Facoltà di Architettura
Scienze dell'Architettura

Meccanica delle Strutture

Paolo Casini

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università di Roma *La Sapienza*

E-mail: p.casini@uniroma1.it
pagina web: www.pcasini.it/disg/statica

Testo di riferimento:
Paolo Casini, Marcello Vasta. *Scienza delle Costruzioni*,
CittàStudi DeAgostini, 4° Edizione, 2019

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Lezione 2

Parte 0 – Concetti di base

- Richiami di fisica
- Teoria dei vettori

1. Richiami di fisica

- **Generalità: fisica e fenomeni fisici**
- **Meccanica classica**
- **Grandezze fisiche**
- **Misura e unità di misura**
- **Grandezze fisiche fondamentali e derivate**
- **Equazioni dimensionali**

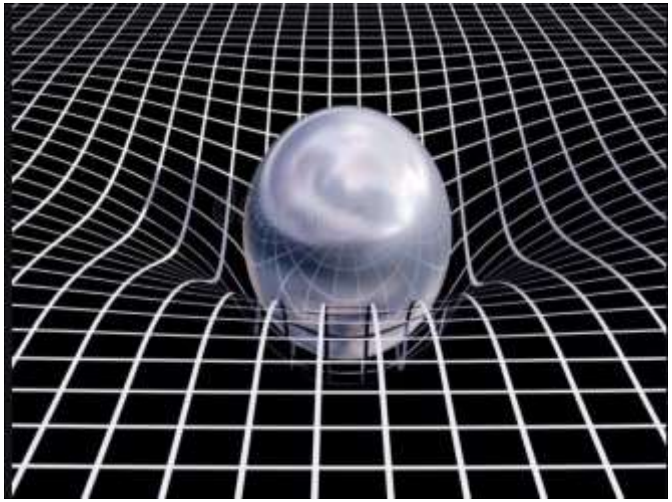
1. Richiami: Generalità

FISICA: si occupa di descrivere qualitativamente e quantitativamente i fenomeni naturali

DISCIPLINE: la fisica è suddivisa in diverse discipline, fra cui ad esempio: meccanica classica e relativistica, termodinamica, elettromagnetismo

Meccanica classica

Meccanica relativistica

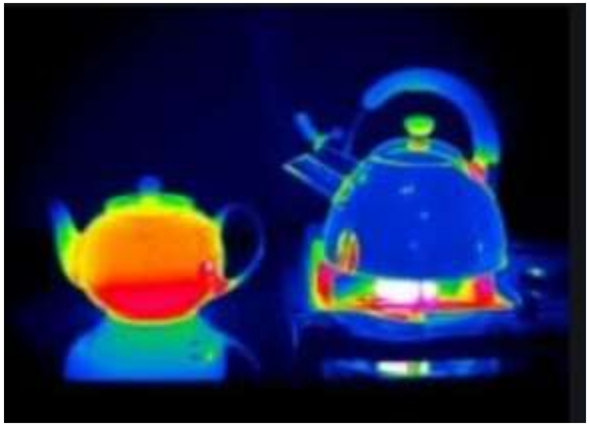


1. Richiami: Generalità

FISICA: si occupa di descrivere qualitativamente e quantitativamente i fenomeni naturali

DISCIPLINE: la fisica è suddivisa in diverse discipline, fra cui ad esempio: meccanica classica e relativistica, termodinamica, elettromagnetismo

Termodinamica



Elettromagnetismo

1. Richiami: Meccanica

MECCANICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, il moto dei corpi (spostamenti, velocità, accelerazioni), le cause che provocano il moto, le condizioni di equilibrio. Si suddivide tradizionalmente in:

CINEMATICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo provocano. Definisce le grandezze e gli strumenti atti a *descrivere e misurare*: cambiamenti di posizione e di forma (deformazioni), campi di velocità e di accelerazione

DINAMICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, le cause che provocano il moto o le deformazioni dei corpi (*Forze*)

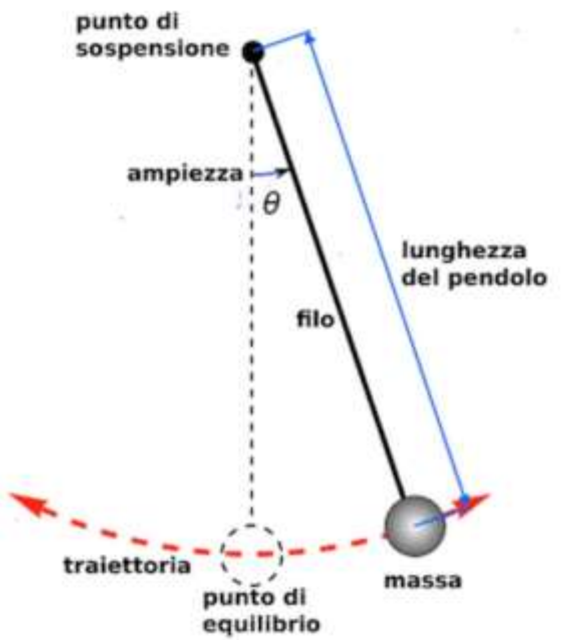
STATICA: studia, qualitativamente e quantitativamente, l'*equilibrio* dei corpi e le condizioni per cui tale *equilibrio si verifica*

Una configurazione C si dice di *equilibrio* per un sistema se, ponendo il sistema in C con atto di moto nullo, il sistema vi permane in *quiete*

1. Richiami: Grandezze fisiche

Grandezze fisiche: le grandezze che entrano in gioco nella descrizione di un dato fenomeno fisico
Grandezze meccaniche: le grandezze fisiche che entrano in gioco nei fenomeni di cui si occupa la meccanica classica: grandezze cinematiche, dinamiche e statiche

