

# Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica  
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: [p.casini@uniroma1.it](mailto:p.casini@uniroma1.it)  
pagina web: [www.pcasini.it/disg/sdc](http://www.pcasini.it/disg/sdc)

**Testo di riferimento:**

Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,  
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2020



# 1. Cinematica del corpo rigido

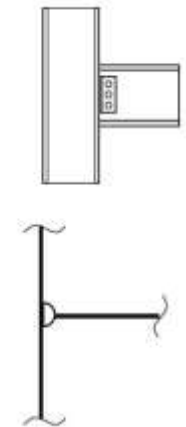
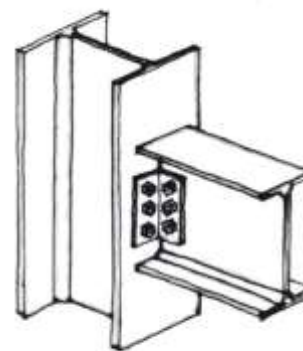
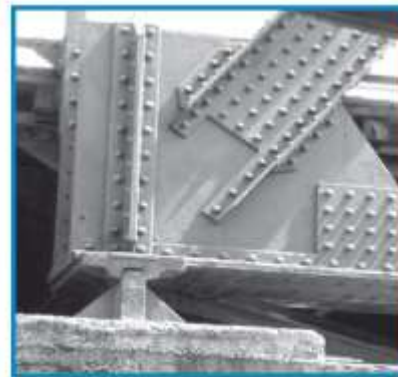
- **Obiettivi**
- **Spostamento rigido**
  - traslazione
  - rotazione
  - rototraslazione
- **Formula Generale dello Spostamento Rigido (FGSR)**
- **I vincoli: prestazioni cinematiche**
- **Il problema cinematico**
- **Classificazione cinematica**
- **Esercizi** (sito: E01-E03, testo: §2.7-2.8)

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

**Definizioni.** Gli elementi strutturali devono essere collegati fra di loro e con gli elementi fissi esterni alla struttura (*suolo*). I dispositivi di connessione che realizzano ciò sono detti *vincoli*. I vincoli che collegano gli elementi strutturali con il suolo sono detti **esterni**, i vincoli che collegano due elementi della stessa struttura sono detti **interni**.

**Modello dei vincoli.** I vincoli sono modellati assimilandoli a dispositivi ideali che presentano le seguenti caratteristiche: sono *puntiformi*, *lisci* (privi di attrito) e *bilaterali*. Si ammetterà inoltre valida l'*ipotesi dei piccoli spostamenti*.

**Prestazioni cinematiche.** Dal punto di vista cinematico i vincoli pongono delle limitazioni agli spostamenti dei punti e/o alle rotazioni dei corpi cui sono applicati, riducendo il numero di gradi di libertà del sistema.



# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

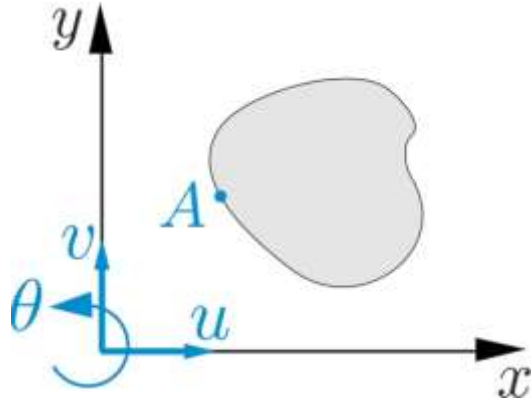
**Molteplicità cinematica  $m$ .** Analiticamente le prescrizioni cinematiche dei vincoli si traducono in equazioni algebriche lineari sugli spostamenti generalizzati: si definisce **molteplicità cinematica** del vincolo il numero  $m$  di equazioni scalari indipendenti che ne caratterizzano le prestazioni cinematiche.

