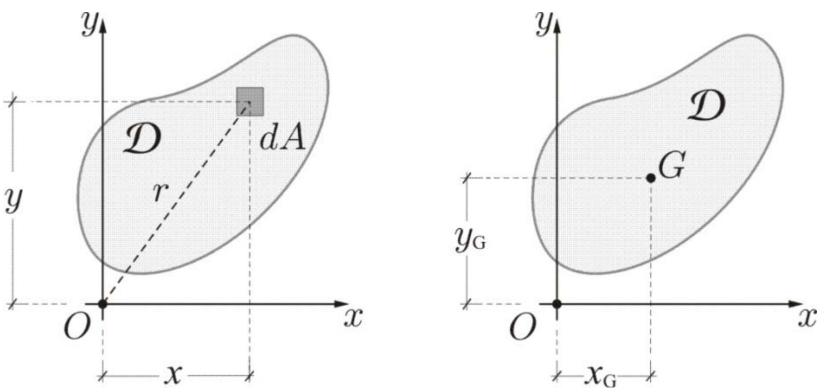
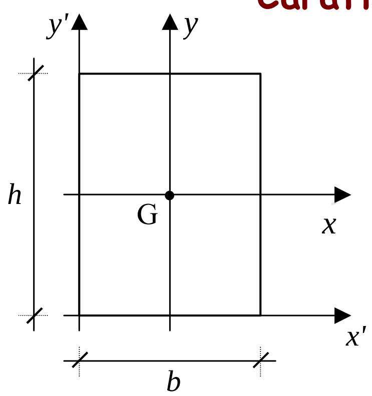
Sapienza Università di Roma
Facoltà di Architettura
Scienze dell'Architettura
❖
Insegnamento di **Meccanica delle Strutture**
a.a. 2017-2018
prof. Paolo Casini

Geometria delle Aree



Caratteristiche geometriche di sezioni elementari



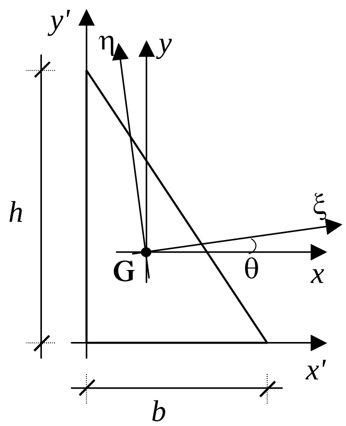
area: bh

momenti statici: $S_{x'} = \frac{1}{2}bh^2,\ S_{y'} = \frac{1}{2}hb^2$

posizione baricentro: $x'_G = \frac{1}{2}b,\ y'_G = \frac{1}{2}h$

m. d'inerzia: $I_{x'} = \frac{1}{3}bh^3,\ I_{y'} = \frac{1}{3}hb^3, I_{x'y'} = \frac{1}{4}h^2b^2$ $\boxed{I_x = \frac{1}{12}bh^3,\ I_y = \frac{1}{12}hb^3}$

raggi principali d'inerzia: $\rho_x = \frac{\sqrt{3}}{6}h,\ \rho_y = \frac{\sqrt{3}}{6}b$



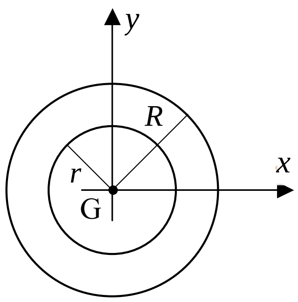
area: $bh/2$

posizione baricentro: $x'_G = \frac{1}{3}b,\ y'_G = \frac{1}{3}h$

momenti d'inerzia: $I_x = \frac{1}{36}bh^3,\ I_y = \frac{1}{36}hb^3,\ I_{xy} = \frac{1}{72}h^2b^2$

raggi principali d'inerzia: $\boxed{\begin{aligned}\rho_\xi &= \tfrac{1}{6}\sqrt{b^2 + h^2 + \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}}\\ \rho_\eta &= \tfrac{1}{6}\sqrt{b^2 + h^2 - \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}}\end{aligned}}$

rotazione assi princ.: $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{hb}{b^2 - h^2}\right)$

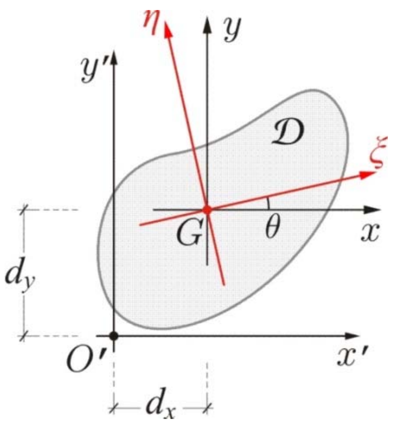


area: $\pi\left(R^2 - r^2\right)$

momenti d'inerzia: $\boxed{I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4),\ I_P = \frac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)}$

raggi principali d'inerzia: $\rho_x = \rho_y = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2}$

Formule di trasporto e rotazione



Baricentro G della sezione *D*. Punto del piano della sezione che gode della seguente proprietà: i momenti statici della sezione rispetto ad una qualsiasi coppia di assi aventi origine in detto punto sono nulli.

Sitema di riferimento 1 (SR1): *Sistema baricentrico* (***G***; *x, y*)

Sitema di riferimento 2 (SR2): *Sistema traslato* (***O'***; *x', y'*), con assi paralleli e concordi a quelli del SR1 ma origine in un punto (*O'*) non coincidente con il aricentro *G*.

Sitema di riferimento 3 (SR3): *Sistema baricentrico ruotato* (***G***; ξ, η), con origine nel baricentro *G* e assi ruotati di un angolo θ (positivo se antioraio) rispetto a SR1.

Formule di Trasporto (SR1 ↔ SR2) *(cfr. Figura):*

$$I_{x'} = I_x + Ad_y^2;\; I_{y'} = I_y + Ad_x^2;\; I_{x'y'} = I_{xy} + Ad_y d_x.$$

Formule di Rotazione (SR1 ↔ SR3) *(cfr. Figura):*

$$I_\xi = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$I_\eta = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$I_{\xi\eta} = (I_x - I_y)\sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Assi e momenti centrali d'inerzia per la sezione Δ.

Sistema principale d'inerzia: è definito dalla proprietà che il momento misto d'inerzia della sezione rispetto ai suoi assi è nullo; gli assi di tale sistema sono detti **assi principali d'inerzia** e, in particolare, **assi centrali d'inerzia** se passano per il baricentro della sezione. Se la sezione presenta **due assi di simmetria** questi sono i due assi centrali d'inerzia. Se la sezione presenta **un solo asse di simmetria** tale asse è centrale d'inerzia e l'altro asse centrale è la retta perpendicolare ad esso passante per il baricentro. Se non vi sono assi di simmetria, cfr. figura, gli assi centrali d'inerzia sono individuati dall'angolo θ dato dalla formula seguente ($I_x > I_y$):

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) \qquad \text{(positivo se antiorario come in figura)}$$

Se $I_y > I_x$ si invertono gli indici. I momenti d'inerzia rispetto a tali assi sono detti **momenti principali d'inerzia**.

Se il sistema di assi (G, ξ, η) riportato in figura è un sistema principale d'inerzia i momenti principali si possono calcolare con le formule seguenti ($I_x > I_y$):

$$I_\xi = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_\eta = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\xi\eta} = 0$$

Libro di testo cfr. Appendice A