Esempio: il pendolo semplice



Grandezze meccaniche

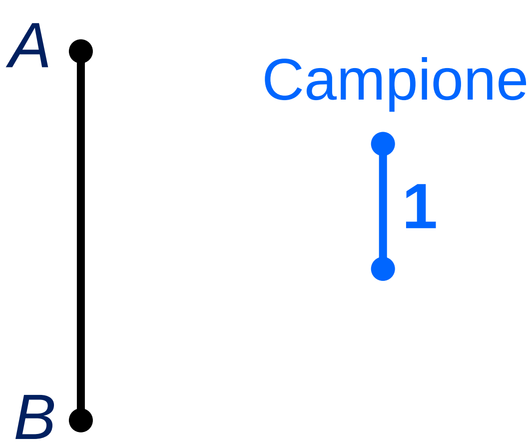
- Lunghezza
- Angolo
- Massa
- Spostamento, velocità, accel.
- tempo
- forza di gravità
- forze dissipative, attriti

1. Richiami: Misure fisiche

Per studiare il fenomeno fisico è necessario '*quantificare*' le grandezze che vi intervengono: questa operazione è chiamata **misura**

Misura: assegnare ad una grandezza fisica un *numero reale* ed una *unità di misura*

Esempio: Misura della lunghezza del pendolo



- Si sceglie arbitrariamente un segmento *campione* a cui si attribuisce convenzionalmente il *valore unitario*
- La misura di $\overline{AB}$ è data dal numero di volte in cui il campione è contenuto in AB
- Il campione è detto **unità di misura** ed è fissato da convenzioni internazionali.

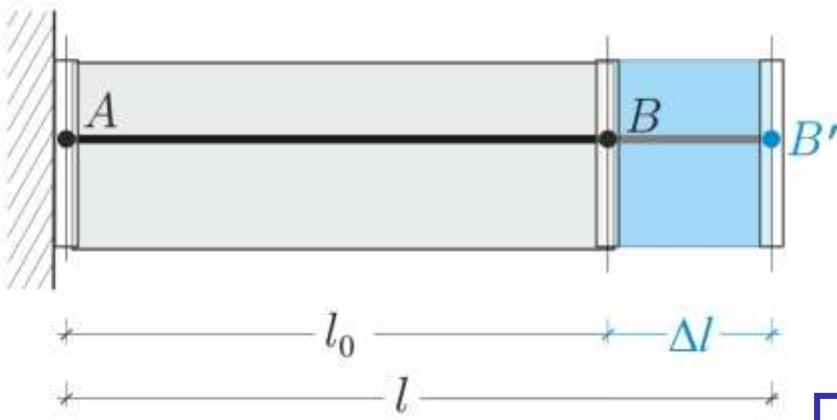
1. Richiami: Dimensioni fisiche

Il tipo di unità di misura definisce la **dimensione fisica** della grandezza: tutte le grandezze che si misurano con la stessa unità di misura hanno le stesse dimensioni fisiche e si dicono *omogenee*.

Simbolo: convenzionalmente la dimensione fisica di una grandezza si rappresenta con lettere racchiuse da parentesi quadre: per esempio $[\boldsymbol{L}]$ rappresenta una grandezza che ha dimensioni fisiche di una lunghezza.

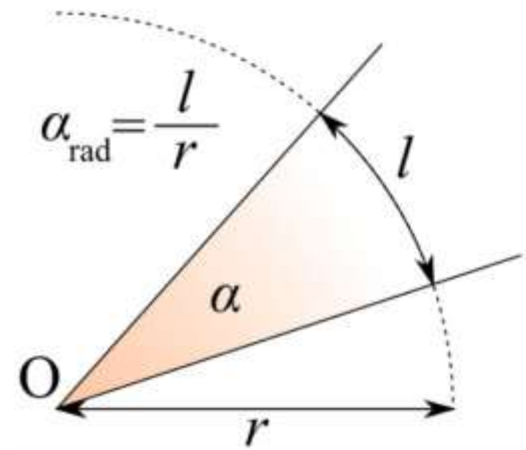
Grandezze adimensionali: per misurarle è sufficiente un numero reale (e non l'unità di misura). Simbolo: **[0]**

Esempio 1: Variazioni percentuali



$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - \ l_0}{l_0} \qquad \%$$

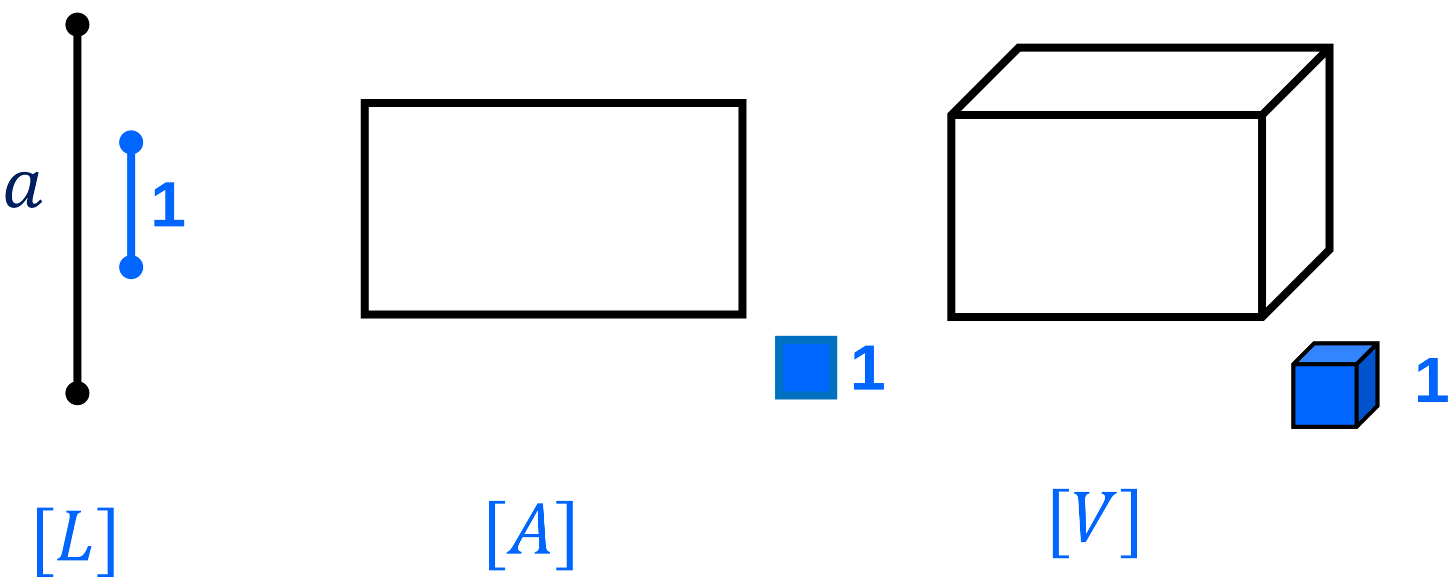
Esempio 2: Angolo, radianti



1. Richiami: Grandezze fondamentali e derivate

Non è necessario definire un unità di misura per ogni grandezza fisica: è possibile sceglierne alcune come **fondamentali** e definire tutte le altre (**derivate**) a partire da quelle fondamentali