**Tipologie ideali di vincolo.** In base al tipo di prescrizioni cinematiche e alla molteplicità  $m$  si possono distinguere diverse tipologie di vincolo (esterni o interni), ad esempio:

- Pendolo o biella,  $m = 1$  (vincolo semplice)
- Carrello,  $m = 1$  (vincolo semplice)
- Cerniera,  $m = 2$  (vincolo doppio)
- Glifo o doppio pendolo,  $m = 2$  (vincolo doppio)
- Incastro,  $m = 3$  (vincolo triplo)

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Vincoli esterni



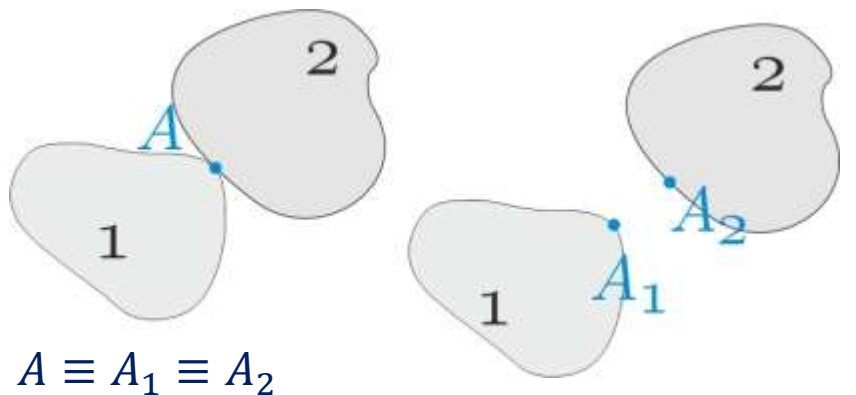
Un vincolo esterno applicato in un punto  $A$  del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento  $\mathbf{u}_A$  del punto  $A$  in cui è applicato e alla rotazione  $\theta$  del corpo:

Condizioni su  $\mathbf{u}_A$  e/o  $\theta$

Condizioni sugli scalari  $u_A$  e/o  $v_A$  e/o  $\theta$

Condizioni sul centro assoluto  $C_R$

## Vincoli interni fra due corpi



$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

Un vincolo interno applicato in un punto  $A \equiv A_1 \equiv A_2$  di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo  $\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$  e alla rotazione relativa  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ :

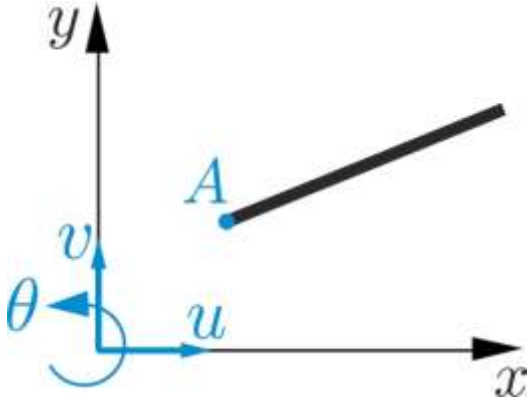
Condizioni su  $\Delta \mathbf{u}_A$  e/o  $\Delta \theta$

Condizioni sugli scalari  $\Delta u_A$  e/o  $\Delta v_A$  e/o  $\Delta \theta$

Condizioni sul centro relativo  $C_{12}$

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Vincoli esterni



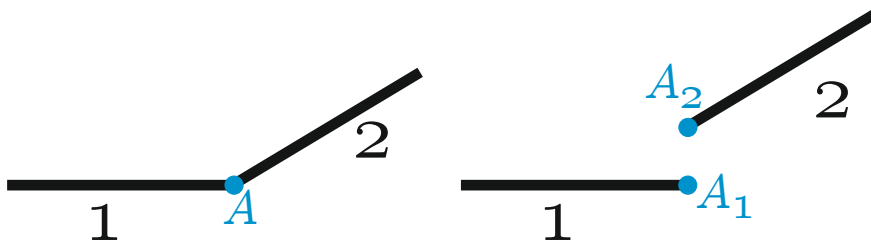
Un vincolo esterno applicato in un punto  $A$  del corpo può imporre delle condizioni al vettore spostamento  $\mathbf{u}_A$  del punto  $A$  in cui è applicato e alla rotazione  $\theta$  del corpo:

Condizioni su  $\mathbf{u}_A$  e/o  $\theta$

Condizioni sugli scalari  $u_A$  e/o  $v_A$  e/o  $\theta$

Condizioni sul centro assoluto  $C_R$

## Vincoli interni fra due travi



$$A \equiv A_1 \equiv A_2$$

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

Un vincolo interno applicato in un punto  $A \equiv A_1 \equiv A_2$  di due corpi può imporre condizioni al vettore spostamento relativo  $\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A_2} - \mathbf{u}_{A_1}$  e alla rotazione relativa  $\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$ :

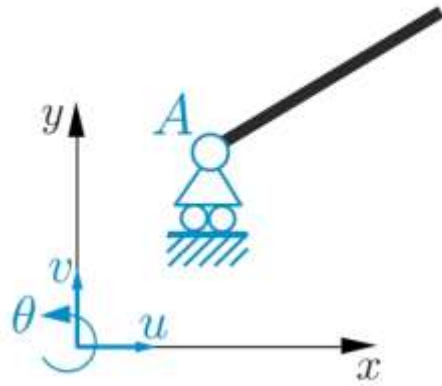
Condizioni su  $\Delta \mathbf{u}_A$  e/o  $\Delta \theta$

Condizioni sugli scalari  $\Delta u_A$  e/o  $\Delta v_A$  e/o  $\Delta \theta$

Condizioni sul centro relativo  $C_{12}$

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Carrello esterno

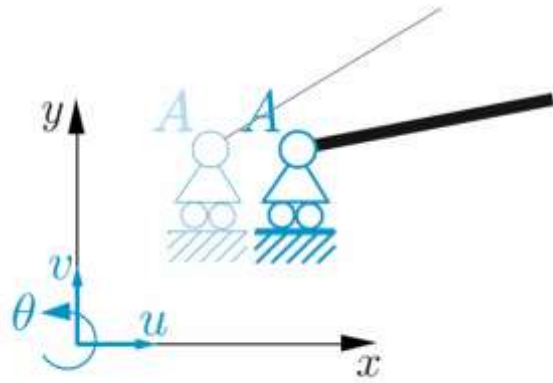


---

## Carrello interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Carrello esterno



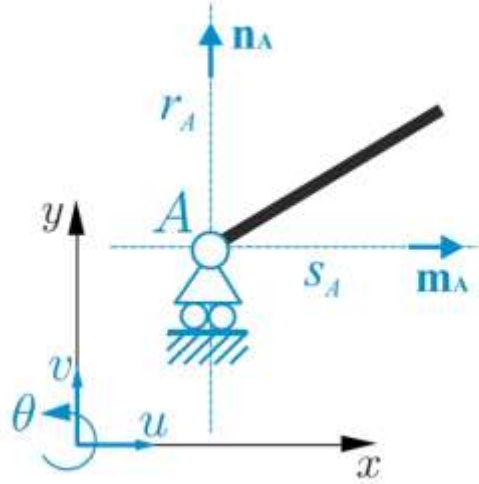
---

## Carrello interno



# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Carrello esterno



$r_A$  asse del carrello  
 $s_A$  asse di scorrimento

$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

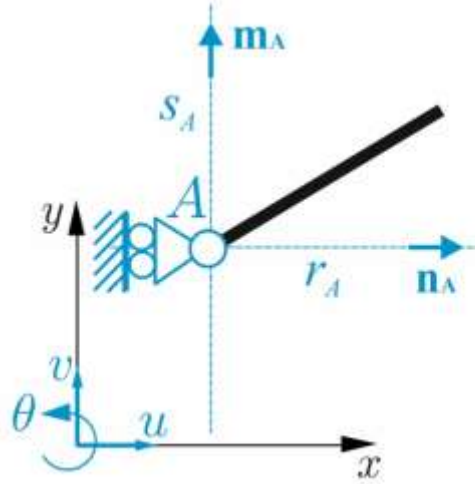
$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

