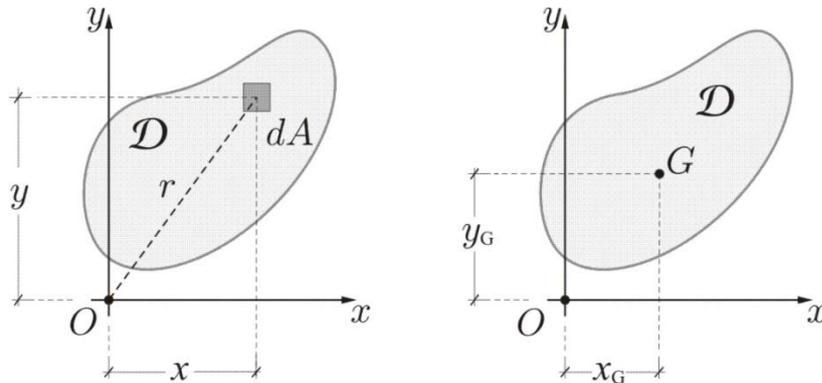
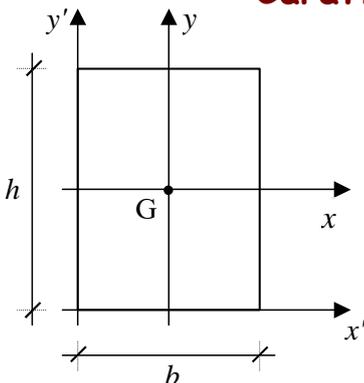


## Geometria delle Aree



### Caratteristiche geometriche di sezioni elementari



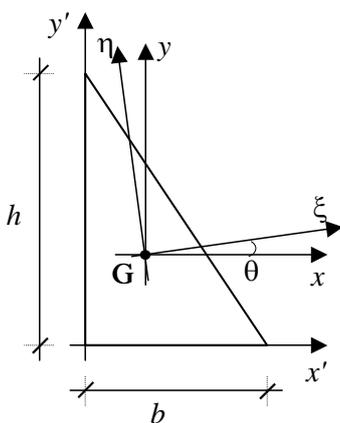
area:  $bh$

momenti statici:  $S_{x'} = \frac{1}{2}bh^2$ ,  $S_{y'} = \frac{1}{2}hb^2$

posizione baricentro:  $x'_G = \frac{1}{2}b$ ,  $y'_G = \frac{1}{2}h$

m. d'inerzia:  $I_{x'} = \frac{1}{3}bh^3$ ,  $I_{y'} = \frac{1}{3}hb^3$ ,  $I_{x'y'} = \frac{1}{4}h^2b^2$   $I_x = \frac{1}{12}bh^3$ ,  $I_y = \frac{1}{12}hb^3$

raggi principali d'inerzia:  $\rho_x = \frac{\sqrt{3}}{6}h$ ,  $\rho_y = \frac{\sqrt{3}}{6}b$



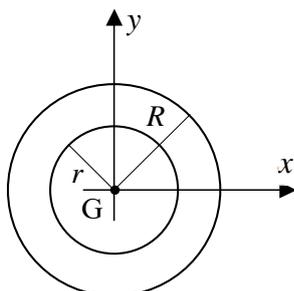
area:  $bh/2$

posizione baricentro:  $x'_G = \frac{1}{3}b$ ,  $y'_G = \frac{1}{3}h$

momenti d'inerzia:  $I_x = \frac{1}{36}bh^3$ ,  $I_y = \frac{1}{36}hb^3$ ,  $I_{xy} = \frac{1}{72}h^2b^2$

raggi principali d'inerzia:  $\rho_\xi = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + h^2 + \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}}$   
 $\rho_\eta = \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + h^2 - \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}}$

rotazione assi princ.:  $\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{hb}{b^2 - h^2}\right)$

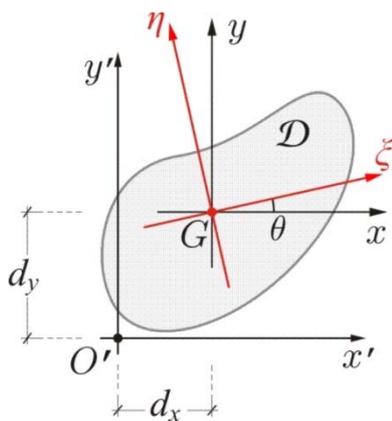


area:  $\pi(R^2 - r^2)$

momenti d'inerzia:  $I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)$ ,  $I_P = \frac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)$

raggi principali d'inerzia:  $\rho_x = \rho_y = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + r^2}$

### Formule di trasporto e rotazione



**Baricentro G della sezione D.** Punto del piano della sezione che gode della seguente proprietà: i momenti statici della sezione rispetto ad una qualsiasi coppia di assi aventi origine in detto punto sono nulli.

**Sistema di riferimento 1 (SR1):** Sistema baricentrico ( $G; x, y$ )

**Sistema di riferimento 2 (SR2):** Sistema traslato ( $O'; x', y'$ ), con assi paralleli e concordi a quelli del SR1 ma origine in un punto ( $O'$ ) non coincidente con il baricentro  $G$ .

**Sistema di riferimento 3 (SR3):** Sistema baricentrico ruotato ( $G; \xi, \eta$ ), con origine nel baricentro  $G$  e assi ruotati di un angolo  $\theta$  (positivo se antiorario) rispetto a SR1.

**Formule di Trasporto (SR1  $\leftrightarrow$  SR2)** (cfr. Figura):

$$I_{x'} = I_x + Ad_y^2; I_{y'} = I_y + Ad_x^2; I_{x'y'} = I_{xy} + Ad_y d_x.$$

**Formule di Rotazione (SR1  $\leftrightarrow$  SR3)** (cfr. Figura):

$$I_\xi = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_\eta = I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{\xi\eta} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

### Assi e momenti centrali d'inerzia per la sezione $\Delta$ .

**Sistema principale d'inerzia:** è definito dalla proprietà che il momento misto d'inerzia della sezione rispetto ai suoi assi è nullo; gli assi di tale sistema sono detti **assi principali d'inerzia** e, in particolare, **assi centrali d'inerzia** se passano per il baricentro della sezione. Se la sezione presenta **due assi di simmetria** questi sono i due assi centrali d'inerzia. Se la sezione presenta **un solo asse di simmetria** tale asse è centrale d'inerzia e l'altro asse centrale è la retta perpendicolare ad esso passante per il baricentro. Se non vi sono assi di simmetria, cfr. figura, gli assi centrali d'inerzia sono individuati dall'angolo  $\theta$  dato dalla formula seguente ( $I_x > I_y$ ):

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) \quad (\text{positivo se antiorario come in figura})$$

Se  $I_y > I_x$  si invertono gli indici. I momenti d'inerzia rispetto a tali assi sono detti **momenti principali d'inerzia**.

Se il sistema di assi ( $G, \xi, \eta$ ) riportato in figura è un sistema principale d'inerzia i momenti principali si possono calcolare con le formule seguenti ( $I_x > I_y$ ):

$$I_\xi = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_\eta = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{\xi\eta} = 0$$

**Libro di testo cfr. Appendice A**