$*

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

## 2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

### I. Sistemi determinati (isostatici)

$$n = m = p \quad \boxed{\mathbf{B}} \quad \det \mathbf{B} \neq 0$$

$$\exists! \mathbf{f}_r: \mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{f}_a$$

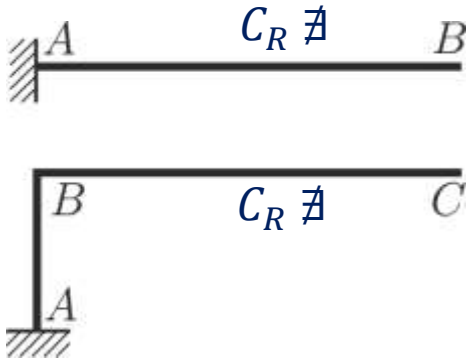
$$\mathbf{f}_a = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}_r = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La soluzione esiste ed è unica (Rouché-Capelli).

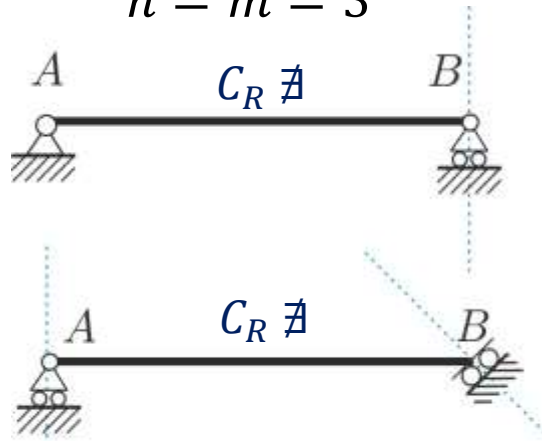
In assenza di forze esterne attive, l'unica soluzione è quella banale  $\mathbf{f}_r = \mathbf{0}$ : i vincoli non erogano reazioni vincolari.

Essendo  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$  i sistemi isostatici sono anche isocinematici

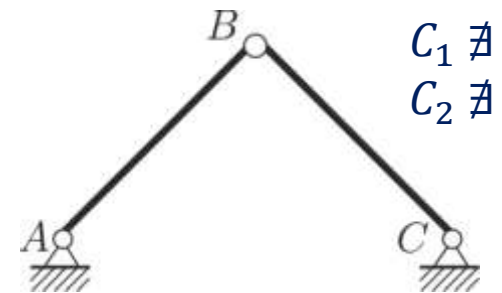
Mensola  
 $n = m = 3$



Trave appoggiata  
 $n = m = 3$



Arco a tre cerniere  
 $n = m = 6$



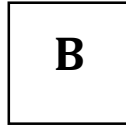
Numero di g.d.l.:  $n = 3n_C$

Numero di vincoli semplici:  $m$

Rango  $\mathbf{B}$ :  $p$

### II. Sistemi degeneri (singolari)

$$n = m > p$$



$$\det \mathbf{B} = 0$$

$$\nexists \mathbf{f}_r$$

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, **non esistono soluzioni** (Rouché-Capelli).

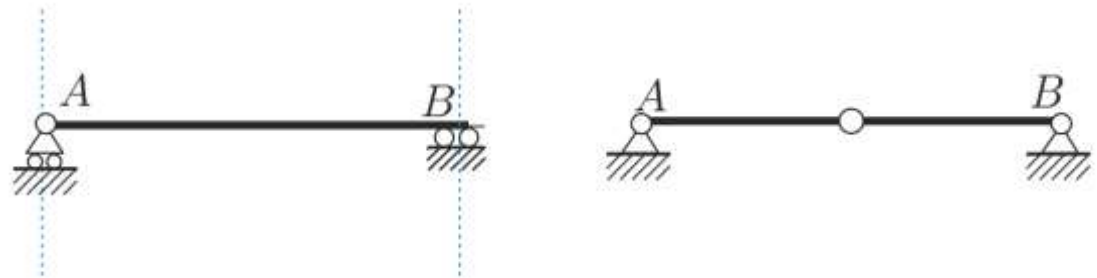
Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

Essendo  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$  i sistemi staticamente degeneri lo sono anche cinematicamente.

Trave appoggiata degenera  
 $n = m = 3$



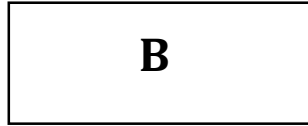
Arco a tre cerniere degenera  
 $n = m = 6$



## 2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

### III. Sistemi staticamente indeterminati (iperstatici)

$$p = n < m$$



$$\exists \infty^{n-m} \mathbf{f}_r$$

Grado di iperstaticità  $I = m - n$

Esistono  $\infty^{m-n}$  soluzioni (Rouché-Capelli).

Non è possibile determinare in modo univoco le reazioni erogate dai vincoli in condizioni di equilibrio.