## Carrello interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Carrello esterno



$r_A$  asse del carrello  
 $s_A$  asse di scorrimento

$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

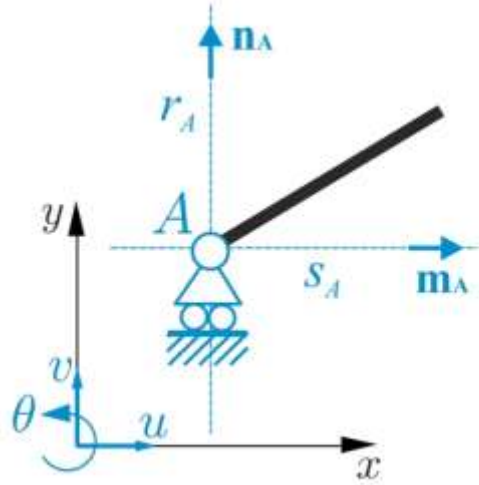
$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

## Carrello interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Carrello esterno



$r_A$  asse del carrello  
 $s_A$  asse di scorrimento

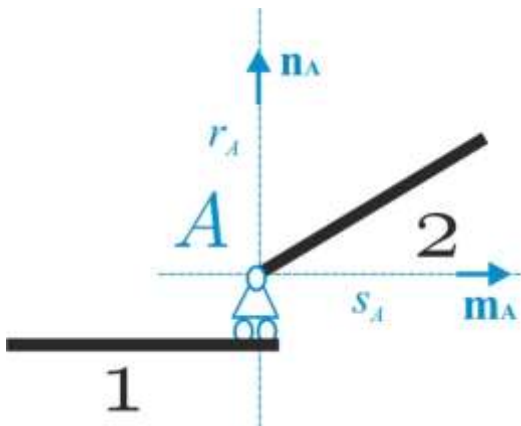
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

## Carrello interno

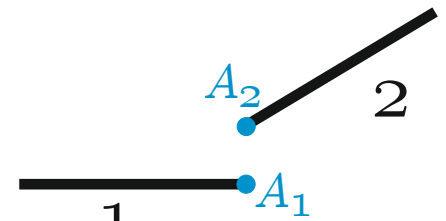


$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\Delta \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

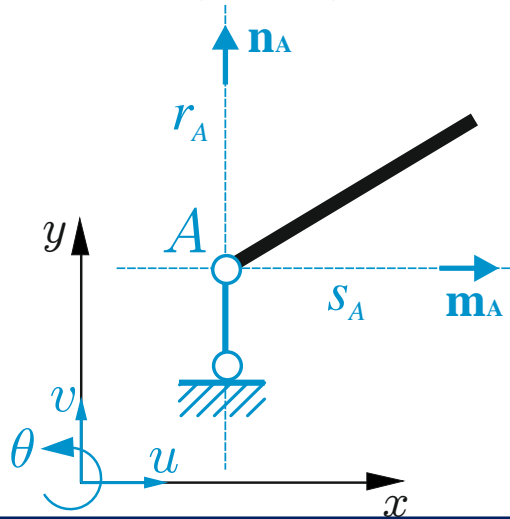


$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Pendolo (biella) esterno



$r_A$  asse del pendolo  
 $s_A$  asse di scorrimento

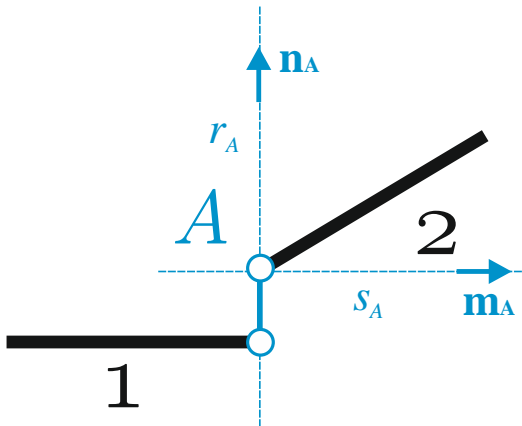
$$C_R \in r_A$$

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

## Pendolo (biella) interno

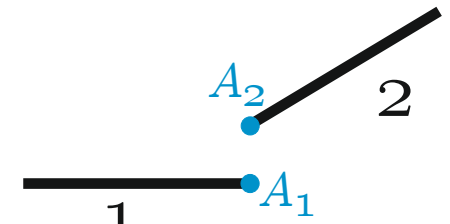


$$C_{12} \in r_A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\Delta \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 1$$