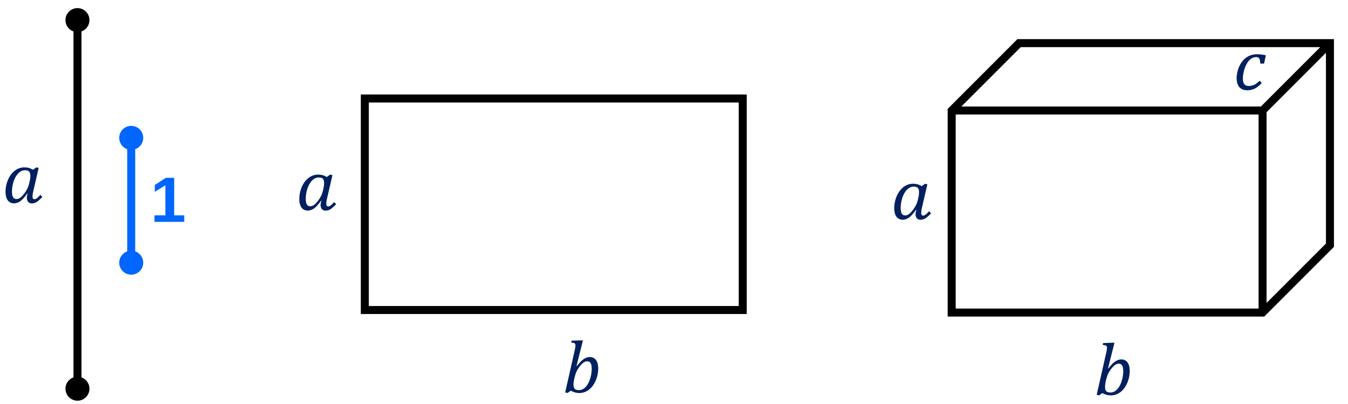
Esempio: Lunghezza, Area, Volume



1. Richiami: Grandezze fondamentali e derivate

Non è necessario definire un unità di misura per ogni grandezza fisica: è possibile sceglierne alcune come **fondamentali** e definire tutte le altre (**derivate**) a partire da quelle fondamentali

Esempio: Lunghezza grandezza fondamentale, Area e Volume derivate



$[L]$

$A = ab$

$[A] = [L^2]$

$V = abc$

$[V] = [L^3]$

1. Richiami: Sistemi di unità

La scelta delle grandezze fondamentali e delle rispettive unità di misura è stabilita da convenzioni internazionali

Sistema Internazionale, S.I.:

- Lunghezza $[L]$, unità: metro
- Tempo $[t]$, unità secondo
- Massa $[m]$, unità: kg-massa
- Temperatura $[T]$, unità: grado Kelvin

Sistema Pratico:

- Lunghezza $[L]$, unità: metro
- Tempo $[t]$, unità secondo
- Massa $[m]$, unità: kg-massa
- Temperatura $[T]$, unità: grado Kelvin
- Forza $[F]$, unità: Newton

1. Richiami: Equazioni dimensionali

Esercizio 1. Determinare le dimensioni fisiche della grandezza X definita dalla seguente formula:

$$X = \frac{ql^2}{3}$$

Dove $q = 1\ \mathrm{kN/m}$, $l = 2\ \mathrm{m}$,

$[F/L]$ $[L]$

$$[X] = \frac{\left[\frac{F}{L}\right][L^2]}{[0]} = \left[\frac{F}{\cancel{L}}\right][L^{\cancel{2}}] = [FL]$$

1. Richiami: Equazioni dimensionali

Esercizio 1. Determinare le dimensioni fisiche della grandezza X definita dalla seguente formula:

$$X = \frac{qa^3}{8EI}$$

Dove $q = 1\ \mathrm{kN/m}$, $a = 2\ \mathrm{m}$, $E = 1\ \mathrm{kN/m^2}$, $I = 1\ \mathrm{m^4}$

$[F/L]$ $[L]$ $[F/L^2]$ $[L^4]$

$$[X] = \frac{\left[\frac{F}{L}\right][L^3]}{\left[\frac{F}{L^2}\right][L^4]} = \frac{[FL^2]}{[FL^2]} = [0]$$

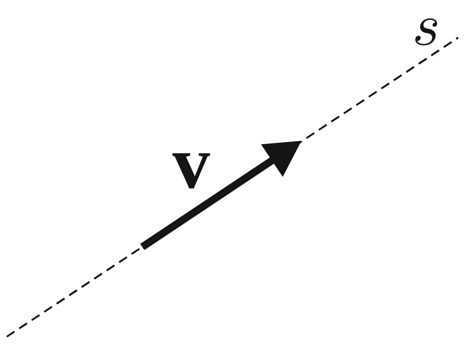
1. Richiami: Grandezze fisiche scalari e vettoriali

Grandezze fisiche scalari. Per caratterizzarle è sufficiente un numero reale e un'unità di misura

Esempi: tempo, massa, temperatura, lunghezza, area, volume etc.

Grandezze fisiche Vettoriali. Per caratterizzarle non è sufficiente solo un numero reale e un'unità di misura ma anche una direzione, un verso e, in alcuni casi, un punto di applicazione

Esempi: spostamento, velocità, accelerazione, forza etc.