Essendo  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$  i sistemi iperstatici sono anche cinematicamente impossibili

Trave incastro appoggio  
 $n = 3 \quad m = 4$



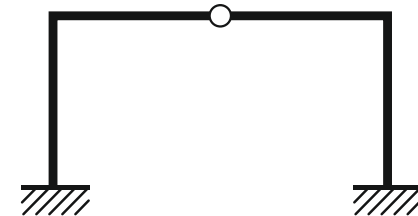
1 volta iperstatico

Trave doppiamente incastrata  
 $n = 3 \quad m = 6$



3 volte iperstatico

Portale incastrato  
 $n = 6 \quad m = 8$



2 volte iperstatico

Numero di g.d.l:  $n = 3n_c$

Numero di vincoli semplici:  $m$

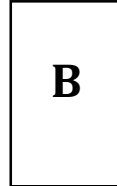
Rango  $\mathbf{B}$ :  $p$

## 2. Statica del corpo rigido: classificazione statica

### IV. Sistemi staticamente impossibili (labili)

$$p = m < n$$

$$\nexists \mathbf{f}_r$$



Salvo particolari distribuzioni di forze attive, **non esistono soluzioni** (Rouché-Capelli).

Salvo particolari distribuzioni di forze attive, in generale i vincoli non sono in grado di erogare reazioni che equilibrano le forze esterne attive.

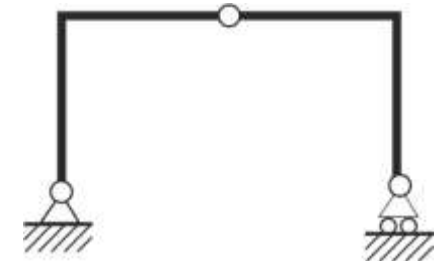
Essendo  $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$  i sistemi staticamente impossibili lo sono anche cinematicamente indeterminati (labili)

$$n = 3 \quad m = 1$$



2 volte labile

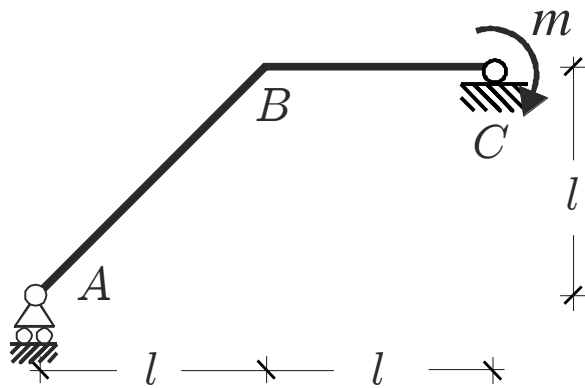
$$n = 6 \quad m = 5$$



1 volta labile

## 2. Statica del corpo rigido: esercizio

### Esercizio

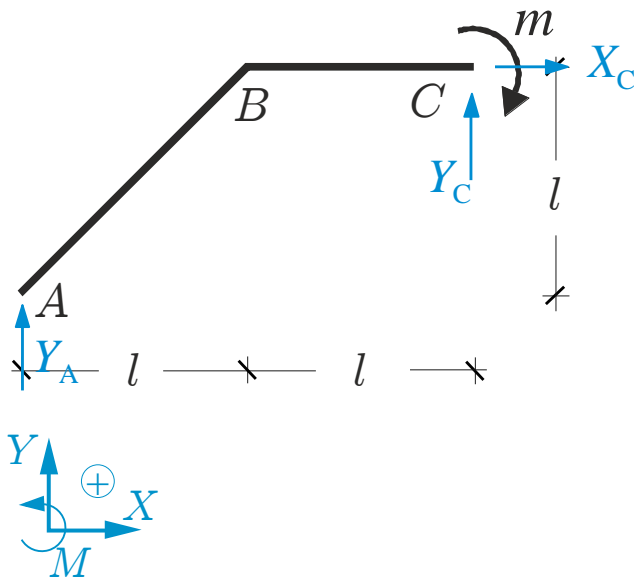


Numero di g.d.l.  
 $n = 3n_c = 3$

Vincoli semplici  
 $m = 2 + 1 = 3$

La struttura in figura è soggetta ad una coppia di forze  $m$  nota, diretta come in figura. Verificato che la struttura è isostatica, determinare le reazioni vincolari erogate dai vincoli.

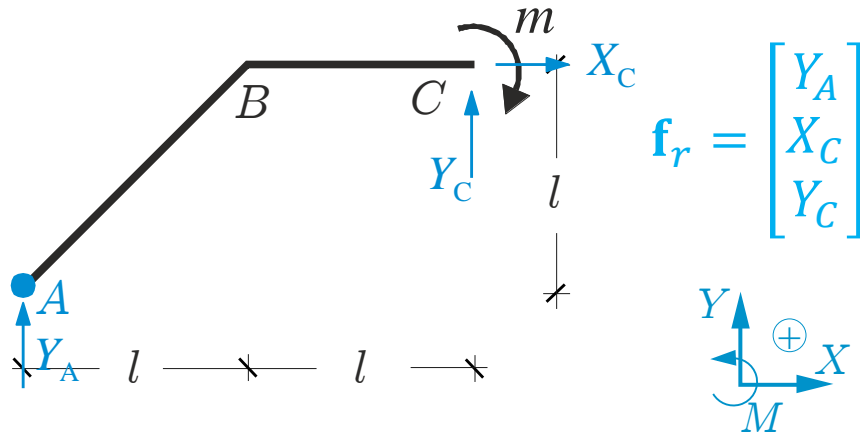
Dati: luce  $l$ , coppia  $m$  (Ad es.  $l = 2\text{m}$ ,  
 $m = 1\text{ kN} \cdot \text{m}$ )