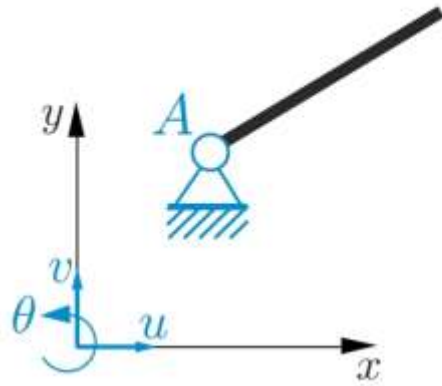


$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

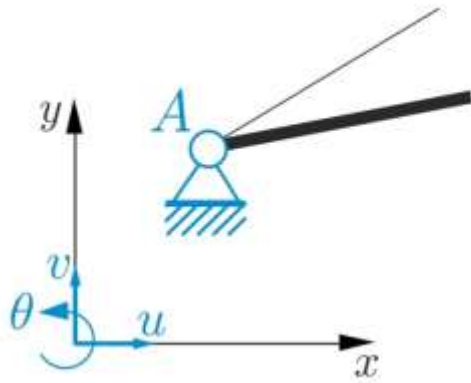
## Cerniera esterna



## Cerniera interna

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

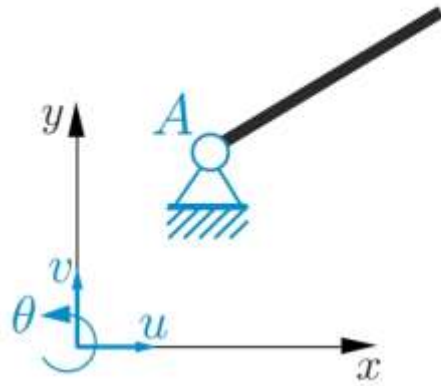
## Cerniera esterna



## Cerniera interna

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Cerniera esterna



*non ci sono direzioni preferenziali*

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\theta \neq 0$$

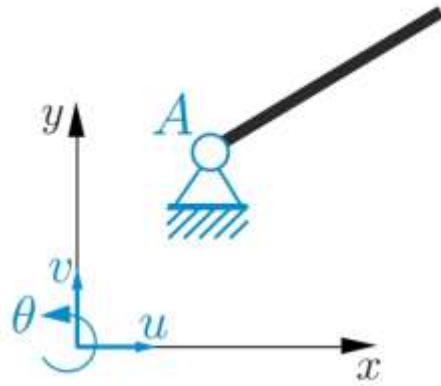
$$C_R \equiv A$$

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$

## Cerniera interna

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Cerniera esterna



*non ci sono direzioni preferenziali*

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\theta \neq 0$$

$$C_R \equiv A$$

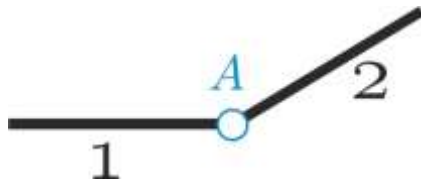
$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$

## Cerniera interna

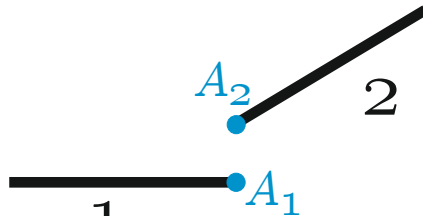
$$C_{12} = A$$

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\Delta \theta \neq 0$$



$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 \neq 0 \end{cases} \quad m = 2$$



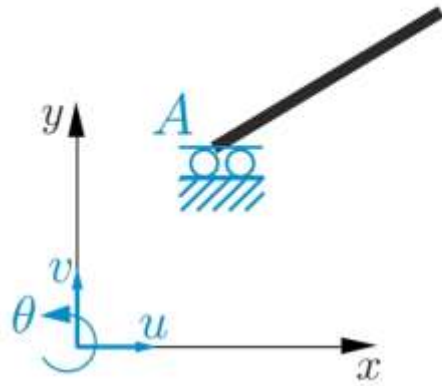
$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