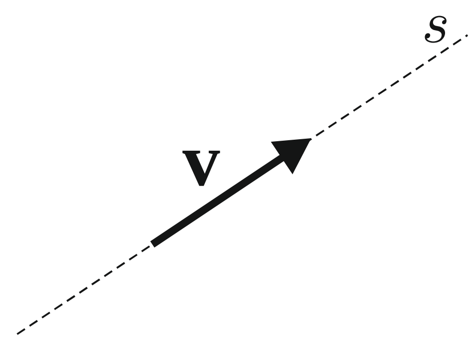
2. Teoria dei vettori (richiami)

- **Definizioni**
- **Componenti scalari**
- **Operazioni elementari**
- **Prodotto scalare**
- **Prodotto vettoriale**

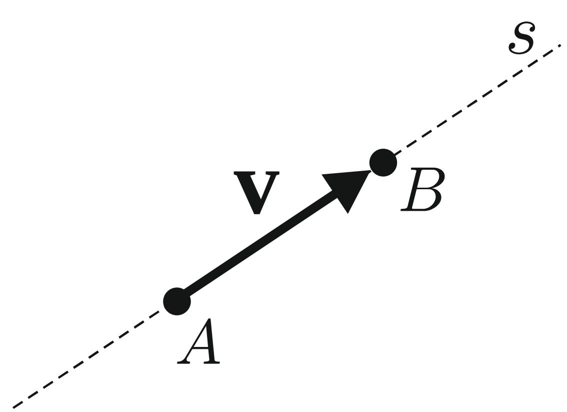
2. Teoria dei vettori: definizioni

Vettore libero. Si definisce vettore libero o semplicemente *vettore* un ente geometrico caratterizzato da tre elementi: direzione, verso e modulo (o intensità)

$\vec{\mathbf{v}}$ $\quad$ $\mathbf{v}$



Segmento orientato. Un vettore libero si rappresenta con un segmento orientato (ce ne sono ∞^3 equipollenti)



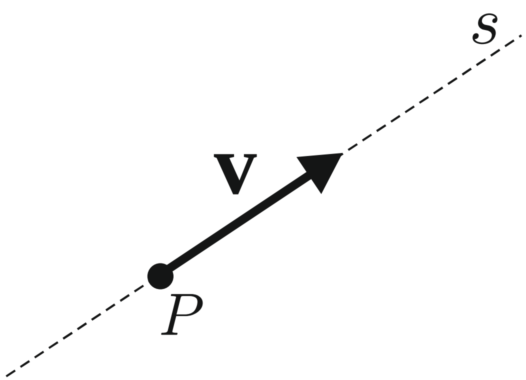
Modulo

$\overline{AB}$ $\quad |\mathbf{v}| \quad |\vec{\mathbf{v}}| \quad v$

2. Teoria dei vettori: definizioni

Vettore applicato.

$$(P, \mathbf{v})$$



s: retta d'azione

P: punto di applicazione

Versore $\vec{\mathbf{e}}$. Vettore di modulo unitario

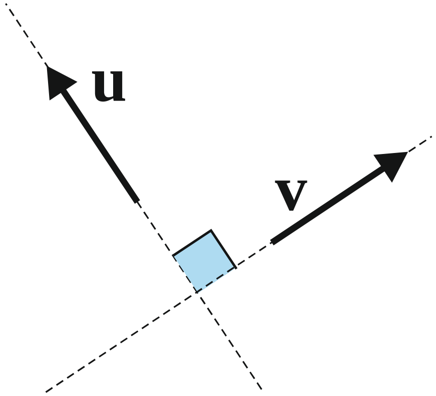
$$|\vec{\mathbf{e}}| = 1$$

Vettore nullo $\vec{\mathbf{0}}$. Vettore di modulo nullo

$$\left|\vec{\mathbf{0}}\right| = 0$$

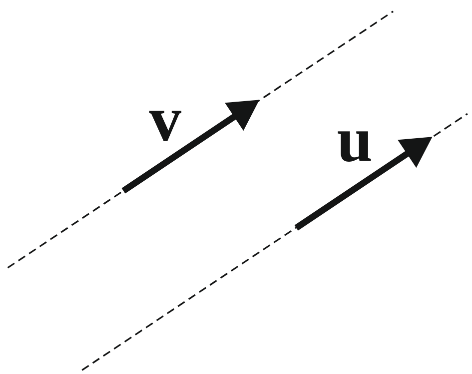
Vettori perpendicolari (normali)

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

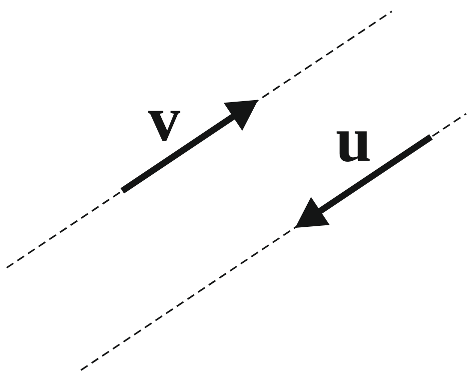


Vettori paralleli.