### Procedura operativa

1. Si verifica l'isostaticità
2. Si fissa un sistema di riferimento globale e le convenzioni per forze e momenti.
3. Si sostituiscono ai vincoli le reazioni vincolari (incognite) che essi sono in grado di erogare. Se sono presenti forze attive distribuite si riducono ad al sistema equivalente costituito

### Formulazione analitica



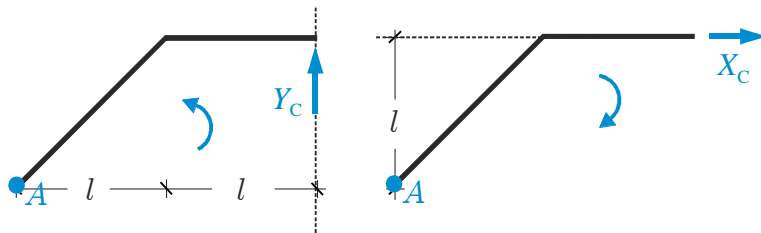
### Procedura operativa

4. Si individuano le incognite (reazioni vincolari) eventualmente raccolte in un vettore  $\mathbf{f}_r$
5. Si sceglie un polo rispetto al quale calcolare i momenti.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

### Procedura operativa

6. Si esplicitano le equazioni cardinali della statica in forma scalare rispettando le convenzioni scelte



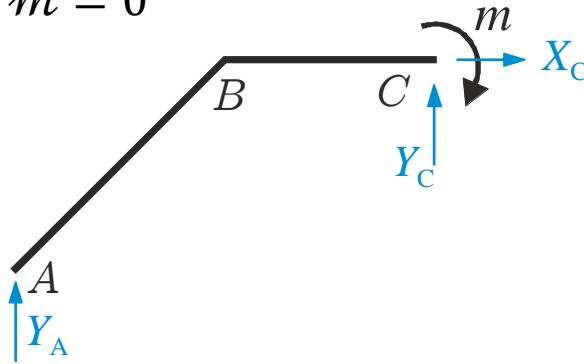


## 2. Statica del corpo rigido: problema statico

### Soluzione

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases}$$

$$X_C = 0 \quad Y_C = \frac{m}{2l} \quad Y_A = -\frac{m}{2l}$$

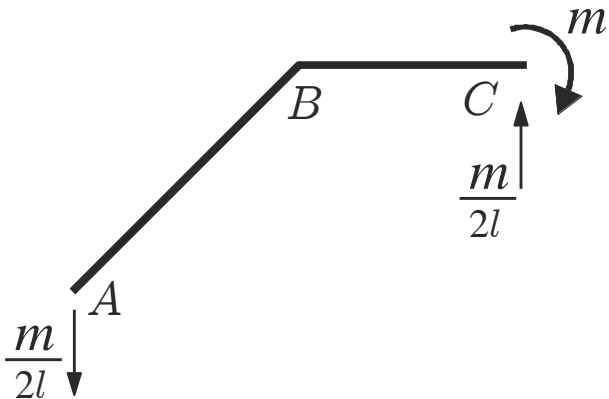


### Procedura operativa

7. Se la soluzione esiste ed è unica, si ricavano le reazioni vincolari incognite risolvendo il sistema.

### Procedura operativa

8. Si ridisegna la struttura con le reazioni vincolari note ottenute nel punto precedente ottenendo il **diagramma di struttura libera**



*Diagramma di struttura libera*

## 2. Statica del corpo rigido: esercizio

$$\begin{cases} X_C = 0 \\ Y_A + Y_C = 0 \\ Y_C \cdot 2l - X_C \cdot l - m = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} Y_A & X_C & Y_C \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -l & 2l \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y_A \\ X_C \\ Y_C \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{B} \quad \mathbf{f}_r \quad \mathbf{f}_a \quad \mathbf{0}$$

### Procedura operativa

9. Si scrive il sistema precedente in forma scalare e matriciale, e si discute l'esistenza e il numero di soluzioni (Rouché-Capelli)

$$\mathbf{B}\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}$$

Numero di g.d.l  $n = 3n_c = 3$       Numero di equazioni  $n = 3$   
 Vincoli semplici  $m = 2 + 1 = 3$       Numero di incognite  $m = 3$

**Problema cinematico sulla stessa struttura**  
 (cfr. lezioni precedenti)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -l \\ 0 & 1 & 2l \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} n = m \\ \det \mathbf{A} \neq 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$$

## 2. Statica del corpo rigido: esercizi (lavagna)

**Esercizi** Per ciascuna delle strutture seguenti: a) dimostrarne l'isostaticità; b) determinare le reazioni vincolari e disegnare il diagramma di struttura libera.