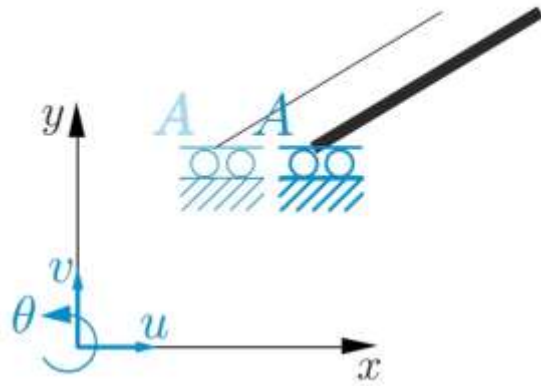
## Glifo o doppio pendolo esterno



## Glifo o doppio pendolo interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

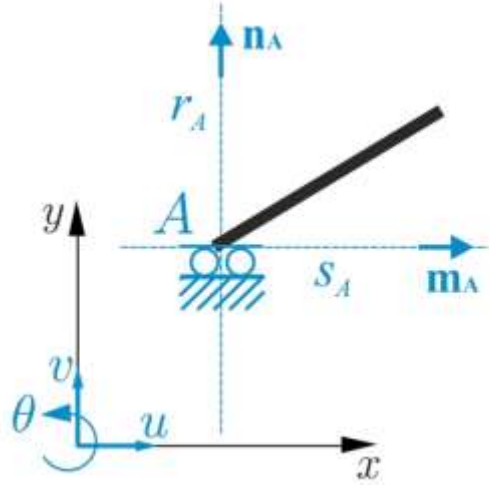
## Glifo o doppio pendolo esterno



## Glifo o doppio pendolo interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Glifo o doppio pendolo esterno



$r_A$  asse del glifo  
 $s_A$  asse di scorrimento

$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta = 0 \quad \theta = 0$$

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 2$$



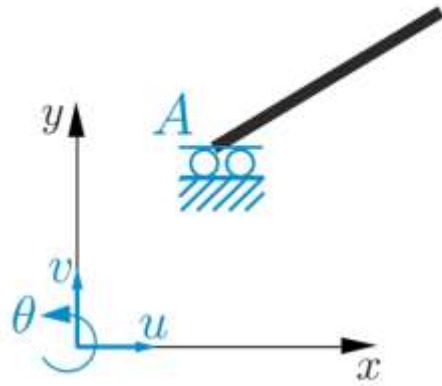
## Glifo o doppio pendolo interno

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Glifo o doppio pendolo esterno

$r_A$  asse del glifo  
 $s_A$  asse di scorrimento

$$C_R \equiv C_{r\infty}$$



$$\mathbf{u}_A \perp \mathbf{n}_A \quad \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

$$\theta = 0 \quad \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_A \neq 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 2$$

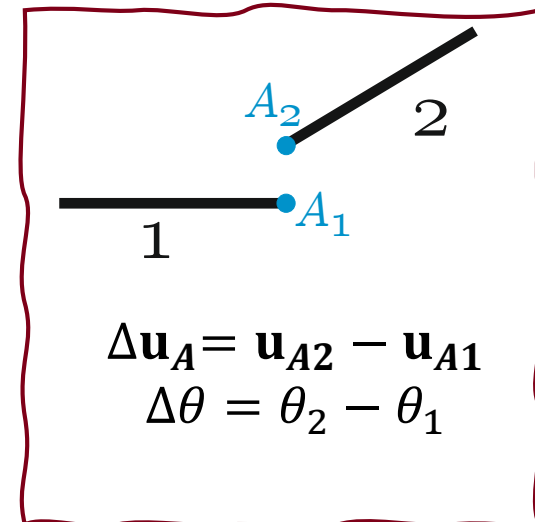
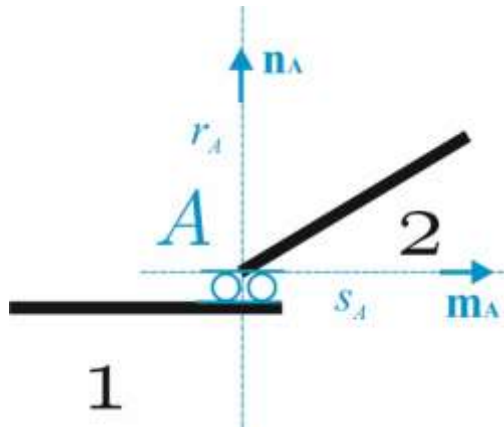
## Glifo o doppio pendolo interno