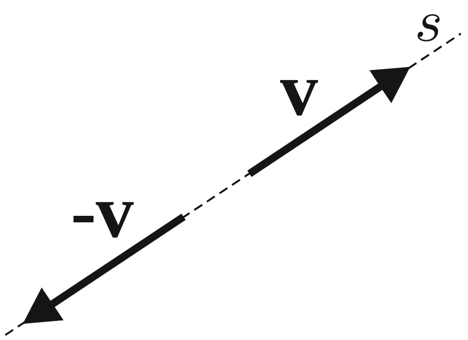
$\mathbf{u} \,//\, \mathbf{v}$



Concordi



Discordi

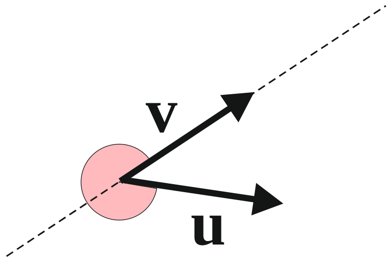


Uguali e opposti

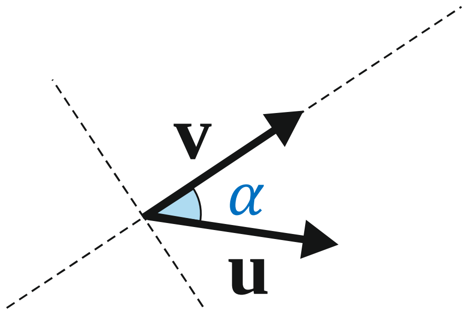
2. Teoria dei vettori: definizioni

Angolo convesso

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

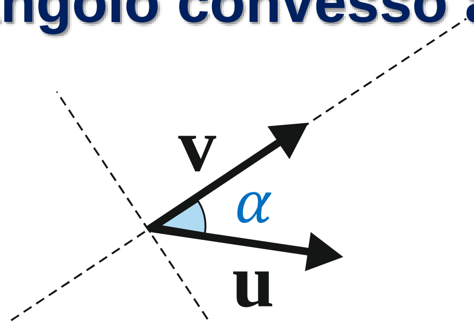


Concavo



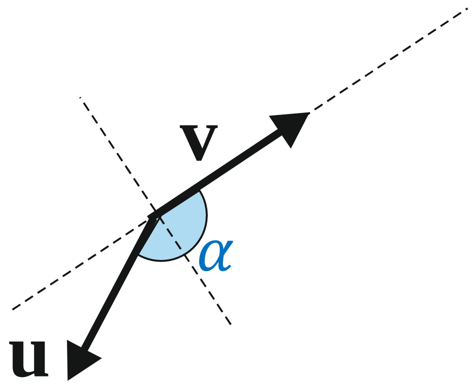
Convesso

Angolo convesso acuto e ottuso



$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

acuto

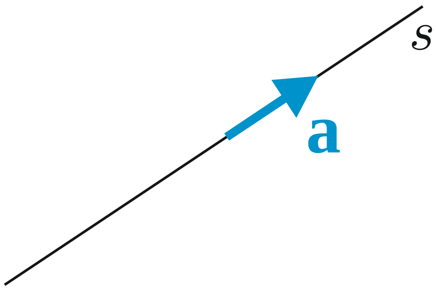


$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$$

ottuso

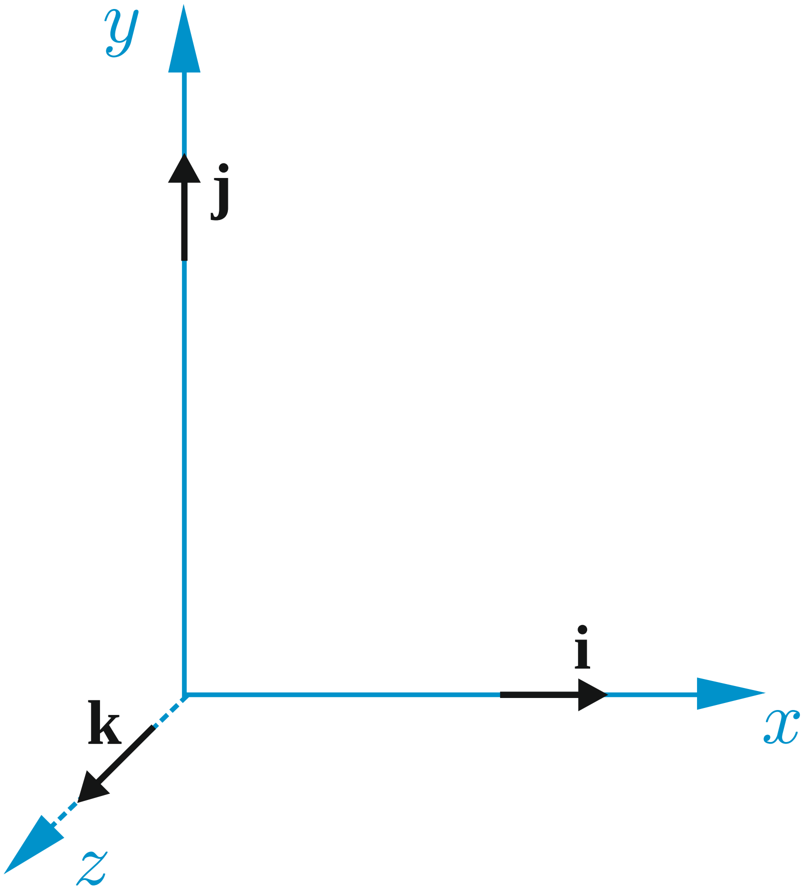
2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Retta orientata