$$C_{12} \equiv C_{r\infty}$$

$$\Delta \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{n}_A = 0$$

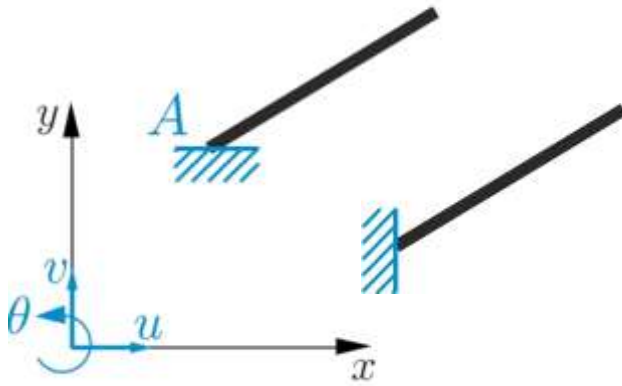
$$\Delta \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} \neq 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 2$$



# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Incastro esterno



*non ci sono direzioni  
preferenziali*

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\theta = 0$$

$C_R$  non esiste  
Il corpo non può spostarsi

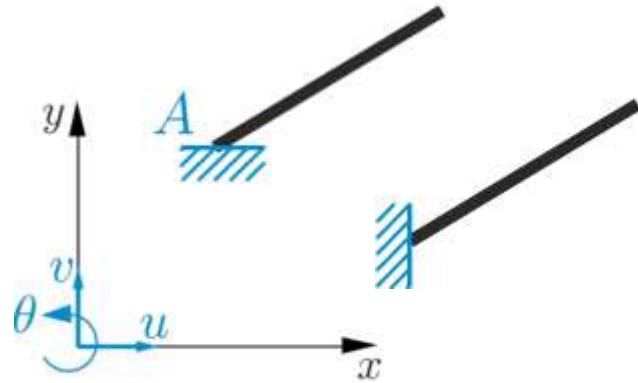
$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

---

## Incastro interno (vincolo di continuità)

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Incastro esterno



*non ci sono direzioni preferenziali*

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\theta = 0$$

$C_R$  non esiste  
Il corpo non può spostarsi

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

## Incastro interno (vincolo di continuità)

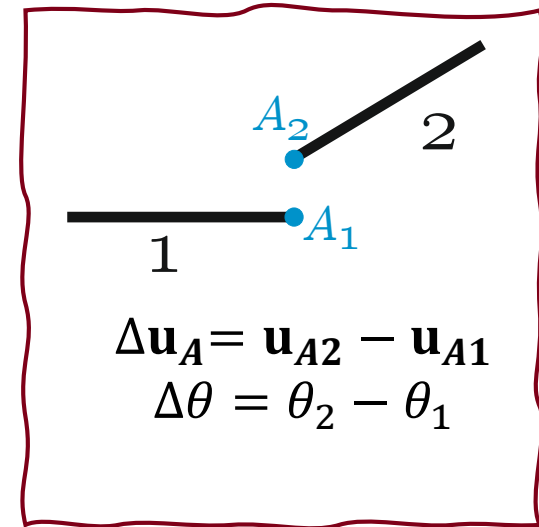


$$C_{12} \nexists$$

$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{0}$$

$$\Delta \theta = 0$$

$$\begin{cases} u_{A2} - u_{A1} = 0 \\ v_{A2} - v_{A1} = 0 \\ \theta_2 - \theta_1 = 0 \end{cases} \quad m = 3$$

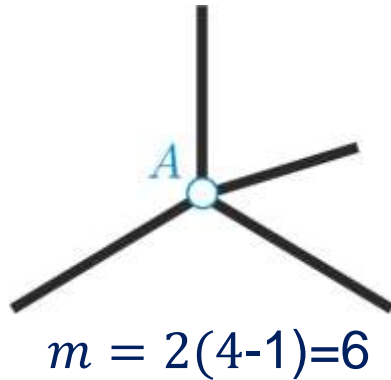


$$\Delta \mathbf{u}_A = \mathbf{u}_{A2} - \mathbf{u}_{A1}$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Vincoli interni che connettono più di due corpi