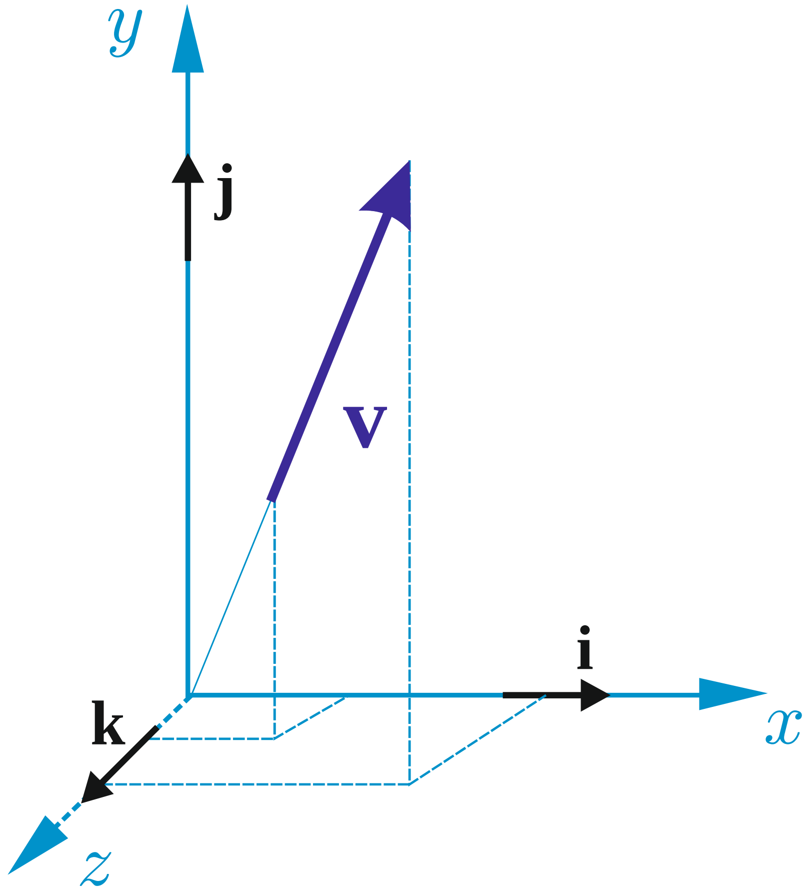
Versore $\vec{a}$

Versori cartesiani

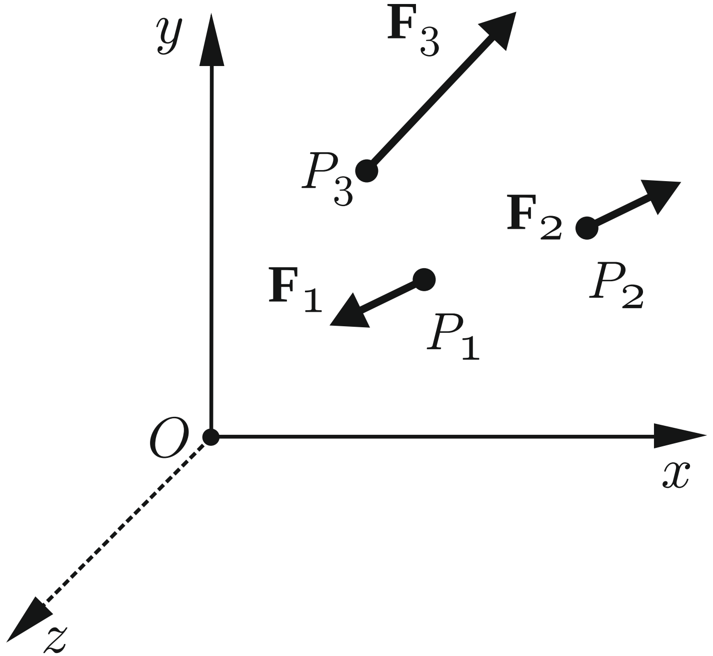


2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

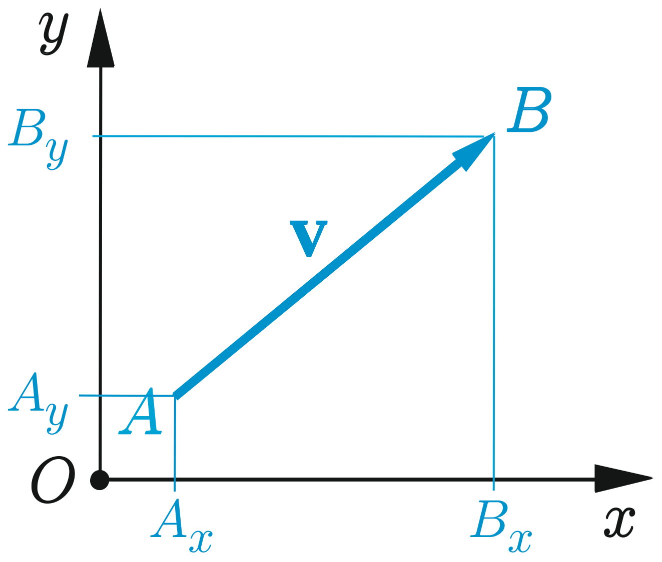
Componenti cartesiane



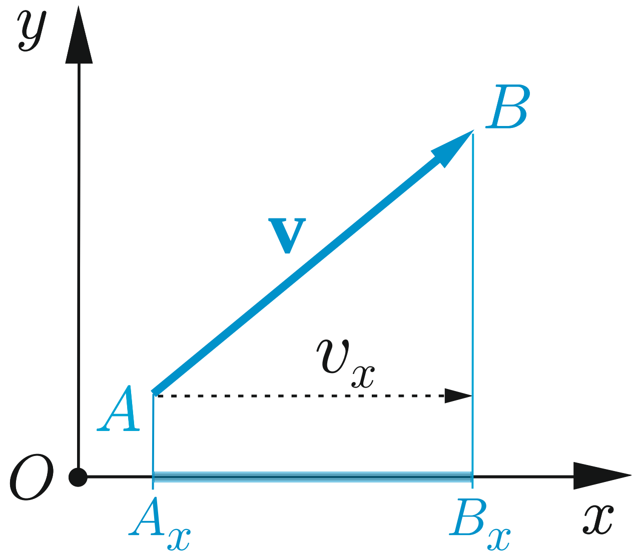
Sistema di vettori piani



Componenti cartesiane (piano)

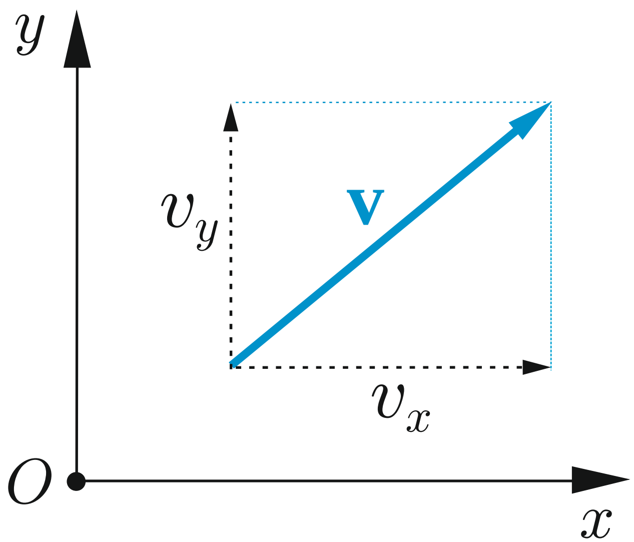


Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$

Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$

$$v_y = y_B - y_A$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y)$$

Prodotto fra vettore $\mathbf{v}$ e numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

direzione: *stessa di* $\mathbf{v}$

verso: *concorde a* $\mathbf{v}$ *se* $\lambda \geq 0$

discorde a $\mathbf{v}$ *se* $\lambda \leq 0$

modulo: $|\mathbf{w}| = |\lambda||\mathbf{v}|$

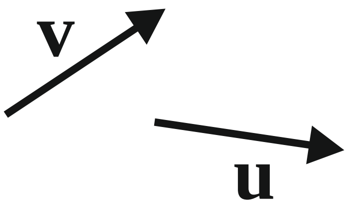
Componenti scalari:

$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (\lambda v_x, \lambda v_y)$$

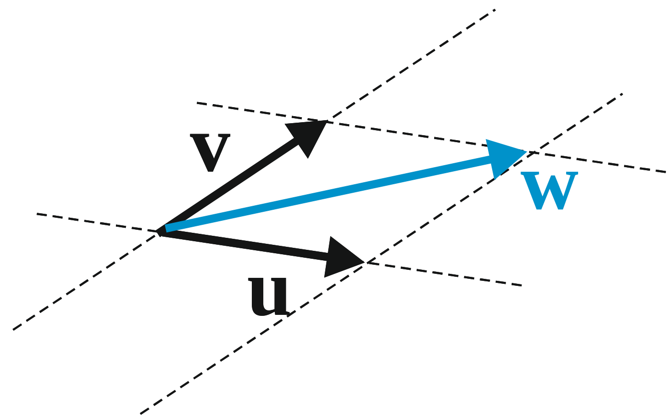
2. Teoria dei vettori: operazioni elementari

Somma fra vettori

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$$



Direzione, verso, modulo: regola del parallelogramma



Proprietà

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

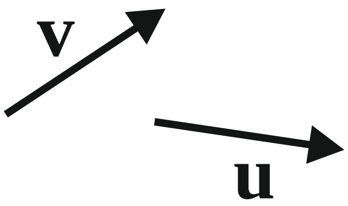
$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

Componenti scalari:

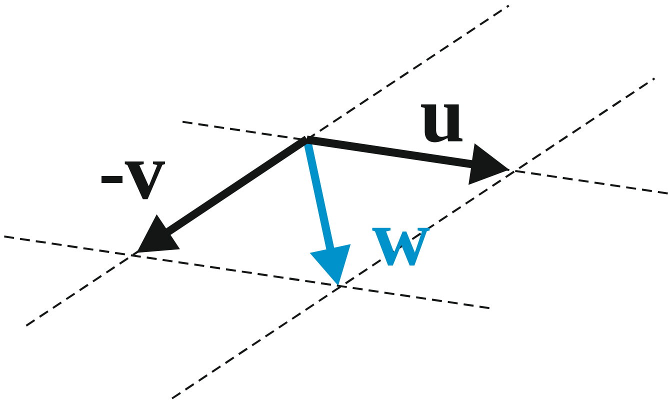
$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y)$$

Differenza fra vettori

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} \; = \mathbf{u}+(-\mathbf{v})$$



Direzione e verso: regola del paralelogramma

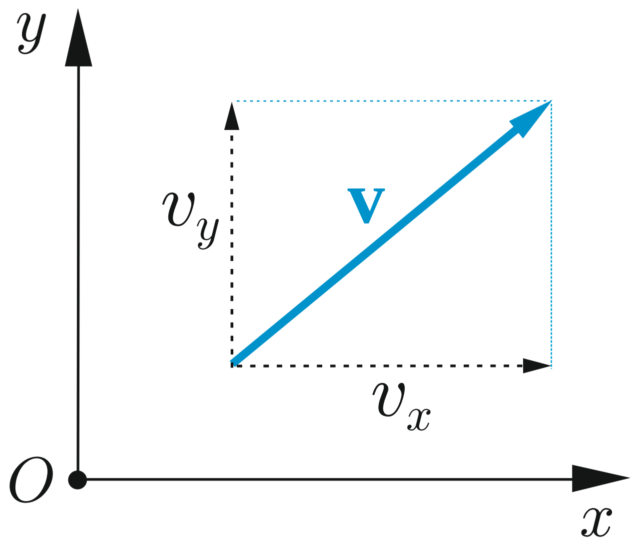


Componenti scalari:

$$\mathbf{w} \equiv (w_x, w_y) = (u_x - v_x, u_y - v_y)$$

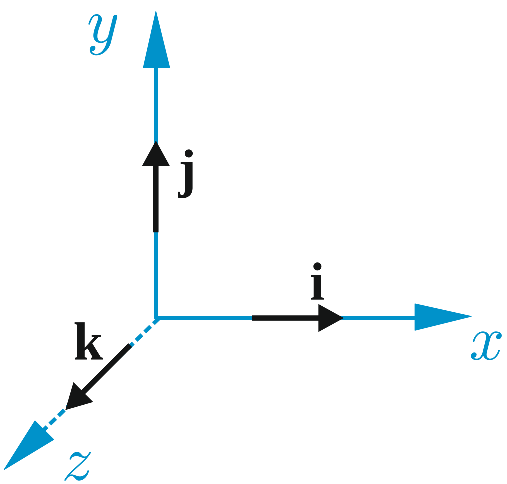
2. Teoria dei vettori: componenti cartesiane

Componenti cartesiane (piano)



$$v_x = x_B - x_A$$
$$v_y = y_B - y_A$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$



$$\boxed{\mathbf{v} \equiv v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y)$$

Combinazione lineare di *N* vettori

$\mathbf{v}_i, \qquad i = 1, \dots, N \qquad\qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, \dots, N$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \lambda_N \mathbf{v_N} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{v_i}$$

Vettori linearmente indipendenti

$\mathbf{v}_i, \qquad i = 1, \dots, N$

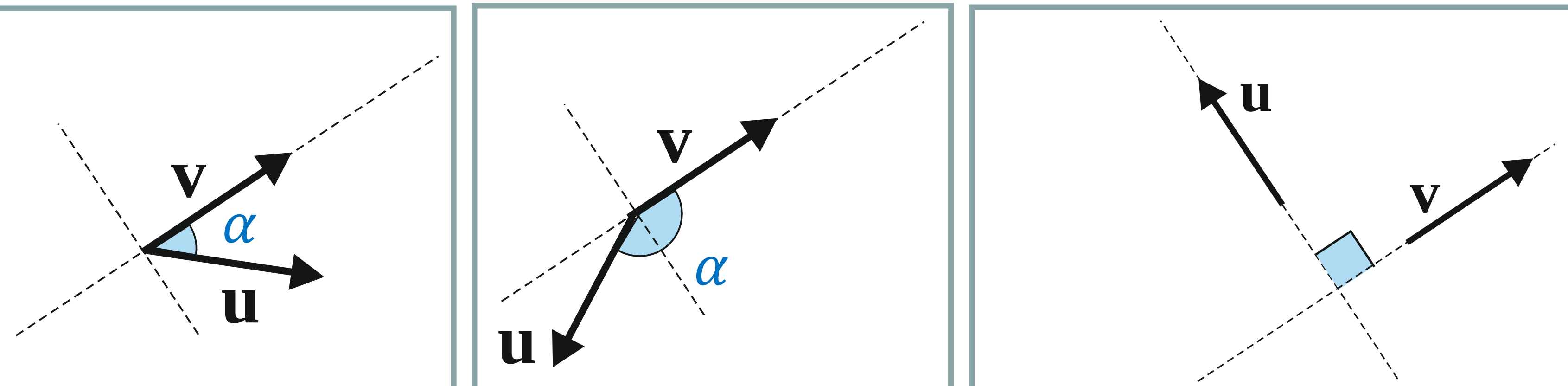
Vettori linearmente indipendenti

la loro combinazione lineare si annulla se e solo se:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = 0$$

Prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\alpha) = u\,v\cos(\alpha) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$$



$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$ $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}\perp\mathbf{v}$

Se i vettori sono paralleli e concordi: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = +uv$

Se i vettori sono paralleli e discordi: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -uv$

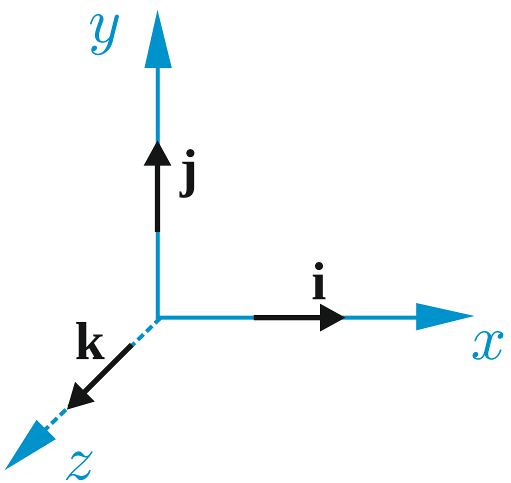
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = u^2$$

2. Teoria dei vettori: prodotto scalare

Prodotto scalare dei versori cartesiani

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1,\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0,\quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=0,\quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$$



Componenti scalari (caso piano):

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\left(u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}\right)\left(v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}\right)=u_x\,v_x+u_y\,v_y$$

$$\mathbf{u}\perp\mathbf{v}\;\Rightarrow\;\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0\Rightarrow\quad u_x\,v_x+u_y\,v_y=0$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2\Rightarrow\quad |\mathbf{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2}$$

2. Teoria dei vettori: prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale

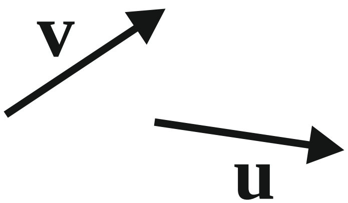
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

direzione: *perpendicolare al piano* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

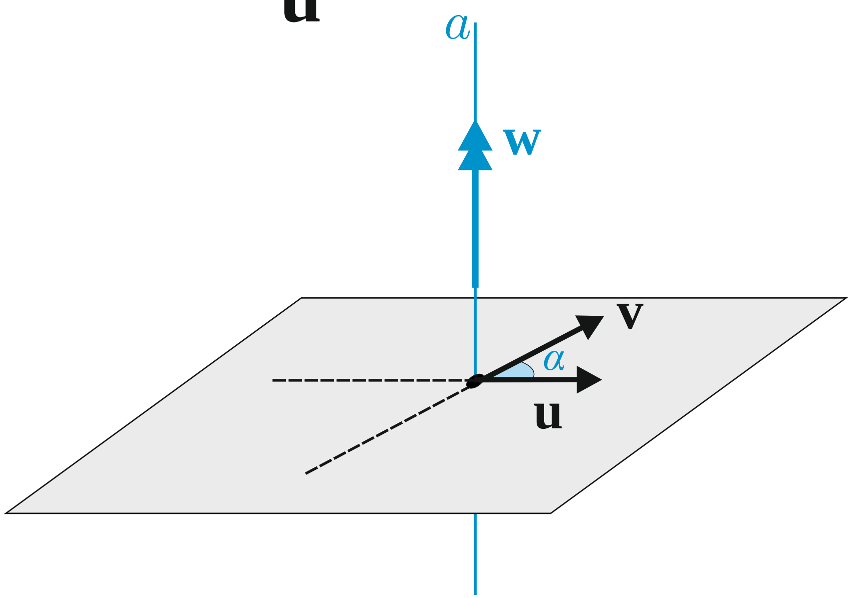
verso: *regola della mano destra*

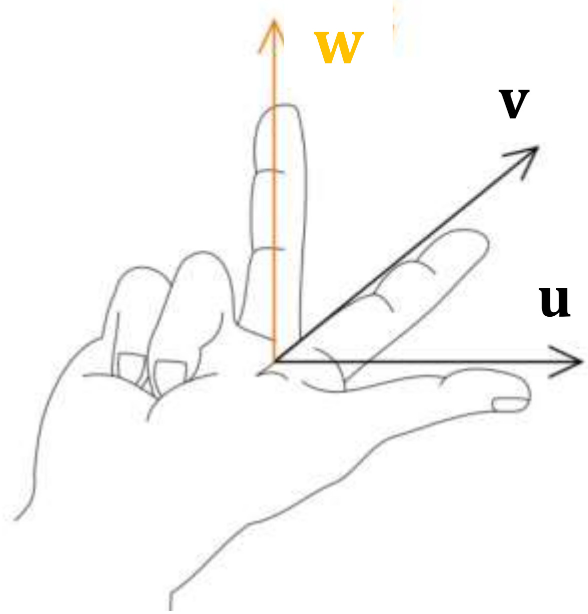
modulo: $|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\alpha)$



$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} // \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$





2. Teoria dei vettori: prodotto vettoriale

Prodotto vettoriale, componenti scalari

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \left(u_y v_z - u_z v_y\right)\mathbf{i} + \left(u_z v_x - u_x z\right)\mathbf{j} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\mathbf{k}$$

Componenti scalari (u e v nel piano *xy*)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{bmatrix} = \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\mathbf{k}$$