Molteplicità

$$m = n_V(n_C - 1)$$

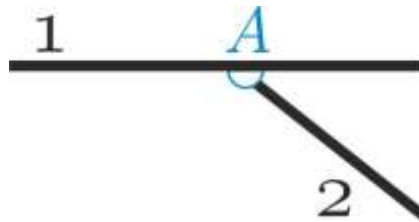
## Rappresentazione grafica

$m = 2$



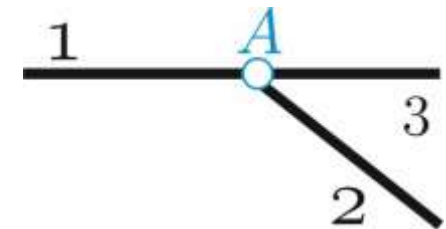
*Cerniera che collega  
due travi alle estremità*

$m = 2$



*Cerniera che collega  
due travi non alle estremità*

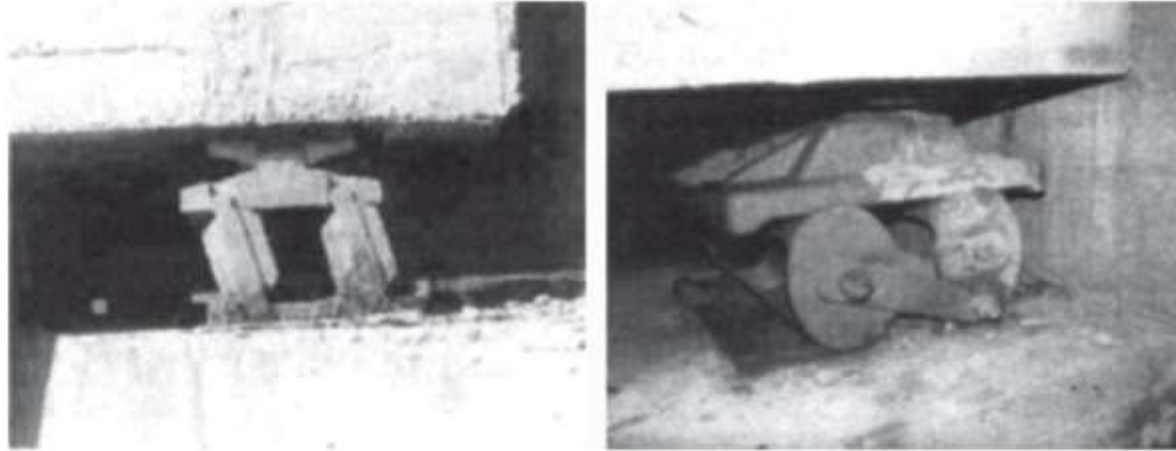
$m = 4$



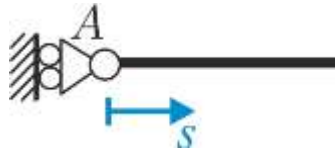
*Cerniera che collega  
tre travi alle estremità*

# 1. Cinematica del corpo rigido: i vincoli

## Cedimenti vincolari

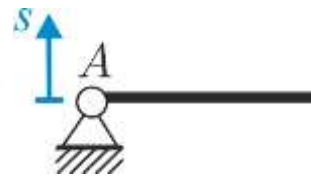


## Modello: esempi



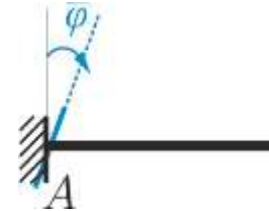
*Cedimento carrello*

$$\begin{cases} u_A = \bar{s} \\ v_A \neq 0 \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



*Cedimento cerniera*

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = +\bar{s} \\ \theta \neq 0 \end{cases}$$



*Cedimento angolare incastro*

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ \theta = -\bar{\varphi} \end{cases}$$